Kosi hitac i uvjeti gibanja, alternativno (1)

Ljiljana Sudar[1]

Moć grafova

Uobičajeno je da se pod kosim hicem podrazumijeva gibanje tijela u homogenom gravitacijskom polju Zemlje, koje se odvija u jednoj ravnini, kada se tijelo izbaci brzinom $\vec{v}_0$ pod kutom α s površine Zemlje koso prema gore (ili iz neke druge referentne ravnine, koso prema gore ili prema dolje). Ako zanemarimo otpor zraka, jedina sila koja djeluje na tijelo je gravitacijska sila Zemlje. Tijelo pod njenim utjecajem dobiva gravitacijsko ubrzanje, $\vec{g}$. Poslije nekog vremena ono će pasti na površinu Zemlje.

Pretpostavka da je gravitacijsko polje homogeno tj. da je jačina gravitacijskog polja konstantna $(\vec{G} = \text{const.})$ u određenom dijelu prostora, implicira da u njemu tijelo dobiva konstantno gravitacijsko ubrzanje (jer je $\vec{g} = \vec{G}$) i da je odgovarajući dio površine Zemlje ravan. Kretanje tijela (kosi hitac prema gore) razlaže se na jednoliko gibanje duž x-osi i jednoliko usporeno/ubrzano gibanje duž y-osi. Kombiniranjem formula za jednoliko i jednoliko usporeno/ubrzano gibanje dobivaju se formule za domet kosog hica, x_D, njegovu maksimalnu visinu tokom leta, $y_{\max}$, i oblik putanje, $y(x)$:

$$x_D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \qquad y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (*)$$

Je li moguće dobiti navedene formule bez poznavanja formula za jednoliko i jednoliko usporeno/ubrzano gibanje? Moguće je! U ovom prilogu je pokazano kako se samo pomoću grafa brzine, mogu dobiti sve te formule.

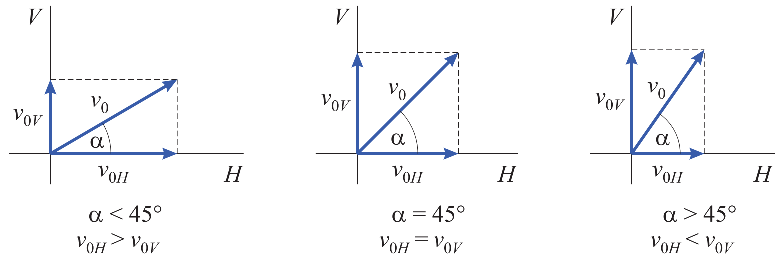
Uvedimo sada dva međusobno okomita pravca (ne koordinatne osi!) koji se sijeku u točki izbacivanja tijela. Označimo ih s H (horizontalni) i V (vertikalni) pravac. Kako se dolazi do H i V-pravca?

Kroz vektor početne brzine $\vec{v}_0$ postavimo ravninu okomitu na (ravnu) površinu Zemlje. Presjek te ravnine i površine Zemlje je traženi H-pravac. Traženi V-pravac leži u ravnini okomitoj na površinu Zemlje, prolazi kroz točku izbacivanja tijela i okomit je na H-pravac. Razložimo gibanje tijela na komponente duž ova dva pravca. Na tijelo duž V-pravca djeluje gravitacijska sila pa tijelo u tom smjeru ima gravitacijsko ubrzanje. Kako nema drugih sila, tijelo u H-pravcu nema ubrzanje. Razložimo vektor početne brzine $\vec{v}_0$ na komponente $\vec{v}_{0H}$ i $\vec{v}_{0V}$ duž H i V-pravca, redom.

Na slici 1a), b), c) dani su: kut α ($\alpha < 45^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ i $\alpha > 45^\circ$, redom) početna brzina tijela $\vec{v}_0$, njene komponente, $\vec{v}_{0H}$ i $\vec{v}_{0V}$ te H i V-pravci.

Kako u H-pravcu tijelo nema ubrzanje intenzitet komponente brzine u H-pravcu, v_H, ne mijenja se tokom gibanja tijela tj. $v_H = v_{0H}$. Tijelo u V-pravcu ima gravitacijsko ubrzanje, $\vec{g}$. Smjer gravitacijskog ubrzanja suprotan je od smjera komponente početne brzine tijela u V-smjeru. Zato će se tokom gibanja tijela iznos komponente brzine tijela u V-smjeru najprije smanjivati od početne vrijednosti v_{0V} do nule, a potom će rasti sve dok tijelo ne udari u referentnu ravninu (npr. površinu Zemlje).

[1] Autorica je profesorica fizike u Leskovcu; e-pošta: `ljsudar@gmail.com`



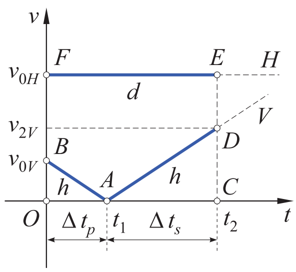
a) *b)* *c)*

Slika 1.

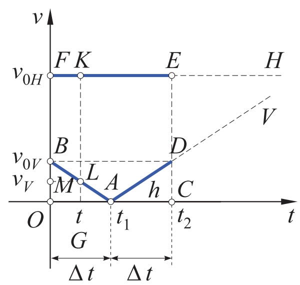
Sada crtamo graf brzine *kosog hica prema gore* u H i V-pravcu. Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je kut $\alpha < 45^\circ$ pa je $v_{0H} > v_{0V}$. Sa slike 1a) je, očito,

$$v_{0H} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_{0V} = v_0 \sin\alpha. \tag{1}$$

Graf brzine u H i V-pravcu dan je na slici 2.



Slika 2.



Slika 3.

Nulti trenutak vremena na t-osi je trenutak izbačaja tijela pod kutom α u odnosu na referentnu ravninu početnom brzinom $\vec{v}_0$. Trenutak t_1 je onaj kada je brzina tijela u V-pravcu pala na nulu. Tijelo je u vertikalnom pravcu maksimalno udaljeno od točke izbačaja tj. dostiglo je najveću visinu H u odnosu na referentnu ravninu. Trenutak t_2 je onaj kada je tijelo udarilo u referentnu ravninu brzinom v_{2V}. Δt_p i Δt_s je vrijeme "penjanja" i vrijeme "spuštanja" tijela tj. vrijeme udaljavanja od referentne ravnine i vrijeme približavanja referentnoj ravnini sve do udara u nju, redom.

Prijeđeni put tijela do trenutka t_1 u V-pravcu, $s_V = h$, je površina trokuta P_{OAB} (osnovice $|OA| = \Delta t_p$ i visine $|OB| = v_{0V} = v_0 \sin\alpha$) tj.

$$s_V = h = P_{OAB} = \frac{\Delta t_p v_{0V}}{2}. \tag{2}$$

Od trenutka t_1 do trenutka t_2 tijelo je spuštajući se do referentne ravnine prešlo u vertikalnom pravcu *isti put*, $s_V = h$, koji je na slici površina trokuta P_{ACD} (osnovice $|AC| = \Delta t_s$ i visine $|CD| = v_{2V}$) tj.

$$s_V = h = P_{ACD} = \frac{\Delta t_s v_{2V}}{2}. \tag{3}$$

Nagib grafa određen je gravitacijskim ubrzanjem pa je:

$$g = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|CD|}{|AC|} \implies g = \frac{v_{0V}}{\Delta t_p} = \frac{v_{2V}}{\Delta t_s} \implies \Delta t_p = \frac{v_{0V}}{g}, \quad \Delta t_s = \frac{v_{2V}}{g}. \tag{4}$$

Imajući u vidu (4), iz (2) i (3) dobiva se:

$$\Delta t_p = \Delta t_s = \Delta t, \qquad v_{0V} = v_{2V}, \tag{5}$$

što znači da je vrijeme "penjanja"jednako vremenu "spuštanja" tijela do referentne ravnine i da je u V-pravcu iznos komponente početne brzine tijela isti kao iznos komponente brzine tijela u trenutku udara u referentnu ravninu. Jasno je da polazni graf treba korigirati. Korigirani polazni graf brzine hica u H i V-pravcu dan je na slici 3. Sada se s grafa može lako odrediti domet hica, $s_H = d$, maksimalna visina hica, $s_{V_{\max}} = h$ i oblik putanje $s_V = f(s_H)$. Pođimo redom!

Domet hica, d, je prijeđeni put tijela u H-pravcu do trenutka t_2 kada udara u referentnu ravninu. Na grafu je domet površina pravokutnika P_{OCEF} (osnovice $|OC| = \Delta t_p + \Delta t_s = 2\Delta t$ i visine $|OF| = v_{0H} = v_0 \cos\alpha$) tj.

$$d = P_{OCEF} = 2\Delta t v_0 \cos\alpha. \tag{6}$$

Iz relacija (5), (4) i (1) dobiva se

$$\Delta t = \Delta t_p = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \tag{7}$$

čijom se zamjenom u relaciju (6) dobiva domet hica:

$$d = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} v_0 \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{8}$$

Maksimalna visina hica, h, je prijeđeni put tijela tijekom "penjanja" tj. do trenutka t_1. Na grafu je maksimalna visina hica, h, površina trokuta P_{OAB} (osnovice $|OA| = \Delta t$ i visine $|OB| = v_{0V} = v_0 \sin\alpha$) tj. $h = P_{OAB} = \dfrac{\Delta t v_0 \sin\alpha}{2}$ pa je, imajući u vidu relaciju (7)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{9}$$

Oblik putanje, $s_V = f(s_H)$, sada se lako dobiva. Do trenutka t, prijeđeni put tijela u H-pravcu je površina pravokutnika P_{OGKF} (osnovice $|OG| = t$ i visine $|OF| = v_{0H}$), tj.

$$s_H = t v_{0H} = t v_0 \cos\alpha \implies t = \frac{s_H}{v_0 \cos\alpha}, \tag{10}$$

a prijeđeni put tijela u V-pravcu, s_V, je površina trapeza P_{OGLB} (osnovica $|GL| = v_V$ i $|OB| = v_{0V} = v_0 \sin\alpha$ i visine $|OG| = t$) tj.

$$s_V = P_{OGLB} = \frac{|OB| + |GL|}{2}|OG| = \frac{v_0 \sin\alpha + v_V}{2} t. \tag{11}$$

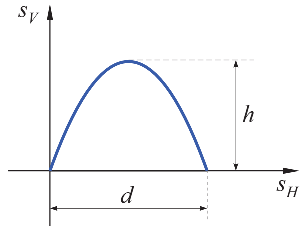
Nagib grafa određen je intenzitetom gravitacijskog ubrzanja pa je:

$$g = \frac{|OB| - |OM|}{|OG|} = \frac{v_0 \sin\alpha - v_V}{t} \implies v_V = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{12}$$

Zamjenom brzine v_V iz relacije (12) i vremena t iz relacije (10) u relaciju (11), dobiva se putanja hica $s_V = f(s_H)$:

$$\begin{aligned}
s_V &= \frac{v_0 \sin\alpha + v_0 \sin\alpha - gt}{2} t = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\
&= v_0 \sin\alpha \frac{s_H}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g\left(\dfrac{s_H}{v_0 \cos\alpha}\right)^2}{2} = \operatorname{tg}\alpha \cdot s_H - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} s_H^2 \\
\implies s_V &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\left(s_H - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Očito je da je putanja hica dana relacijom (13) parabola. Na slici 4 prikazana je putanja hica (parabola), domet i maksimalna visina hica tokom gibanja, $s_{H_{\max}} = d$ i $s_{V_{\max}} = h$, redom.



Slika 4.

Dakle, s grafa brzine dobivene su formule za domet, d, maksimalnu visinu hica, h, i oblik putanje:

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \qquad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad s_V = \operatorname{tg} \alpha \cdot s_H - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} s_H^2.$$

što odgovara formulama $(*)$.

Sada je jasno da je za rješavanje problema *kosog hica prema gore* (ali i *kosog hica prema dolje*, vertikalnog hica prema gore i prema dolje, slobodnog padanja i horizontalnog hica, kao specijalnih slučajeva kosog hica prema gore) potreban samo graf brzine! Za slučaj da je kut izbacivanja hica 30°, 45° i 60° i učenici u osnovnoj školi čim nauče formulu za površinu pravokutnika, trokuta i, eventualno, trapeza mogu rješavati probleme iz kosog hica. Poznavanje formule za površinu trapeza nije neophodno jer se pravokutni trapez, koji se javlja pri radu, može prikazati sumom trokuta i pravokutnika, ali njeno poznavanje dosta skraćuje izračunavanja. Ono na šta treba obratiti pažnju je da kada se radi s konkretnim vrijednostima moraju jedinice na grafu brzine biti usklađene npr. $(v, t) \implies (\mathrm{km/h}, \mathrm{h})$, $(\mathrm{m/s}, \mathrm{s})$ i slično. Tada se na graf brzine nanose samo dane brojčane vrijednosti. Izračunata veličina ima uvijek odgovarajuću jedinicu!

Ova metoda rješavanja problema kosog hica (i njegovih specijalnih slučajeva) pomoću grafa brzine predstavlja most između matematike i fizike, čini očitom vezu između ove dvije znanosti i s pravom se može nazvati *geometrijsko-fizikalna metoda*.

Evo i jednog zadatka iz kosog hica koji je riješen primjenom ove metode, samo pomoću grafa brzine.

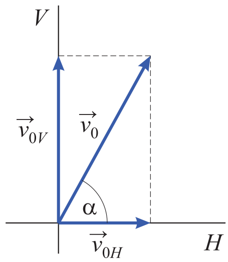
Zadatak. *Kamen bačen sa zemlje pod nekim kutom pao je na nju poslije 4 s. Odredi maksimalnu visinu i domet tijela ako se zna da je maksimalna brzina tokom gibanja dvaput veća od minimalne.*

Rješenje. Neka su $\vec{v}_0$, $\vec{v}_{0H}$, $\vec{v}_{0V}$, $\vec{v}_{\max}$, $\vec{v}_{\min}$ početna brzina tijela, njene komponente u H i V-pravcu, maksimalna i minimalna brzina tijela tokom gibanja, redom, pri čemu je

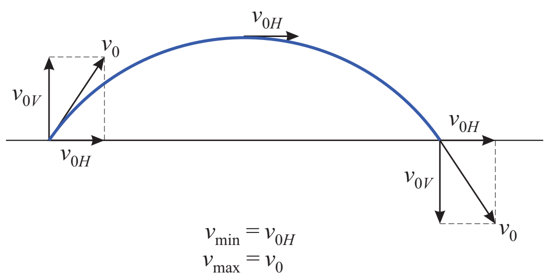
$$v_{\max} = 2v_{\min}. \tag{$**$}$$

Na slici 5 prikazana je početna brzina sa svojim komponentama u H i V-pravcu. Na slici 6 dana je putanja kosog hica s početnom brzinom i njenim komponentama, brzinom u najvišoj točki putanje i brzinom i njenim komponentama u trenutku udara u zemljinu površinu. Iznos komponente početne brzine u H-pravcu, v_{0H}, se tokom gibanja ne mijenja. Iznos komponente početne brzine u V-pravcu se tokom udaljavanja tijela od zemljine površine smanjuje od v_{0V} do nule. Kad postane nula tijelo je u najvišoj točki putanje (slika 6). Tada je iznos brzine tijela najmanji jer postoji samo komponenta brzine tijela u H-pravcu, v_{0H}, pa je

$$v_{\min} = v_{0H}. \tag{14}$$



Slika 5.



Slika 6.

Tokom približavanja tijela zemljinoj površini iznos komponente brzine tijela u V-pravcu se povećava od nule do v_{0V} u trenutku udara u nju. Tada je najveći i iznos brzine tijela v i jednak je iznosu početne brzine v_0 tj. $v = v_0$ pa je

$$v_{\max} = v_0. \tag{15}$$

Iz relacija (14), (15) i $(**)$ dobiva se v_{0H}:

$$v_0 = 2v_{0H} \implies v_{0H} = \frac{v_0}{2}. \tag{16}$$

Primjenom Pitagorinog teorema na trokut čije su stranice iznosi početne brzine i njenih komponenti (slika 5), imajući u vidu relacije (15) i (16), dobiva se iznos komponente početne brzine u V-pravcu, v_{0V}:

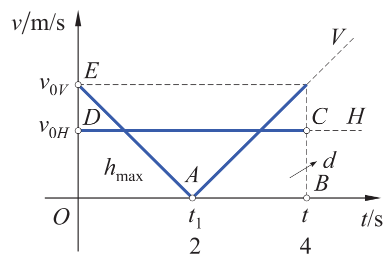
$$v_0^2 = v_{0H}^2 + v_{0V}^2 = \frac{v_0^2}{4} + v_{0V}^2 \implies v_{0V}^2 = \frac{3v_0^2}{4} \implies v_{0V} = \frac{\sqrt{3}v_0}{2}. \tag{17}$$

Očito je iz (16) i (17) $v_{0V} > v_{0H}$.

Sada možemo nacrtati graf brzine kosog hica – slika 7.

Nulti trenutak vremena na t-osi je trenutak izbačaja tijela. Trenutak t_1 je onaj kada je brzina tijela u V-pravcu pala na nulu (tijelo je u najvišoj točki putanje!), a t je onaj kada je tijelo udarilo u površinu zemlje. S d i $h_{\max}$ označeni su domet i maksimalna visina tijela, redom.

Nagib grafa određen je gravitacijskim ubrzanjem pa je:



Slika 7.

$$g = \frac{|OE|}{|OA|} = \frac{v_{0V}}{2} \implies v_{0V} = 2g = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m/s}. \tag{18}$$

Iz (17) i (18) dobiva se v_0:

$$v_0 = \frac{2v_{0V}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 20}{1.73} = 23.12 \text{ m/s},$$

a zatim iz relacije (16) i v_{0H}:

$$v_{0H} = \frac{v_0}{2} = \frac{23.12}{2} = 11.56 \text{ m/s}.$$

Sada je lako naći domet hica, d, kao prijeđeni put tijela, s_H, u H-pravcu do trenutka t tj. $d = s_H$. Na grafu je to površina pravokutnika P_{OBCD} (osnovice $|OB| = 4$ i visine $|OD| = v_{0H} = 11.56$) tj. $d = s_H = P_{OBCD} = |OB| \cdot |OD| = 4v_{0H} = 4 \cdot 11.56 = 46.24$ m.

Maksimalna visina hica, $h_{\max}$, je prijeđeni put tijela tjekom "penjanja" tj. do trenutka t_1. Na grafu je to površina trokuta P_{OAE} (osnovice $|OA| = t_1 = 2$ i visine $|OE| = v_{0V} = 20$) tj.

$$h_{\max} = P_{OAE} = \frac{|OA||OE|}{2} = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20 \text{ m.}$$

Ne traži se, ali se može odrediti i kut α pod kojim je tijelo izbačeno s površine zemlje.

Za one koji znaju trigonometrijske funkcije to je lako imajući u vidu relaciju (16):

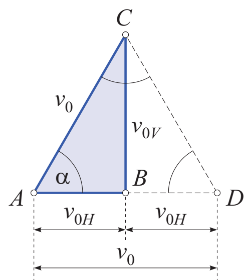
$$\cos\alpha = \frac{v_{0H}}{v_0} = \frac{\frac{v_0}{2}}{v_0} = \frac{1}{2} \implies \alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ.$$

Oni koji ih ne znaju mogu odrediti kut α koristeći $\triangle ABC$ čije su stranice iznosi početne brzine i njenih komponenti u H i V-pravcu, kao na slici 8. Na njoj je $\triangle ABC$ dopunjen $\triangle BDC$ čija je manja kateta $|BD| = v_{0H}$. Njegova hipotenuza je prema Pitagorinom teoremu:

$$|DC|^2 = v_{0H}^2 + v_{0V}^2 = v_0^2 = |AC|^2 \implies |DC| = |AC|,$$

pa je $\triangle ADC$, očito jednakostraničan. Imajući u vidu da su nasuprot jednakih stranica trokuta jednaki kutovi i da je zbroj kutova u svakom trokutu 180°, sada je lako dobiti traženi kut:

$$3\alpha = 180^\circ \implies \alpha = 60^\circ.$$



Slika 8.

Literatura

[1] Darko Kapor, Sonja Skuban, *Fizika: zakoni i formule*, Novi Sad, Zmaj, 2008, str. 7.

[2] Nataša Čaluković, *Fizika 1: zbirka zadataka i testova za I razred gimnazije*, Beograd, Krug, 1999., zadatak 453.