Kako riješiti bilo koju jednadžbu (s jednom nepoznanicom na skupu realnih brojeva)

Boris Čulina[1], *Ivica Čulina*[2], *Marjana Kuliš*[3]

Problem

Jednadžba s jednom nepoznanicom na skupu realnih brojeva je uvjet u obliku jednakosti realnih brojeva. Primjer:

$$x^2 = 2x.$$

Rješenje jednadžbe je realan broj koji ispunjava taj uvjet. Uvijek možemo uvrštavanjem ispitati je li neki broj rješenje jednadžbe. Tako 1 jeste, a 2 nije rješenje gornje jednadžbe:

$$1^2 = 2 \cdot 1 \qquad \text{NE}$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 \qquad \text{DA.}$$

Problem. Naći sva rješenja jednadžbe. Ima li gornja jednadžba još rješenja? Lako je vidjeti da je i nula rješenje. Kvadratna jednadžba ima najviše dva realna rješenja. Tako znamo da imamo sva rješenja.

Važnost. Mjerenjem, realnost možemo preciznije opisati pomoću brojeva, a pravilnosti u realnosti odnosima među pridruženim brojevima. Ti odnosi su često jednakosti. Na primjer, u odgovarajućoj aproksimaciji, za tanku leću žarišne duljine f, udaljenost predmeta s i udaljenost slike predmeta s' od leće su povezani sljedećom jednakošću (jednadžba leće)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}.$$

Tako, znajući da je žarišna duljina leće 10 cm, a predmet udaljen 50 cm, pomoću ovog zakona možemo postaviti jednadžbu za nepoznat položaj slike predmeta (sve je izraženo u centimetrima):

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10}$$

i njenim rješavanjem dobiti položaj slike predmeta. Još bolje, koristeći opće oznake možemo, rješavajući jednadžbu po s', dobiti novu formulu koja nam daje položaj slike za bilo koju leću i bilo koji položaj predmeta:

$$s' = \frac{sf}{s-f}.$$

Mnogi praktični problemi se svode na rješavanje odgovarajućih jednadžbi. Znajući zakone dane situacije koji su u obliku jednakosti i znajući rješavati jednadžbe, možemo izvoditi nove opće zakone kao i rješavati konkretne probleme. Jednadžbe i postupci rješavanja jednadžbi daju osnovni matematički aparat za gotovo cjelokupno srednjoškolsko gradivo, pogotovo iz fizike.

---

[1] Autor je profesor stručnog studija u trajnom zvanju na Veleučilištu Velika Gorica; e-pošta: `boris.culina@vvg.hr`

[2] Autor je predavač na Veleučilištu Velika Gorica; e-pošta: `iculina@vvvg.hr`

[3] Autorica je suradnica u nastavi na Veleučilištu Velika Gorica; e-pošta: `marjana.kulis@vvvg.hr`

Više o jednadžbama i njihovoj upotrebi možete pročitati, a možda i nasmijati se, na sljedećem linku:

`https://understandingmath.academy/wp-content/uploads/2020/10/Equations_compressed.pdf`

Povijest rješavanja jednadžbi

Kako riješiti linearnu i kvadratnu jednadžbu zna se od davnina.

Linearna jednadžba: $ax + b = 0, \quad a \neq 0 \implies x = \dfrac{-b}{a}.$

Kvadratna jednadžba: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \implies x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

Formule po kojima se rješavaju te jednadžbe uveo je u drugoj polovici 16. stoljeća François Viète. Uvodeći opće oznake (varijable) za koeficijente jednadžbi, napravio je revolucionaran skok koji je omogućio da se rješenja izraze formulama pomoću koeficijenata. Danas, naviknuti na varijable, možda i nismo dovoljno svjesni koliko je velik skok napravljen u matematici i znanosti njihovim uvođenjem. Vièteu je u tome pomagao i Marin Getaldić, čiju nadarenost je Viète jako cijenio.[4] Današnje oznake uglavnom potječu od Renéa Descartesa s početka 17. stoljeća. Prije se rješavanje sastojalo od uputa kojima se dolazilo do rješenja.

Postupci rješavanja **kubnih jednadžbi** ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$) i **jednadžbi četvrtog stupnja** ($ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0,\ a \neq 0$) otkriveni su u renesansnoj Italiji u prvoj polovici 16. stoljeća. Bilo je to doba u kojem su matematičari izazivali jedni druge na intelektualne dvoboje, a ponekad su organizirana i klađenja koji će matematičar pobijediti. Ako je netko znao postupak rješavanja jednadžbi, držao bi ga u tajnosti jer mu je to donosilo prestiž i novac. Niccolò Fontana, poznatiji kao Tartaglia[5], sudjelujući u tim dvobojima otkrio je postupak rješavanja kubne jednadžbe. Naravno, držao ga je u tajnosti. Međutim, drugi matematičar, Girolamo Cardano je na prijevaru, obećavši mu unosan posao, nagovorio Tartagliau da mu otkrije postupak, uz obećanje da ga neće nikome reći. Nakon par godina Cardano je objavio postupak rješavanja u svojoj knjizi *Ars Magna* (1545.) i tako prekršio obećanje, a što je rezultiralo i grdnom svađom.

Zašto ne koristimo formulu za rješavanje kubne jednadžbe $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$? Evo odgovora:

$$x = -\frac{(-i\sqrt{3}+1)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)}{18\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}+\frac{\sqrt{-\frac{1}{3}b^2c^2+\frac{4}{3}ac^3+9a^2d^2+\frac{2}{3}(2b^3-9abc)d}}{6a^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$-\frac{1}{2}(i\sqrt{3}+1)\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}+\frac{\sqrt{-\frac{1}{3}b^2c^2+\frac{4}{3}ac^3+9a^2d^2+\frac{2}{3}(2b^3-9abc)d}}{6a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$-\frac{b}{3a}.$$

[4] O Marinu Getaldiću je ostalo zapisano da je bio “anđeo po naravi, a demon u matematici”.

[5] “Tartaglia” na talijanskom znači “mucavac”. Kao djetetu su mu francuski vojnici nanijeli ozljede po licu kada su napravili masakr u mjestu u kojem je živio i od tih ozljeda nije mogao ispravno govoriti.

Slične su formule i za preostala dva rješenja. Kubna jednadžba može imati maksimalno tri realna rješenja – formule ponekad daju i isto realno rješenje ili kompleksna rješenja.

U izrazu se javlja kompleksni broj i. Originalno su matematičari računali s $\sqrt{-1}$. Iako nisu znali šta je to, "zažmirili" bi i računali, jer bi nekad taj izraz u računanju nestao i dobili bi rješenje, a nekad bi ostao i ne bi dobili (realno) rješenje. Davanje smisla takvima dovelo je do zamisli o kompleksnim brojevima.

Formula za jednadžbu četvrtog stupnja je, naravno, još puno veća. Nju je otkrio Cardanov učenik Lodovico Ferrari.

Nakon toga, matematičari su stoljećima bezuspješno tražili formule za rješavanje **polinomnih jednadžbi stupnja većeg od 4**. Tek početkom devetnaestog stoljeća (1824.) je mladi norveški matematičar Niels Abel pokazao da ne postoje opće aritmetičke formule za rješavanje jednadžbi stupnja većeg od 4 (tzv. Abelov teorem nemogućnosti).[6] Nešto poslije, mladi francuski matematičar Evarist Galoisa je dao kriterije kod kojih se rješenja jednadžbe mogu izraziti aritmetičkim formulama pomoću koeficijenata jednadžbe. Pri tome je razvio teoriju grupa, jednu od osnova moderne matematike.[7]

Kvalitativni, analitički i numerički pristup

Već iz ove povijesti rješavanja jednadžbi vidimo koliko je teško, pa čak i nemoguće, nalaziti rješenja jednadžbi analitičkim putem: krenemo od jednadžbe i u jednom nizu transformacija jednadžbi dođemo do rješenja. Takav pristup dominira u srednjoj školi, i to nije dobro. Štoviše, jednadžbe u srednjoj školi su "naštimane" da se mogu lako riješiti. Vrlo malu promjenu treba napraviti da bismo od jednadžbe koju je lako riješiti dobili jednadžbu koju je nemoguće analitički riješiti. Takav je npr. prijelaz s najjednostavnije trigonometrijske jednadžbe $\cos x = \frac{1}{2}$ na jednadžbu $\cos x = \frac{1}{2}x$ koju je nemoguće riješiti analitički. Takav pristup rješavanju nas ograničava, ne toliko zbog izbora jednadžbi koje se mogu tako riješiti, nego više zbog toga što ne razvijamo veoma značajne načine razmišljanja, a to su kvalitativni i numerički pristupi rješavanju problema.

Analitički pristup rješavanju problema

Logičkim razmišljanjem i simboličkim računanjem doći do egzaktnog rješenja problema.

Kvalitativni pristup rješavanju problema

Zaključiti nešto o rješenju, a da se ono stvarno ne nađe.

---

[6] U Abelovom matematičkom razvoju veoma važan događaj zbio se kada je dobio novog učitelja matematike. Prethodni je bio otpušten jer je kažnjavajući usmrtio jednog đaka. Novi učitelj je odmah primijetio Abelovu sklonost matematici i svesrdno mu je pomagao.

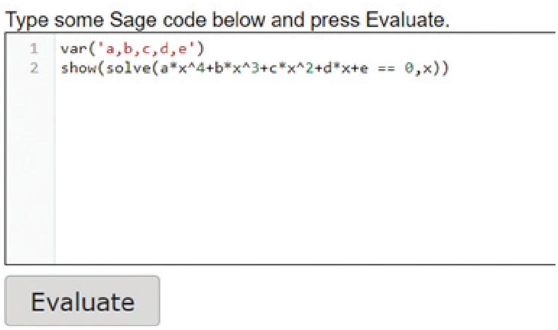
[7] Galois je poginuo u duelu kad je imao samo 20 godina. Noć prije dvoboja, sluteći smrt, zapisao je sve svoje matematičke rezultate (tzv. Galoisov testament) i zamolio prijatelja da ih pokaže poznatim francuskim matematičarima. Kad je njegov Alfred zaplakao gledajući ga kako umire, Evarist mu je rekao: "Ne plači brate. Trebam svu hrabrost da umrem s dvadeset.".

Naći numeričko rješenje problema do na traženu točnost. Traženu točnost određuje problem koji želimo riješiti – koliko malu grešku on daje pri rješavanju.

Pokazat ćemo na primjeru rješavanja jednadžbi kako kombinacijom kvalitativnog, analitičkog i numeričkog pristupa možemo riješiti svaku jednadžbu s jednom nepoznanicom na skupu realnih brojeva. Kvalitativni pristup će nam pomoći da vidimo koliko ima rješenja i gdje se otprilike nalaze. Ako ih ne možemo analitički odrediti, imamo numeričke postupke koji će ih odrediti na koju god želimo točnost. Pri tome ćemo se pomoći softwareom koji će nam sve ovo učiniti veoma laganim. Koristit ćemo *SageMath*, slobodan open-source (dakle, ne samo da je besplatan već mu se i u kôd može zaviriti) software koji je jednako moćan poput komercijalnih matematičkih softwarea i kojeg održava i naveliko koristi matematička zajednica već gotovo dvadeset godina.

Položaj *SageMath* unutar matematičkih softwarea je gotovo identičan položaju programskog jezika Python unutar programskih jezika. Kao što je *Python* besplatan univerzalan programski jezik s velikom zajednicom koja ga podržava, jednako pogodan za programiranje u školi i u bilo kojoj profesiji, takav je i *SageMath* unutar matematičkih softwarea. Štoviše, *SageMath* je dodatak na *Python*, prilagođen za matematičke probleme, tako da u *SageMath* imamo, pored njegovih specifičnosti, na raspolaganju i kompletan Python.[8]

SageMath ćemo koristiti na, za ovu svrhu, najjednostavniji način: otići ćemo na stranicu `https://sagecell.sagemath.org/` i, u za to predviđeni okvir, zadati mu naredbe. Tako se, na primjer, dobije i gore prikazana formula za rješavanje kubne jednadžbe. A evo i naredbe za rješenje jednadžbe četvrtog stupnja:



Pritiskom na tipku *Evaluate* dobit ćemo formule za sva četiri rješenja. Ovdje je, zbog veličine formula, prikazan samo početni dio formule za prvo rješenje:

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}a\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{4bc}{a^2}+\frac{8d}{a}\right)}{2\sqrt{\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}a^2\left(\frac{2c^3}{a^3}-\frac{9(bd-4ae)c}{a^3}+\frac{27(b^2e+(d^2-4ce)a)}{a^3}+\frac{9\sqrt{9a^2d^4-\frac{256}{3}a^3e^3+\frac{2}{3}(2b^3-9abc)d^3-\ldots}}{a^3}\right)^{\frac{2}{3}}+4c^2-12bd+\ldots}{\left(\frac{2c^3}{a^3}-\frac{9(bd-4ae)c}{a^3}+\frac{27(b^2e+(d^2-4ce)a)}{a^3}+\frac{9\sqrt{9a^2d^4-\frac{256}{3}a^3e^3+\frac{2}{3}(2b^3-9abc)d^3-\frac{1}{3}(b^2c^2-4ac^3)d^2+\ldots}}{a^3}\right)}}}}\ldots$$

[8] Kratki uvodni tutorial o SageMath se može naći na linku `https://understandingmath.academy/wp-content/uploads/2020/10/SageMathTutorial-1.pdf`, a "sve" o SageMath možete naći na njegovoj stranici `https://www.sagemath.org/`.

Na primjeru jednadžbe $x^3 = 2x - 1$ pokazat ćemo kako se kombiniranim pristupom može riješiti svaka jednadžba.

Kvalitativan pristup u rješavanju jednadžbi

Svaku jednadžbu možemo prebacivanjem svih članova na lijevu stranu svesti na oblik

$$f(x) = 0.$$

To znači da su rješenja jednadžbe isto što i nultočke funkcije $f(x)$: brojevi koje kad stavimo na ulaz u funkciju, na izlaz dobijemo nulu.

A njih je iz grafa funkcije (upotrebom softwarea) lako kvalitativno odrediti – to su zajedničke točke grafa funkcije i x-osi.

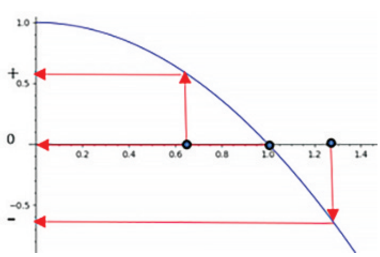
Na taj način imamo jednostavan postupak kojim možemo kvalitativno riješiti sve jednadžbe! A to nije mala stvar.

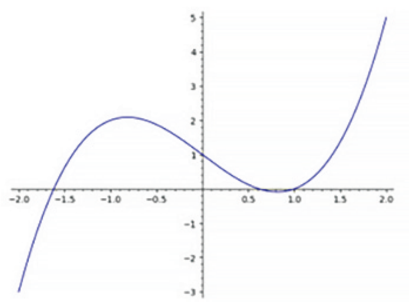
Prebacimo li sve članove na lijevu stranu dobit ćemo jednadžbu

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Tako rješavanje jednadžbe svodimo na traženje nultočaka funkcije

$$f(x) = x^3 - 2x + 1.$$





Naredimo *SageMath*-u da nam nacrta graf ove funkcije:

```
plot(x^3-2*x+1, (x,-2,2))
```

SageMath će nam dati graf prikazan na slici desno.

Vidimo da graf ima tri zajedničke točke s x-osi. To su nultočke ove funkcije, odnosno rješenja naše jednadžbe. Možemo ih i približno odrediti: -1.6, 0.6 i 1.[9]

Ako i možemo analitički riješiti jednadžbu, dobro je prvo kvalitativno naći rješenja: tako znamo kakva rješenja možemo očekivati u analitičkom rješavanju, a što nam može pomoći i u rješavanju i u provjeri dobivenih rješenja.

---

[9] Znamo da su to sva rješenja jer polinom trećeg stupnja ima najviše tri realne nultočke. Općenito, treba ispitati ima li funkcija nultočke van područja na kojem smo je nacrtali, bilo da je crtamo na dovoljno velikom području, bilo da koristimo neka svojstva funkcija. Na primjer, za polinome najveća potencija određuje njihovo ponašanje za velike pozitivne i negativne ulaze, pa su tako njihove vrijednosti za takve ulaze jako velike po apsolutnoj vrijednosti. Obično, iz problemske situacije koja nas je dovela do jednadžbe znamo gdje bi se trebala nalaziti rješenja koja nas zanimaju. Npr., ako je rješenje jednadžbe težina automobila izražena u kilogramima, zanimat će nas samo rješenja u intervalu od recimo 500 do 3000 kg.

Analitički pristup u rješavanju jednadžbi

Analitički bismo mogli riješiti jednadžbu $x^3 - 2x + 1 = 0$ tako da s nešto upornosti i sreće faktoriziramo izraz na lijevoj strani:

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 = x\left(x^2 + x - 1\right) - \left(x^2 + x - 1\right)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x - 1).$$

Tako dobijemo jednadžbu $(x - 1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0$ koja se svede na dvije, $x - 1 = 0$ i $x^2 + x - 1 = 0$, s rješenjima $x_1 = 1$ i $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ova rješenja bismo mogli dobiti i na sljedeći, više sistematski način, ali koji traži i više znanja. Graf nam sugerira da je 1 rješenje jednadžbe, što lako provjerimo uvrštavanjem $x = 1$ u jednadžbu. To znači da je polinom x^3-2x+1 djeljiv polinomom $x-1$. Algoritam dijeljenja polinoma nam daje polinom $x^2 + x - 1$. Tako smo dobili traženu faktorizaciju

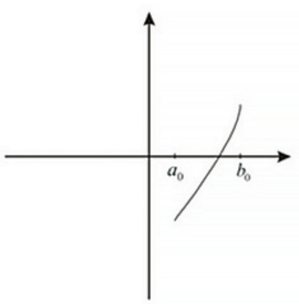
$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1).$$

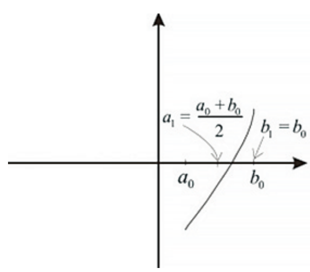
Numerički pristup u rješavanju jednadžbi

Prikazat ćemo jednu od metoda numeričkog rješavanja jednadžbi – metodu raspolavljanja. Tom metodom utočnit ćemo do na milijuntinku srednje rješenje gornje jednadžbe za koje otprilike znamo da je 0.6.

Metodom raspolavljanja možemo do na traženu točnost naći svaku nultočku koja siječe x-os na sljedeći način. Izaberemo jedan interval $[a_0, b_0]$ na čijim rubovima funkcija poprima suprotne predznake. Tada smo sigurni da se u tom intervalu nalazi nultočka funkcije.

Za približno rješenje možemo uzeti aritmetičku sredinu intervala: $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
Greška je tada po apsolutnoj vrijednosti manja od polovice intervala: $\varepsilon_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$.





Aproksimaciju možemo popraviti tako da odredimo u kojoj je polovici intervala rješenje. To možemo napraviti na sljedeći način. Izračunamo $f(x_0)$. Ako je $f(x_0) = 0$, imali smo sreću i pronašli rješenje (to se veoma rijetko događa!). U protivnom, izabrat ćemo onu polovicu intervala na čijim krajevima funkcija ima različite predznake. Drugim riječima, x_0 nam postaje novi kraj intervala – njime zamijenimo onaj kraj starog intervala u kojem funkcija ima isti predznak kao i u x_0. Npr. prema lijevoj slici vidimo da treba zamijeniti lijevi kraj.

S novim intervalom $[a_1, b_1]$ (desnom polovicom starog intervala) postupak ponavljamo. Što više ciklusa napravimo to je aproksimacija rješenja aritmetičkom sredinom rubova intervala sve bolja, jer je svaki sljedeći interval upola manji od prethodnog.[10]

Metoda raspolavljanja

Tražimo rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ s greškom po apsolutnoj vrijednosti manjom ili jednakom $\varepsilon > 0$.

Ulaz: $a_0 < b_0$ takvi da $f(a_0)$ i $f(b_0)$ imaju suprotne predznake.

Korak postupka: Neka smo dobili $a_i < b_i$ takve da $f(a_i)$ i $f(b_i)$ imaju suprotne predznake. Računamo:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \qquad \varepsilon_i = \frac{b_i - a_i}{2}.$$

Kriterij zaustavljanja. Ako je $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon$ ili $f(x_i) = 0$ (dobivena je željenja točnost ili je do na točnost računala dobivena nul= točka) tada postupak prekidamo.

Ako se to nije dogodilo tada izračunamo $f(x_i)$, nove rubove $a_(i+1) < b_(i+1)$ dobijemo tako da zamijenimo s x_i stari rub u kojem je predznak funkcije isti predznaku $f(x_i)$, dok drugi rub ostane isti, te s novim rubovima ponavljamo korak postupka.

Napišimo *Python* program (*Python* funkciju) koji će to napraviti umjesto nas: naredba $Mp(f, a, b, e)$ će metodom raspolavljanja naći nultočku funkcije f na intervalu $[a, b]$ tako da će greška po apsolutnoj vrijednosti biti manja od e. Naredba pretpostavlja da funkcija f ima na rubovima intervala različite predznake.

```
#Metoda polovljenja

def Mp(f,a,b,e):
    while (b-a)/2 > e:
        x = (a+b)/2
        if f(x) == 0:
            return x
        elif f(a)*f(x) > 0:
            a = x
        else:
            b = x
        print(f"a = {a:<12}      b = {b}")
    print('')
    return x
```

Da bismo bolje razumjeli što se događa pri izvršenju, naredba `print` će nam u svakom izvršenju `while` petlje ispisati sljedeći, upola manji interval u kojem se nalazi rješenje.

Da bismo poboljšali približno rješenje 0.6 jednadžbe $x^3 - 2x + 1 = 0$ do na jednu milijuntinku, primijenit ćemo ovaj Python program na funkciju $f(x) = x^3 - 2x + 1$ i interval $[0.2, 0.8]$. To ćemo napraviti tako da u SageMath još dodamo sljedeću naredbu

```
print(f"rješenje = {Mp(lambda x : x^3-2*x+1,0.2,0.8,0.000001)}")
```

[10] Englezi ovu metodu zovu "lion hunting".

Kad pošaljemo kôd na izvršavanje, dobit ćemo:

```
a = 0.500000000000000       b = 0.800000000000000
a = 0.500000000000000       b = 0.650000000000000
a = 0.575000000000000       b = 0.650000000000000
a = 0.612500000000000       b = 0.650000000000000
a = 0.612500000000000       b = 0.631250000000000
a = 0.612500000000000       b = 0.621875000000000
a = 0.617187500000000       b = 0.621875000000000
a = 0.617187500000000       b = 0.619531250000000
a = 0.617187500000000       b = 0.618359375000000
a = 0.617773437500000       b = 0.618359375000000
a = 0.617773437500000       b = 0.618066406250000
a = 0.617919921875000       b = 0.618066406250000
a = 0.617993164062500       b = 0.618066406250000
a = 0.618029785156250       b = 0.618066406250000
a = 0.618029785156250       b = 0.618048095703125
a = 0.618029785156250       b = 0.618038940429688
a = 0.618029785156250       b = 0.618034362792969
a = 0.618032073974609       b = 0.618034362792969
a = 0.618033218383789       b = 0.618034362792969

rješenje = 0.618033218383789
```

U ispisu vidimo kako se sužavao interval u kojem je rješenje. Tako nam je program dao točnije rješenje jednadžbe do na traženi broj decimala. No on nam je dao i previše decimala. S obzirom da se greška javlja na poziciji milijuntinke, znamenke u rješenjima koje se nalaze iza milijuntinke nemaju nikakvog smisla. Zato ćemo rješenje zaokružiti, kao što se obično i radi, na mjestu milijuntinke (prikazat ćemo samo tzv. pouzdane znamenke):

$$x = 0.618034.$$

Zaokruživanje rezultata na mjestu gdje se javlja greška mogli smo ugraditi i u Python kôd, ali tada bi se u kôdu "izgubila" jednostavnost metode raspolavljanja.

Metodom raspolavljanja ne možemo precizirati nultočku u kojoj funkcija dodiruje, ali ne siječe x-os. Tada bismo trebali koristiti neku drugu numeričku metodu, npr. Newtonovu metodu tangente ili metodu fiksne točke.

Kada jednom razumijemo numeričke metode, nije dovoljno da nam daju približna rješenja već i ocjenu greške, jer važno je znati "koliko" je rješenje približno da bismo ga mogli ispravno upotrijebiti, tada možemo koristiti i gotove *SageMath* naredbe za numeričko računanje. Za numeričko rješavanje jednadžbi možemo koristiti naredbu `find_root` koja nam daje rješenje točno do na 17 znamenki (ne računajući početne nule). Ako nas zanima točnost do na neku decimalu, tada to možemo postići tako da na dobiveno rješenje primijenimo naredbu *round* kojom možemo zadati na koju decimalu želimo zaokružiti rješenje.

Tako smo mogli dobiti i rješenje naše jednadžbe do na traženu točnost (šesto mjesto iza decimalne točke):

```
round(find_root(x^3-2*x+1==0,0.2,0.8),6)
```

Zadatak. Riješite jednadžbu $\cos x = \frac{1}{2}x$ s greškom manjom po apsolutnoj vrijednosti od jedne milijardinke.

Rješenje: 1.029866529.