# Školsko natjecanje iz matematike, 26. siječnja 2024. g.

Zadatke za školsko natjecanje za A varijantu i B varijantu priredilo je Državno povjerenstvo.

## Zadatci za A varijantu

### I. razred

**1.** Koji je broj veći

$$A = 2022 \cdot (2024^2 - 2024 + 1) \quad \text{ili} \quad B = 2024^3 - 3 \cdot 2024^2 + 3 \cdot 2024?$$

**2.** Neka su $a$, $b$, $c$, $d$ međusobno različiti cijeli brojevi takvi da vrijedi

$$(a - 2024)(b - 2024)(c - 2024)(d - 2024) = 9.$$

Odredi $a + b + c + d$.

**3.** Farmer Ivan na svojoj farmi ima kokoši, svinje i ovce. Njegove životinje imaju ukupno 46 glava i 124 noge. Kad bi udvostručio broj kokoši i utrostručio broj ovaca na farmi, uz isti broj svinja, ukupan broj nogu svih životinja na farmi bio bi 232. Koliko bi u tome slučaju bilo glava?

**4.** Odredi najmanji prirodni broj kojemu je zbroj znamenaka djeljiv sa 7 te ima svojstvo da je zbroj znamenaka njegova sljedbenika također djeljiv sa 7.

**5.** Neka je $ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu $C$. Neka je $P$ točka takva da je kut $\sphericalangle ABP$ pravi, da vrijedi $|BP| = |BC|$ te da su točke $P$ i $C$ na suprotnim stranama pravca $AB$. Dokaži da je pravac $CP$ okomit na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$.

**6.** Dan je trokut $ABC$ površine 1. Točka $D$ polovište je dužine $\overline{BC}$, točka $E$ polovište je dužine $\overline{AD}$, točka $F$ polovište je dužine $\overline{BE}$ te je točka $G$ polovište dužine $\overline{CF}$. Odredi površinu trokuta $EFG$.

**7.** Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 900?

### II. razred

**1.** Odredi sve realne brojeve $k$ za koje se tjeme parabole s jednadžbom

$$y = 4x^2 - 4(k + 1)x + k^2 + 4k - 1$$

nalazi na paraboli čija je jednadžba $y = 4x^2 - 2x - 8$.

**2.** Odredi sve uređene parove cijelih brojeva $(x, y)$ takve da je

$$x^2 + y^2 = 10(x + y).$$

**3.** Za realne brojeve $a$ i $b$ jednadžba $x^2 + ax + b = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja (ne nužno različita). Dokaži da jednadžba $x^2 + 5ax + (6a^2 + b) = 0$ također ima dva cjelobrojna rješenja.

**4.** Riješi nejednadžbu

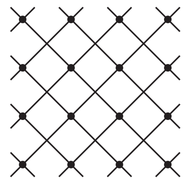
$$\frac{(1 + x)^2}{1 + y} \leq 1 + \frac{x^2}{y}.$$

Za koje se parove $(x, y)$ postiže jednakost?

**5.** Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice $k$, a točka $O$ njezino središte. Neka je $C$ točka izvan kružnice $k$ na simetrali dužine $\overline{AB}$. Dužina $\overline{AC}$ siječe kružnicu $k$ u točki $D$. Ako je $|AB| = 2$ i $|CD| = 1$, odredi $|OC|$.

**6.** Kažemo da je prirodni broj $n \geq 2$ *tajanstven* ako za svaki njegov djelitelj $d$ veći od 1 vrijedi $d^2 + n \mid n^2 + d$. Odredi sve tajanstvene prirodne brojeve.

**7.** Na slici je prikazan skup od 16 točaka raspoređenih na 10 istaknutih pravaca. Za dvije točke toga skupa kažemo da su *vezane* ako pripadaju istom istaknutom pravcu.



a) Koliko je najviše točaka promatranoga skupa moguće odabrati tako da među njima ne bude vezanih točaka?

b) Odredi broj podskupova promatranoga skupa točaka bez vezanih točaka s najvećim mogućim brojem elemenata.

## III. razred

**1.** Odredi sva realna rješenja nejednadžbe

$$\log_9 x^2 - \log_3(x+8) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1.$$

**2.** Ako je $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2} = \dfrac{4}{9}$, odredi $\sin x \cos x$.

**3.** Dan je trokut $ABC$ površine 5. Ako za duljine stranica toga trokuta vrijedi jednakost $|AB|^2 + |AC|^2 = 17 + |BC|^2$, odredi tangens kuta $\sphericalangle CAB$.

**4.** Na školskome natjecanju iz matematike sudjelovalo je 1200 učenika. Broj bodova koje učenik može ostvariti cijeli je broj između 0 i 50. Računalnom greškom svim je učenicima koji su ostvarili 3 ili manje bodova zapisan rezultat 0 bodova, a svim učenicima koji su ostvarili 47 ili više bodova zapisano je 50 bodova. Zbog te greške prosječni rezultat na natjecanju prema podatcima u računalu veći je za 0.1 od stvarnog. Dokaži da postoje brojevi $a$ i $b$ takvi da se broj učenika koji su ostvarili točno $a$ bodova i broj učenika koji su ostvarili točno $b$ bodova razlikuje za najmanje 20.

**5.** Odredi sve prirodne brojeve $n$ za koje je vrijednost izraza

$$\frac{n^2 - 22 + \log_2 n}{n-5}$$

cijeli broj.

**6.** Kružnice $k_1$, $k_2$ i $k_3$ sa središtima $S_1$, $S_2$, $S_3$ i polumjerima duljina $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, redom međusobno se dodiruju izvana tako da je $A$ diralište kružnica $k_1$ i $k_2$, $B$ diralište kružnica $k_2$ i $k_3$ te $C$ diralište kružnica $k_3$ i $k_1$. Odredi površinu trokuta $ABC$.

**7.** Odredi proste brojeve $p, q, r$ i prirodni broj $n$ za koje vrijedi

$$p^2 = q^2 + r^n.$$

Naći sva rješenja.

## IV. razred

**1.** Djevojke Marija i Magdalena igraju šahovski meč u tri partije. Vjerojatnosti da Marija u pojedinoj partiji pobijedi, izgubi ili da partija završi remijem međusobno su jednake. Ukupna pobjednica meča djevojka je koja ostvari više pobjeda (u tri partije), a ako budu imale jednak broj pobjeda, meč završava neodlučenim rezultatom. Kolika je vjerojatnost da Marija bude ukupna pobjednica meča?

**2.** Odredi sve uređene parove $(p, n)$, pri čemu je $p$ prost, a $n$ prirodan broj za koje vrijedi

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = 2801.$$

**3.** Neka je $(a_n)$ niz definiran s $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi $a_{2024} \geq \sqrt{2024!}$.

**4.** Odredi sve trojke prirodnih brojeva $(m, n, k)$ za koje vrijedi

$$D(m, 20) = n, \quad D(n, 15) = k \quad \text{i} \quad D(m, k) = 5,$$

pri čemu je $D(a, b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva $a$ i $b$.

**5.** Neka su $z_1$, $z_2$ i $z_3$ kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ te $4z_3 = 3(z_1 + z_2)$. Koliko je $|z_1 - z_2|$?

**6.** Pravokutni trokuti $ABC$ i $ABD$ imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$, a katete $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ im se sijeku u točki $E$. Neka je $F$ ortogonalna projekcija točke $E$ na pravac $AB$. Dokaži da je $FE$ simetrala kuta $\sphericalangle CFD$.

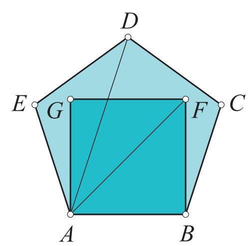
**7.** Niz znamenaka sastoji se od jedinica i nula. Među bilo kojih 200 uzastopnih znamenaka jednako je jedinica i nula, a među bilo koje 202 uzastopne znamenke broj se jedinica i broj nula razlikuju. Koja je najveća moguća duljina takvoga niza?

## Zadatci za B varijantu

### I. razred

**1.** Neka je $x$ najveći zajednički djelitelj brojeva $2^{2023}$ i $2^{2024}$, a $y$ njihov najmanji zajednički višekratnik. Izračunajte $3y - x - 2 \cdot \dfrac{x^2}{y}$ i rezultat zapišite u obliku potencije s bazom 2.

**2.** Na slici su prikazani pravilni peterokut $ABCDE$ i kvadrat $ABFG$. Odredite mjeru kuta $FAD$.




**3.** Tea je dobivenu novčanu nagradu odlučila podijeliti na četiri dijela. Jedan je dio namijenila za kupnju novog mobitela, drugi dio za obnovu odjeće, treći za ljetovanje, a četvrti za kupnju poklona prijateljici. Iznos predviđen za kupnju novog mobitela jednak je 26 % ukupne novčane nagrade. Nadalje, dio namijenjen kupnji mobitela iznosi 80 % dijela koji je Tea namijenila za obnovu odjeće, a jednak je i 65 % dijela koji je namijenila za ljetovanje. Koliki postotak dobivene novčane nagrade Tea planira izdvojiti za kupnju poklona prijateljici?

**4.** Odredite najmanji prirodni broj $n$ za koji je broj $2565 \cdot n$ kvadrat nekog prirodnog broja.

**5.** Za vrijeme Francuske revolucije postojala je ideja da se dan (period od 24 sata) podijeli na 10 sati, sat na 100 minuta. Iako ova ideja nije zaživjela, u Markovoj školi ponekad koriste takav "decimalni sat". Kad je Marko počeo rješavati zadatak na "decimalnom satu" su bila točno 4.5 sata. Kad je završio zadatak "obični sat" je pokazivao točno 11 h 15 min. Petra je isti zadatak započela rješavati točno u podne po "običnom vremenu", a završila u 5.2 sati po "decimalnom". Tko je od njih dvoje brže riješio zadatak i za koliko brže po "običnom vremenu"? (Napomena: vrijeme se kod oba sata mjeri od ponoći.)

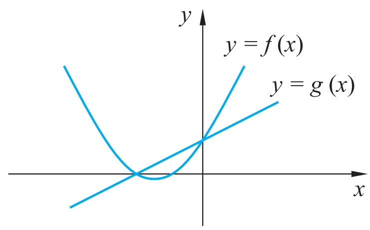
**6.** Zbroj razlomaka $\frac{12}{23}+\frac{1212}{2323}+\frac{121212}{232323}+\ldots+\frac{1212\ldots12}{2323\ldots23}$ iznosi 528. Broj znamenaka 1 i 2 u brojniku te broj znamenaka 2 i 3 u nazivniku tih razlomaka povećava se za jedan. Koliko puta se znamenka 2 pojavljuje u zadnjem razlomku?

**7.** U pravokutnom trokutu $ABC$ pravi je kut u vrhu $C$, $|AB| = 8$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Trokut $ABC$ se rotacijom oko vrha $C$ za $30°$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata preslika u trokut $A'B'C$. Koliko iznosi površina zajedničkog dijela trokuta $ABC$ i $A'B'C$?

## II. razred

**1.** Odredite vrijednost izraza $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ ako su $x_1$ i $x_2$ rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2+3=6x$.

**2.** Grafovi funkcija $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ i $g(x)=\frac{c}{4}x+2$ prikazani su na slici. Točke u kojima se grafovi sijeku nalaze se na koordinatnim osima. Odredite realne brojeve $a$ i $c$.




**3.** Riješite jednadžbu

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2024.$$

**4.** Na nekom natjecanju iz matematike rješava se $n$ zadataka, $10 < n < 20$. Za svaki točno riješeni zadatak natjecatelj dobiva 5 bodova, a za svaki neriješeni ili netočno riješen zadatak gubi 3 boda. Ako je Sebastijan imao ukupno 0 bodova, koliko je zadataka riješio točno? Koliko je bilo ukupno zadataka?

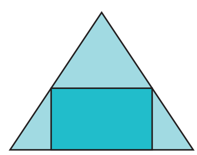
**5.** Ana ide u posjet baki i želi joj odnijeti nekoliko komada voća u košarici. Na raspolaganju ima 6 banana, 5 jabuka i 4 breskve.

a) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako košarica ne smije biti prazna?

b) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako od svake vrste voća mora biti barem jedan komad?

(**Napomena**: nije važan raspored voća, već samo koje je voće u košarici i koliko komada toga voća.)

**6.** U jednakokračni trokut, duljine osnovice 16 cm i visine na osnovicu duljine 12 cm upisan je pravokutnik kojemu su dva vrha na osnovici, a preostala dva vrha na krakovima zadanog trokuta. Odredite duljine stranica upisanog pravokutnika tako da osjenčana površina bude minimalna. Koliko iznosi ta minimalna površina?



**7.** Neka je zadana funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2+4x+4}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}.$$

Koliko je $f(4)+f(8)+f(12)+\cdots+f(2024)$?

## III. razred

**1.** Riješite jednadžbu $5\cdot 0.16^x+8\cdot 0.4^x=4$.

**2.** Neka su $a$ i $b$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $\frac{\log a}{3}=\frac{\log b}{2}$ i $\log(ab)=5$. Koliko je $\sqrt[3]{a}+b^{\frac{1}{2}}$?

**3.** Zadana je funkcija $f(x) = A\sin\left(Bx + \frac{7\pi}{10}\right) + D$, pri čemu su $A$, $B$ i $D$ pozitivni realni brojevi. Točka $M\left(\frac{2\pi}{3}, -8\right)$ je jedina točka minimuma, a točka $N\left(\frac{3\pi}{2}, 12\right)$ jedina točka maksimuma funkcije $f$ u intervalu $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Odredite $f\left(\frac{203\pi}{12}\right)$.

**4.** Odredite sve realne brojeve $t$ za koje je jedno rješenje jednadžbe $x^2 + 2024 = tx$ prost broj, a drugo složen prirodni broj.

**5.** Prikazan je zapis pisanoga zbrajanja četiriju troznamenkastih brojeva sa znamenkama $a$ i $b$. O kojim se troznamenkastim brojevima radi?

$$\begin{array}{cccc} & a & a & a \\ & a & a & b \\ & a & b & b \\ + & b & b & b \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

**6.** Paralelogram s dijagonalama duljina 20 cm i 30 cm koje se sijeku pod kutom mjere $60^\circ$ baza je uspravne prizme obujma $1500\sqrt{3}$ cm$^3$. Koliko je oplošje te prizme?

**7.** Iz skupa $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ -1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 5\}$ na slučajan se način bira uređeni par $(x, y)$. Kolika je vjerojatnost da za članove $x$ i $y$ toga uređenog para vrijedi $x + y > 2$ i $|x - y| < 2$?

## IV. razred

**1.** Riješite jednadžbu $\dfrac{(n+2)! - (n+1)! - n!}{n!} = 2024$.

**2.** Odredite sve realne brojeve $x$ za koje su brojevi $\log(\sin x)$, $\log(\sin x + 1)$ i $\log(3\sin x + 1)$, tim redom uzastopni članovi aritmetičkog niza.

**3.** Vrhovi četverokuta su točke u kompleksnoj ravnini pridružene rješenjima jednadžbe

$$(z^2 + 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

u skupu $\mathbb{C}$. Odredite koordinate vrhova i površinu danog četverokuta.

**4.** Odredite sve realne brojeve $k$ za koje kružnice zadane jednadžbama $(x+1)^2 + y^2 = 9$ i $(x - k)^2 + (y - 2k)^2 = 4$ imaju samo jednu zajedničku točku.

**5.** Profesor matematike dao je učenicima za domaću zadatću deset zadataka i rekao da će među njima odabrati dva zadataka za sljedeći test. Koliko najmanje zadataka Luka treba riješiti od zadanih deset da bi s vjerojatnošću većom od $\frac{7}{9}$ bio siguran da će se među odabranim zadatcima pojaviti barem jedan zadatak od onih koje je riješio?

**6.** Neka je $n$ prirodni broj. U razvoju binoma $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ omjer binomnih koeficijenata petog i šestog člana je $1 : 404$. Koliko članova u tomu razvoju sadrži potenciju broja $x$ kojoj je eksponent prirodan broj?

**7.** Osnovka uspravne četverostrane piramide visine duljine $h$ je pravokutnik sa stranicama duljina $a$ i $b$. Duljina svih bočnih bridova iznosi $\frac{\sqrt{94}}{2}$ cm, a obujam piramide je 9 cm$^3$. Ako su brojevi $a$, $b$ i $h$ redom uzastopna tri člana rastućeg geometrijskog niza, odredite $a$ i $b$.

*Matko Ljulj*