ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2024. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/297.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 208.

A) Zadatci iz matematike

3959. Ako su A i B cijeli brojevi takvi da je $A^3 - B^3$ djeljivo s 11, dokaži da je i $A - B$ djeljivo s 11.

3960. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$, dokaži nejednakost

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{12}.$$

3961. Riješi diofantsku jednadžbu

$$x - y^4 = 4$$

gdje je x prosti broj.

3962. Ako su a, b, c, p, q, r realni brojevi takvi da je

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$px^2 + qx + r \geq 0$$

dokaži

$$apx^2 + bqx + 4cr \geq 0$$

za svaki realan broj x.

3963. Neka je F_n Fibonaccijev niz:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za svaki $n > 2$. Dokaži

$$F_n = 1 + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{n-j-1}{j}$$

gdje je j najveći cijeli broj koji nije veći od $\frac{n-1}{2}$.

3964. Ako su brojevi a, b, $c > 0$ i $a+b+c = 3$ odredi maksimalnu vrijednost izraza $S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)}$.

3965. Neka su a, b, c strogo pozitivni realni brojevi. Dokaži da su oni duljine stranica nedegeneriranog trokuta ako i samo ako postoje realni brojevi p i q takvi da je $p+q = 1$ i vrijedi nejednakost

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2.$$

3966. Ako je $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$ odredi minimalnu vrijednost od $|x| - |y|$.

3967. Dan je konveksan četverokut $ABCD$ kod kojeg je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$ i

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2.$$

Dokaži da se ovom četverokutu može upisati kružnica.

3968. U kružnicu polumjera R upisan je trapez čija je jedna baza njezin promjer. Nađi najveću moguću površinu trapeza.

3969. Dvije kružnice se dodiruju izvana u točki C i AB je njihova zajednička tangenta. Ako je $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$ odredi polumjere kružnica, gdje je $|AC| = a$ i $|BC| = b$.

3970. Dokaži jednakost

$$\cos 80^\circ + \sin 20^\circ + \cos 60^\circ + \sin 40^\circ + \cos 40^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2 \sin 5^\circ}.$$

3971. Riješi jednadžbu

$$(5z-3)^6 = -125^2 \cdot i^{10} \cdot z^6$$

i rješenja zapiši u trigonometrijskom obliku.

3972. Neka su T_1, T_2, T_3 različite točke na paraboli i t_1, t_2, t_3 tangente na parabolu i tim točkama. Odredi omjer površina trokuta $T_1T_2T_3$ i trokuta određenog tangentama.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 530. U potresima nastaje nekoliko vrsta valova od kojih su najvažniji longitudinalni ili P i transverzalni ili S valovi. Longitudinalne zovemo i primarni jer su brži, u blizini površine brzina im je oko 6 km/s. Brzina transverzalnih ili sekundarnih valova iznosi oko 3.5 km/s, oni imaju oko 5 puta veće amplitude i uzrokuju veće štete. Epicentar potresa se određuje metodom triangulacije podataka koje su zabilježili seizmografi na tri seizmološke postaje. Koliko je epicentar potresa udaljen od Zagreba ako je zagrebački seizmograf zabilježio da su S valovi stigli 4 sekunde nakon P valova?

OŠ – 531. Učenik ima strujni krug koji se sastoji od dva paralelno spojena otpornika, $R_1 = 20\ \Omega$ i $R_2 = 5\ \Omega$, a s njima je serijski spojen otpornik nepoznatog otpora. Uz otpor od $5\ \Omega$ je spojen ampermetar koji mjeri struju kroz njega od 500 mA kad se taj strujni krug spoji na izvor napona 6 V. Koliki bi napon tada pokazao voltmetar spojen na treći otpornik? Koliki je otpor tog otpornika?

OŠ – 532. Vozeći se kući s majkom Marko je na cesti ugledao neopreznog mačića. Od njihovog je automobila bio udaljen oko 15 m i majka je uspjela zaustaviti automobil pa su pričekali da mačić prijeđe cestu. Marko zna da njegova majka u naseljenom mjestu nikada ne vozi brzinom većom od 50 km/h. Kad su došli kući u prometnoj je dozvoli našao da je masa majčinog automobila 1350 kg i s tim je podatcima izračunao kolikom su silom morale djelovati kočnice da zaustave automobil na vrijeme. Koliku je silu dobio?

OŠ – 533. Polumjer Zemlje na ekvatoru iznosi 6378.1 km. Za jedan okret oko svoje osi Zemlji treba 23 h, 56 min i 4.1 s, što se naziva siderički dan. Izračunajte obodnu brzinu točke na ekvatoru u m/s i km/h. Usporedite tu brzinu s brzinom zvuka u zraku koja na 20 °C iznosi 343 m/s.

1833. Top izbacuje granate početnom brzinom 370 m/s. Ako kut izbačaja u odnosu na horizontalnu ravninu povećamo za 1°, vrijeme leta se produlji za 0.84 s. Koliki je kut izbačaja? Koliko se promijenio horizontalni domet? Otpor zraka zanemariti i uzeti $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

1834. Asteroid se giba oko Sunca po elipsi, tako da mu je brzina u perihelu (najbliže Suncu) 75 % veća od brzine u afelu (najdalje od Sunca). Ako je ophodno vrijeme asteroida 1150 dana, odredi obje spomenute brzine i odgovarajuće udaljenosti od Sunca. Koliki je numerički ekscentricitet putanje?

1835. Pri jednolikom kruženju oko planeta na visini 125 km iznad površine, ophodno vrijeme satelita iznosi 144 min. Ako je prosječna gustoća planeta $2270\ \mathrm{kg/m^3}$, odredi radijus planeta i brzinu kruženja satelita.

1836. Kolica gurnemo uz kosinu brzinom 2.3 m/s. Pri povratku, kolica prođu isti položaj brzinom 0.8 m/s, suprotnog smjera. Ako je koeficijent trenja s podlogom $\mu = 0.375$, odredi kut nagiba kosine α i vrijeme koje je kolicima trebalo da se vrate u početni položaj.

1837. Međunarodna svemirska postaja (ISS), mase 450 tona se zbog otpora atmosfere u 30 dana spusti s kružne orbite s 415 na 411.5 km visine. Odredi silu kočenja i snagu te sile. Kako je moguće da trenje ubrzava satelit? Polumjer Zemlje neka je 6371 km, njezina masa $6 \cdot 10^{24}$ kg i $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

1838. Pri necentralnom elastičnom sudaru u kojemu prva kugla prilikom sudara prenese 35 % kinetičke energije na drugu, smjer gibanja prve se promijeni za 30°. Koliki je omjer masa dviju kugli? Druga kugla je prije sudara mirovala.

1839. Fizikalno njihalo sastoji se od homogenog tankog prstena radijusa 15 cm, koji se njiše obješen o jednu točku na prstenu u njegovoj ravnini. Koliki je period malih njihaja?

C) Rješenja iz matematike

3931. *Razlomak*

$$\frac{101010101}{110010011}$$

zapisan je u proizvoljnoj bazi. Dokaži da mu se vrijednost neće promijeniti ako se srednja znamenka 1 zamijeni bilo kojim slogom znamenki 1, tj. da vrijedi:

$$\frac{101010101}{110010011} = \frac{1010\,\overbrace{11\ldots1}^{n}\,0101}{1100\,\underbrace{11\ldots1}_{n}\,0011}.$$

Rješenje. Neka je dani razlomak zapisan u bilo kojoj bazi $b > 1$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je:

$$\begin{aligned} A &= \frac{101010101}{110010011} \\ &= \frac{1 + b^2 + b^4 + b^6 + b^8}{1 + b + b^4 + b^7 + b^8} \qquad (1) \end{aligned}$$

$$B=\frac{1010\overbrace{11\ldots1}^{n}0101}{1100\underbrace{11\ldots1}_{n}0011}$$

$$=\frac{1+b^2+b^4+b^5+\ldots+b^{n+3}+b^{n+5}+b^{n+7}}{1+b+b^4+b^5+\ldots+b^{n+3}+b^{n+6}+b^{n+7}}$$

$$=\frac{1+b^2+b^4\cdot(1+b+\ldots+b^{n-1})+b^{n+5}+b^{n+7}}{1+b+b^4\cdot(1+b+\ldots+b^{n-1})+b^{n+6}+b^{n+7}}$$

$$=\frac{1+b^2+b^4\cdot\dfrac{1-b^n}{1-b}+b^{n+5}+b^{n+7}}{1+b+b^4\cdot\dfrac{1-b^n}{1-b}+b^{n+6}+b^{n+7}}$$

$$=\Big(1-b+b^2-b^3+b^4-b^{n+4}+b^{n+5}$$
$$-b^{n+6}+b^{n+7}-b^{n+8}\Big)\Big/$$
$$\Big(1-b^2+b^4-b^{n+4}+b^{n+6}-b^{n+8}\Big)$$

$$=\frac{(1-b^{n+4})\cdot(1-b+b^2-b^3+b^4)}{(1-b^{n+4})\cdot(1-b^2+b^4)}$$

$$=\frac{1-b+b^2-b^3+b^4}{1-b^2+b^4}. \qquad (2)$$

Sada jednostavnim dijeljenjem polinoma uočavamo:

$$(b^8+b^6+b^4+b^2+1):(b^4-b^3+b^2-b+1)$$
$$=b^4+b^3+b^2+b+1$$
$$(b^8+b^7+b^4+b+1):(b^4-b^2+1)$$
$$=b^4+b^3+b^2+b+1,$$

pa iz (1) i (2) slijedi:

$$A=\frac{b^8+b^6+b^4+b^2+1}{b^8+b^7+b^4+b+1}$$
$$=\frac{b^4-b^3+b^2-b+1}{b^4-b^2+1}=B,$$

što je i trebalo dokazati.

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3932. *Ako su α_1, α_2, α_3 nultočke polinoma x^3+2x^2+7x+1 koliko je $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$?*

Rješenje. Vièteove formule jednadžbe

$$x^3+2x^2+7x+1$$

glase
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-2$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=7$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-1.$$

Računamo:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)^3+3(\alpha_1+\alpha_2)^2\cdot\alpha_3$$
$$+3(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\alpha_3^2+\alpha_3^2$$
$$=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+3\alpha_1^2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2^2+3\alpha_2^2\alpha_3$$
$$+3\alpha_2\alpha_3^2+3\alpha_1^2\alpha_3+3\alpha_1\alpha_3^2+6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$$
$$+3a_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$
$$+3a_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_2)$$
$$+3a_2\alpha_3(\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1)$$
$$-3a_1\alpha_2\alpha_3$$
$$=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$$
$$+3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(a_1\alpha_2+a_1\alpha_3+a_2\alpha_3)$$
$$-3a_1\alpha_2\alpha_3.$$

Sada je:

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$$
$$=(-2)^3-3\cdot(-2)\cdot7+3\cdot(-1)=31.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3933. *Nađi sva cjelobrojna rješenja (x,y) jednadžbe $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.*

Rješenje. Uvedemo li supstituciju $x=w+1$, $y=v+1$, imamo

$$(w+1)^2v+(v+1)^2w=1$$
$$w^2v+2wv+v+wv^2+2wv+w=1$$
$$wv(w+v)+4wv+u+v=1$$
$$wv(w+v+4)+(w+v+4)=5$$
$$(w+v+4)(wv+1)=5.$$

Moguća su četiri slučaja:

$$\begin{cases} w+v+4=5\\ \underline{wv+1=1}\end{cases}$$
$$\begin{cases} w+v=1\\ \underline{wv=0}\end{cases}$$
$$\Longrightarrow w^2+w=0$$
$$w_1=0,\ w_2=1$$
$$v_1=1,\ v_2=0$$

$$\begin{cases} w+v+4=1 \\ \underline{wv+1=5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w+v=-3 \\ \underline{wv=4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow w^2+3w+4=0$$

$$w_1 \notin \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} w+v+4=-5 \\ \underline{wv+1=-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w+v=-9 \\ \underline{wv=-2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow w^2+9w-2=0$$

$$w \notin \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} w+v+4=-1 \\ \underline{wv+1=-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w+v=-5 \\ \underline{wv=-6} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow w^2+5w-6=0$$

$$w_1=-6,\ w_2=1$$

$$v_1=1,\ v_2=-6$$

Vraćanjem vrijednosti x i y dobivamo rješenja:

$$(x,y) \in \{(1,2),(2,1),(-5,2),(2,-5)\}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3934. *Nađi sve racionalne brojeve x za koje je*

$$\sqrt{8x^2-2x-3}$$

također racionalan broj.

Rješenje. Iz uvjeta zadatka vrijedi jednakost

$$8x^2-2x-3=r^2,$$

gdje je $r \in \mathbb{Q}$. Kvadratni trinom na lijevoj strani rastavimo na faktore, pa imamo

$$(4x-3)(2x+1)=r^2.$$

Ako je $x=-\frac{1}{2}$ jednakost očito vrijedi i $r=0$. Ako je $x \neq -\frac{1}{2}$ gornju jednakost možemo pisati u obliku:

$$\frac{4x-3}{2x+1} \cdot (2x+1)^2 = r^2.$$

Odavde slijedi:

$$\frac{4x-3}{2x+1}=t^2 \Longrightarrow x=\frac{3+t^2}{4-2t^2}, \quad t \in \mathbb{Q}.$$

Vidimo da je u ovom slučaju $r=\frac{5t}{2-t^2}$. Dakle, svi racionalni brojevi x koji zadovoljavaju uvjete zadatka su iz skupa:

$$\left\{\frac{3+t^2}{4-2t^2} : t \in \mathbb{Q}\right\} \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3935. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$. Dokaži nejednakost*

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} &a^5+b^5-a^2b^2(a+b) \\ &= (a^3-b^3)(a^2-b^2) \geqslant 0 \end{aligned}$$

tj.

$$a^5+b^5 \geqslant a^2b^2(a+b)$$

s jednakošću ako i samo ako je $a=b$.

Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a^5+b^5+ab} &\leqslant \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} \\ &= \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a+b)+abc^2} \\ &= \frac{c}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Lijeva strana nejednakosti nije veća od

$$\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a+b+c=1.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3936. *Izračunaj zbroj*

$$\sum_{k=1}^{16} \log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right).$$

Rješenje.

$$S=\sum_{k=1}^{16}\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left[\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right)\right.$$

$$+\log_2\left(\sqrt{\sin^2\left(2\pi-\frac{k\pi}{8}\right)+1}\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left(2\pi-\frac{k\pi}{8}\right)\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left[\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right)\right.$$

$$\left.+\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}+\sin\frac{k\pi}{8}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left[\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}+\sin\frac{k\pi}{8}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\log_2\left(\sin^2\frac{k\pi}{8}+1-\sin^2\frac{k\pi}{8}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\log_2 1$$

$$=8\cdot 0=0.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3937. *Unutar četverokuta $ABCD$ dana je točka M takva da je $ABMD$ paralelogram. Ako je $\sphericalangle CBM=\sphericalangle CDM$ dokaži da je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCM$.*

Rješenje. Neka je točka N takva da je

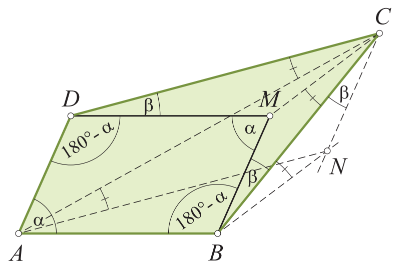
$$BN\|MC \quad \text{i} \quad NC\|BM.$$

Sa slike vidimo:

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCD&=360^\circ-\alpha-2(180^\circ-\alpha)-2\beta\\&=\alpha-2\beta\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}&\sphericalangle NCD=\sphericalangle BCD+\beta=\alpha-\beta\\\Longrightarrow\ &\sphericalangle ANC=180^\circ-(\alpha-\beta)\\&\qquad\quad=180^\circ-\alpha+\beta\\\Longrightarrow\ &\sphericalangle ANC=\sphericalangle ADC\\\Longrightarrow\ &AN\|CD.\end{aligned}$$



Kako je

$$\sphericalangle NCB=\sphericalangle CBM=\sphericalangle CDM=\sphericalangle NAB=\beta$$

to se točke A, B, N i C nalaze na istoj kružnici. Zato je

$$\sphericalangle ACD=\sphericalangle NAC=\sphericalangle NBC=\sphericalangle BCM$$

i tvrdnja je dokazana.

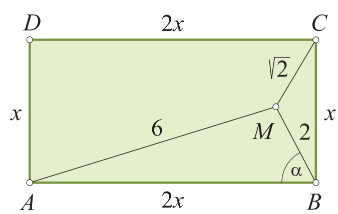
Duje Dodig (4), Zagreb

3938. *Točka M je unutar paralelograma $ABCD$ tako da je $|AM|=6$, $|BM|=2$, $|CM|=\sqrt{2}$. Odredi površinu pravokutnika $ABCD$ ako je $|AB|=2|AD|$.*

Rješenje. Označimo li $\sphericalangle ABM=\alpha$, kosinusov poučak za $\triangle BCM$ daje:

$$\begin{aligned}2&=4+x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot\cos(90^\circ-\alpha)\\&=4+x^2-4x\sin\alpha\end{aligned}$$

$$\sin\alpha=\frac{x^2+2}{4x}.$$



Kosinusov poučak za $\triangle ABM$ daje:

$$36 = 4x^2 + 4 - 8x\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{x^2-8}{2x}.$$

Sada je

$$\left(\frac{x^2+2}{4x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-8}{2x}\right)^2 = 1$$
$$\Longrightarrow\ 5x^4 - 76x^2 + 260 = 0.$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe slijedi:

1) $x^2 = 10 \implies x_1 = \sqrt{10}$

$$\Longrightarrow\ P_1 = \sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10} = 20\ \text{cm}^2$$

2) $x^2 = 5.2 \implies x_2 = \sqrt{5.2}$

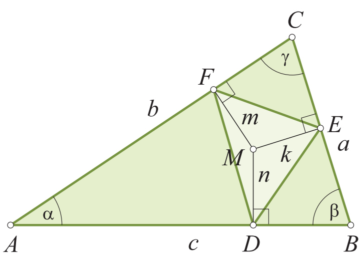
$$\Longrightarrow\ P_2 = \sqrt{5.2}\cdot 2\sqrt{5.2} = 10.4\ \text{cm}^2.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3939. *Neka je ABC šiljastokutni trokut i MD, ME, MF okomice iz točke M unutar trokuta na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, tim redom. Nađi omjer površina trokuta ABC i DEF ako je $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|MD| = n$, $|ME| = k$, $|MF| = m$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} P_{EDF} &= P_{MDE} + P_{MEF} + P_{MFD} \\ &= \frac{1}{2}nk\cdot\sin(180^\circ-\beta) + \frac{1}{2}mk \\ &\quad\cdot\sin(180^\circ-\gamma) + \frac{1}{2}mn\cdot\sin(180^\circ-\alpha) \\ &= \frac{1}{2}nk\sin\beta + \frac{1}{2}mk\sin\gamma + \frac{1}{2}mn\sin\alpha. \end{aligned}$$



Iz formule:

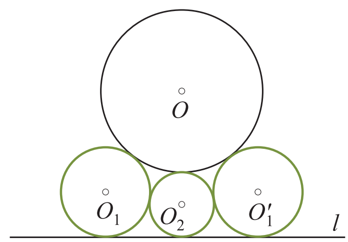
$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}ac\sin\beta \\ \Longrightarrow\ \sin\alpha &= \frac{2P_{ABC}\cdot a}{abc}, \\ \sin\beta &= \frac{2P_{ABC}\cdot b}{abc}, \\ \sin\gamma &= \frac{2P_{ABC}\cdot c}{abc}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo:

$$P_{EDF} = \frac{bnk\cdot P_{ABC}}{abc} + \frac{cmk\cdot P_{ABC}}{abc} + \frac{amn\cdot P_{ABC}}{abc}$$
$$\Longrightarrow (mna + nkb + mkc)\cdot P_{ABC} = abc\cdot P_{EDF}$$
$$\Longrightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{EDF}} = \frac{abc}{mna+nkb+mkc}.$$

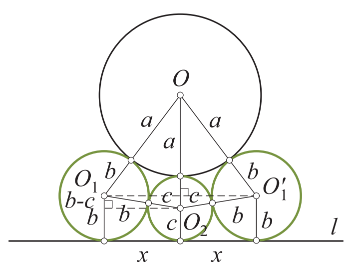
Duje Dodig (4), Zagreb

3940. *Tri kružnice $O_1(b)$, $O_2(c)$, $O_1'(b)$ tim redom dodiruju pravac l i kružnicu $O(a)$ izvana. Izrazi a u zavisnosti od b i c.*



Rješenje. Koristimo Pitagorin poučak:

$$\begin{aligned} x^2 + (b-c)^2 &= (b+c)^2 \\ x^2 &= (b+c)^2 - (b-c)^2 \\ &= 4bc \\ x &= 2\sqrt{bc}. \end{aligned}$$



Nadalje,

$$x^2+(a+2c-b)^2=(a+b)^2$$

$$a(b-c)=c^2 \implies a=\frac{c^2}{b-c}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3941. *Neka su* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ *tri međusobno nekolinearna vektora. Dokaži da su tri kuta koja zatvaraju simetrale kutova* $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ *ili svi šiljastokutni ili svi pravi ili svi tupokutni.*

Rješenje. Dva vektora zatvaraju šiljasti, pravi ili tupi kut ako i samo ako je njihov skalarni produkt pozitivan, jednak nuli ili negativan, tim redom. Neka su $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ jedinični vektori kolinearni s $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Tada su sume $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}+\vec{k}$ i $\vec{k}+\vec{\imath}$ redom kolinearne simetralama kutova $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ i $\sphericalangle COA$. Kako je $\vec{\imath}^{\,2}=\vec{\jmath}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$, umnožak $(\vec{\imath}+\vec{\jmath})(\vec{\jmath}+\vec{k})$ je jednak

$$(\vec{\imath}+\vec{\jmath})(\vec{\jmath}+\vec{k})=\vec{\jmath}^{\,2}+\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+\vec{\imath}\cdot\vec{k}$$
$$=1+\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+\vec{\imath}\cdot\vec{k}.$$

Simetrično dobivamo za umnoške $(\vec{\jmath}+\vec{k})(\vec{k}+\vec{\imath})$ i $(\vec{k}+\vec{\imath})(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$.

Dakle, sva tri umnoška su istog predznaka pa su im kutovi između simetrala ili šiljasti ili pravi ili tupi.

Ur.

3942. *Dokaži jednakost determinanti*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Lijevu stranu razvijmo po prvom stupcu:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b^3 \\ c & c^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^3 \\ c & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^3 \\ b & b^3 \end{vmatrix}$$
$$= bc^3-b^3c-ac^3+ca^3+ab^3-a^3b.$$

Slično računamo desnu stranu

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)\left(\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}\right)$$
$$=(a+b+c)(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)$$
$$=abc^2-ab^2c-a^2c^2+a^3c+a^2b^2-a^3b+b^2c^2$$
$$-b^3c-abc^2+a^2bc+ab^3-a^2b^2+bc^3$$
$$-b^2c^2-ac^3+a^2c^2+ab^2c-a^2bc$$
$$=a^3c-ac^3+ab^3-a^3b+bc^3-b^3c$$

i tvrdnja je dokazana.

Duje Dodig (4), Zagreb

3943. *Dokaži da zbroj*

$$\cos 8x+a_7\cos 7x+a_6\cos 6x+\ldots+a_1\cos x$$

ne može biti pozitivan za sve $x\in\mathbb{R}$.

Rješenje. Pretpostavimo da zbroj

$$\cos 8x+a_7\cos 7x+a_6\cos 6x+\ldots+a_1\cos x$$

poprima samo pozitivne vrijednosti za svaki $x\in\mathbb{R}$. Supstitucijom $x\mapsto x+\pi$ dobivamo izraz

$$\cos 8x-a_7\cos 7x+a_6\cos 6x-\ldots-a_1\cos x$$

koji također poprima samo pozitivne vrijednosti za svaki x. Zbrajanjem ovih izraza slijedi da i zbroj

$$\cos 8x+a_6\cos 6x+a_4\cos 4x+a_2\cos 2x$$

isto tako prima pozitivne vrijednosti za svaki x. Uvedimo sad supstituciju $x\mapsto x+\dfrac{\pi}{2}$

$$\cos 8x-a_6\cos 6x+a_4\cos 4x-a_2\cos 2x.$$

Ponovo zbrojimo zadnja dva izraza pa je

$$\cos 8x+a_4\cos 4x,$$

koji je također uvijek pozitivan. Na kraju uvedemo supstituciju $x\mapsto x+\dfrac{\pi}{4}$, pa dobivamo

$$\cos 8x-a_4\cos 4x.$$

Zbrajanjem slijedi da je $\cos 8x$ pozitivan za svaki realan broj x. Ali, npr. za $x=\dfrac{\pi}{8}$ je $\cos 8x=-1$.

Ovo je proturječje s početnom pretpostavkom i tvrdnja je dokazana.

Duje Dodig (4), Zagreb

3944. *Odredi zbroj*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}.$$

Rješenje. Zbrojimo prvo po n.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{m+1}$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{(m+n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n+2)!}\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{m+1}\cdot\frac{0!}{(m+1)!}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}=\frac{\pi}{6}.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 522. *Ivan želi izračunati koliko pločica treba kupiti za popločavanje njihovog vanjskog stepeništa koje ima 15 stepenica dugačkih 60 cm i širokih 20 cm. Gazišta su visoka 18 cm. Treba popločiti i cijelu jednu bočnu stranu stepeništa. Njegovi roditelji žele da to lijepo izgleda te da i stepenice i bočna strana budu napravljeni tako da vertikalne i horizontalne fuge budu svuda na istim pravcima. Pločice su dugačke 30 i široke 20 cm. Koliko ih treba kupiti i koliko će posto biti otpada?*

Rješenje.

$n=15$

$a=30$ cm

$b=20$ cm

$d=60$ cm

$š=20$ cm

$\underline{h=18 \text{ cm}}$

$n=?$

$\eta=?$

$$A_{1.\ \text{pločice}}=ab=30\text{ cm}\cdot 20\text{ cm}$$
$$=600\text{ cm}^2$$

Gazište jedne stepenice se može pokriti s dvije pločice i nema otpada. Za 15 stepenica treba 30 pločica.

$$A_{\text{stepenica}}=30\cdot 600\text{ cm}^2=18\,000\text{ cm}^2$$
$$=1.8\text{ m}^2.$$

Čela treba pokriti s 30 pločica, ali će se morati odrezati 2 cm što će biti 10 posto otpada.

$$A_{\text{čela}}=0.9\cdot 1.8\text{ m}^2=1.62\text{ m}^2$$
$$A_{1.\ \text{otpad}}=0.18\text{ m}^2.$$

Bočni dio najviše stepenice ima duljinu 20 cm i širinu 18 cm. Za predzadnju stepenicu trebaju dva takva dijela, . . . , za prvu 15 dijelova. Ukupno treba

$$n=1+2+\ldots+15=120\text{ pločica}$$
$$A_1=20\text{ cm}\cdot 18\text{ cm}=360\text{ cm}^2$$
$$A_{\text{bočnog dijela}}=120\cdot 360\text{ cm}^2=43\,200\text{ cm}^2$$
$$=4.32\text{ m}^2$$
$$A_{2.\ \text{otpad}}=120\cdot 240\text{ cm}^2=28\,800\text{ cm}^2$$
$$=2.88\text{ m}^2$$
$$A_{\text{korisno}}=A_{\text{stepenica}}+A_{\text{čela}}+A_{\text{bočnog dijela}}$$
$$=7.74\text{ m}^2$$
$$A_{\text{otpad}}=A_{1.\ \text{otpad}}+A_{2.\ \text{otpad}}=3.06\text{ m}^2$$
$$A_{\text{ukupno}}=10.8\text{ m}^2$$
$$\eta=\frac{A_{\text{korisno}}}{A_{\text{ukupno}}}=0.717=71.7\ \%.$$

Otpada će biti 28.3 posto.

Lara Džubur Krajinović (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 523. *Loptica ispuštena s visine od pola metra nakon četvrtog odskoka odskoči na visinu 30 cm. Na koju je visinu odskočila nakon prvog odskoka?*

Rješenje.

$h_0=0.5$ m

$\underline{h_4=30\text{ cm}=0.3\text{ m}}$

$h_1 = ?$

$E_{gp1} = \eta \cdot m \cdot g \cdot h_0$

$E_{gp2} = \eta \cdot E_{gp1} = \eta^2 \cdot m \cdot g \cdot h_0$

$E_{gp3} = \eta \cdot E_{gp2} = \eta^3 \cdot m \cdot g \cdot h_0$

$E_{gp4} = \eta \cdot E_{gp3} = \eta^4 \cdot m \cdot g \cdot h_0$

$m \cdot g \cdot h_4 = \eta^4 \cdot m \cdot g \cdot h_0$

$$\eta^4 = \frac{h_4}{h_0} = \frac{0.3\ \text{m}}{0.5\ \text{m}} = 0.6$$

$\eta = 0.88$

$h_1 = 0.88 \cdot h_0 = 0.44$ m.

Ana Lakoš (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 524. *Matea ima strujni krug u obliku pravokutnika kojem su na duljim stranicama otpornici od 25 Ω, a na kraćima su otpornici od 5 Ω. Na jednu je dijagonalu spojila otpornik kojem nije znala otpor i krajeve te dijagonale je spojila na izvor struje napona 12 V. Struja je u glavnom vodiču iznosila 2 A. Koliko iznosi nepoznati otpor?*

Rješenje.

$R_1 = R_2 = 25\ \Omega$

$R_3 = R_4 = 5\ \Omega$

$I = 2$ A

$\underline{U = 12\ \text{V}}$

$R_5 = ?$

Ovako spojeni otpornici čine paralelu s tri grane, na dvije su serijski spojeni otpori od 25 i 5 oma, a na trećoj je nepoznati otpor. Ukupni otpor te paralele je R.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \text{A}} = 6\ \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1 + R_3} - \frac{1}{R_2 + R_4} = \frac{1}{6\ \Omega} - \frac{1}{30\ \Omega} - \frac{1}{30\ \Omega} = \frac{3}{30\ \Omega} = \frac{1}{10\ \Omega}$$

$R_5 = 10\ \Omega$.

Lara Džubur Krajinović (8), Zagreb

OŠ – 525. *Astrid treba 12 minuta da brzim hodom stigne do škole. Kad je s prijateljicom hodaju sporije jer moraju provjeriti jesu li dobro napisale zadaću i tada im je brzina manja za 0.4 m u sekundi pa u školu stignu 6 minuta kasnije. Koliko je njena škola udaljena od kuće?*

Rješenje.

$t_1 = 12\ \text{min} = 720\ \text{s}$

$v_2 = v_1 - 0.4\ \text{m/s}$

$\underline{t_2 = t_1 + 6\ \text{min} = 18\ \text{min} = 1080\ \text{s}}$

$s = ?$

$s_1 = s_2$

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$

$v_1 \cdot 720\ \text{s} = (v_1 - 0.4\ \text{m/s}) \cdot 1080\ \text{s}$

$v_1 \cdot 2 = (v_1 - 0.4\ \text{m/s}) \cdot 3 = 3v_1 - 1.2\ \text{m/s}$

$v_1 = 1.2\ \text{m/s}$

$s = v_1 \cdot t_1 = 1.2\ \text{m/s} \cdot 720\ \text{s} = 864\ \text{m}.$

Ana Lakoš (8), Zagreb

1819. *Odredi udio vrijednosti bakra u izradi kovanice od 10 eurocenti. Masa kovanice je 4.1 g, legura za izradu (nordijsko zlato) sadrži 89 % bakra, a cijena bakra je 7.6 eura/kg.*

Rješenje. Od 4.1 grama težine kovanice na bakar otpada $0.89 \cdot 4.1 = 3.649$ grama. Cijena bakra u kovanici (p) je

$$p = \frac{3.649}{1000} \cdot 7.6 = 0.0277\ \text{eura} = 2.77\ \text{centi}.$$

S obzirom da je nominalna vrijednost 10 centi, udio vrijednosti bakra je

$$w = \frac{2.77}{10} = 0.277 = 27.7\ \%.$$

Ur.

1820. *Odredi razliku brzine zvuka u zraku na temperaturi 30 °C i 0 °C. Zrak je približno dvoatomni idealni plin srednje molekulske mase 29 g/mol.*

Rješenje. Brzina zvuka u idealnom plinu računa se po formuli

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}},$$

gdje je $\gamma = 1.4$ koeficijent adijabatske ekspanzije dvoatomnog plina, $R = 8.314$ J/molK opća plinska konstanta, T apsolutna temperatura i $M = 0.029\ \mathrm{kg/mol}$ molekulska masa. Sada je:

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.314 \cdot 303}{0.029}} - \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.314 \cdot 273}{0.029}}\\ &= 348.74 - 331.03 = 17.71\ \mathrm{m/s}.\end{aligned}$$

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1821. *Halleyev komet ima ekscentričnu putanju koja je najbliže Suncu (perihel) 0.585 a.j., a najdalje od Sunca (afel) 35.082 a.j. Koristeći Keplerove zakone i definiciju a.j. kao duljinu velike poluosi putanje Zemlje oko Sunca odredi ophodno vrijeme, ekscentricitet, najveću i najmanju brzinu kometa u odnosu na Sunce, te brzinu kad se komet nalazi 1 a.j. udaljen od Sunca.*

Rješenje. Duljina velike poluosi putanje a je

$$\begin{aligned}a &= \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{0.585 + 35.082}{2}\\ &= 17.8335\ \text{a.j.}\end{aligned}$$

Iz trećeg Keplerovog zakona i ophodnog vremena Zemlje oko Sunca (1 godina) slijedi ophodno vrijeme kometa:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} = 1\ \text{god}^2/\text{a.j.}^3$$

$$T = \sqrt{17.8335^3} = 75.31\ \text{god.}$$

Numerički ekscentricitet putanje je

$$e = 1 - \frac{r_{\min}}{a} = \frac{r_{\max}}{a} - 1 = 0.9672.$$

Najveća brzina (u perihelu) je

$$v_{\max} = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}} = 11.523\ \text{a.j./god},$$

a najmanja (u afelu)

$$v_{\min} = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}} = 0.19213\ \text{a.j./god}.$$

Brzina na udaljenosti 1 a.j. od Sunca je

$$\begin{aligned}v(r=1) &= \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{2a-r}{r}}\\ &= \frac{2a\pi}{T}\sqrt{2a-1}\\ &= 8.7603\ \text{a.j./god}.\end{aligned}$$

U SI jedinicama,

$$1\ \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} = \frac{149\,600\,000\ \text{km}}{365.25 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s}} = 4.7405\ \text{km/s}.$$

Ur.

1822. *Niz jednoliku kosinu nagiba 8° giba se automobil. Kolika je najveća akceleracija kočenja za koju gume neće proklinznuti, ako je koeficijent proklizavanja gume i podloge (koeficijent statičkog trenja) jednak 0.56?*

Rješenje. Ubrzanje niz kosinu (bez kočenja) je

$$a = g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Sila trenja ne može premašiti iznos drugog člana, pa akceleracija mora biti

$$\begin{aligned}&a \geq 9.81 \cdot \sin 8^\circ - 0.56 \cdot 9.81 \cdot \cos 8^\circ,\\ &a \geq -4.07\ \mathrm{m/s^2}.\end{aligned}$$

Negativan rezultat znači jednoliko usporavanje, pa je najveća (po iznosu) akceleracija kočenja $-a = 4.07\ \mathrm{m/s^2}$.

Duje Dodig (3), Zagreb

1823. *Koliku bi masu imalo nebesko tijelo oblika kugle, ako je ubrzanje sile teže na površini $9.81\ m/s^2$, a prosječna mu je gustoća $20\ kg/dm^3$? Koliki je to postotak mase Zemlje, ako ona iznosi $6 \cdot 10^{24}\ kg$?*

Rješenje. Opći zakon gravitacije daje za ubrzanje na površini

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G\rho \cdot 4R^3\pi}{3R^2} = \frac{4}{3}\rho\pi G R.$$

Odatle izračunamo radijus,

$$R = \frac{3 \cdot 9.81}{4 \cdot 20\,000 \cdot \pi \cdot 6.674} \cdot 10^{11} = 1755\ \text{km}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}m &= \rho V = 20\,000 \cdot \frac{4}{3}(1\,755\,000)^3\pi\\ &= 0.4524 \cdot 10^{24}\ \text{kg},\end{aligned}$$

što iznosi 7.54 % mase Zemlje.

Duje Dodig (3), Zagreb

1824. *Dva ohmska trošila spojena paralelno u strujni krug troše snagu 70 W i 30 W. Koliku će snagu trošiti svako trošilo, ako ih spojimo serijski na isti naponski izvor?*

Rješenje. Iz paralelnog spoja izrazimo otpor oba trošila,

$$P_{P1} = \frac{U^2}{R_1}, \quad P_{P2} = \frac{U^2}{R_2},$$
$$R_1 = \frac{U^2}{70}, \quad R_2 = \frac{U^2}{30}.$$

Uvrstimo u izraz za snagu pri serijskom spoju:

$$P_{S1} = I_S^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1+R_2)^2} = 70 \cdot \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2$$
$$= 70\left(\frac{30}{30+70}\right)^2 = 70 \cdot \frac{9}{100} = 6.3 \text{ W}.$$

Analogno je:

$$P_{S2} = I_S^2 R_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1+R_2)^2} = 30 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$$
$$= 30\left(\frac{70}{30+70}\right)^2 = 30 \cdot \frac{49}{100} = 14.7 \text{ W}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

1825. *Radioaktivni uzorak sadrži 44 μg (mikrograma) ^{60}Co. Odredite:*

a) Koliko je atoma ^{60}Co u uzorku?

b) Koliko će se atoma ^{60}Co raspasti u deset sekundi?

Vrijeme poluživota ^{60}Co iznosi 1925.1 dan.

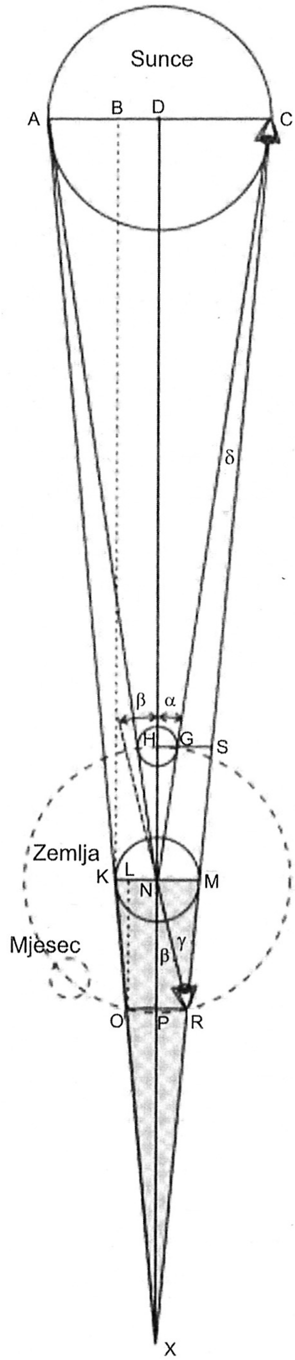
Rješenje. Broj atoma odredimo iz množine n i Avogadrovog broja N_A:

$$N = nN_A = \frac{m}{M}N_A$$
$$= \frac{44 \cdot 10^{-6}}{60} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$$
$$= 4.416 \cdot 10^{17}.$$

Broj raspada u 10 sekundi je umnožak aktivnosti A i duljine intervala Δt (za kratki interval, $\Delta t \ll T$):

$$N(10) = A\Delta t = \frac{N}{T}\ln 2 \cdot \Delta t$$
$$= 1.84 \cdot 10^9 \cdot 10 = 1.84 \cdot 10^{10}.$$

Ur.



Aristarhov dijagram pomrčina
(Iz knjige V. Vujnović, Sa svemirom na Ti.)