Rješenje nagradnog natječaja br. 244

Definiran je niz $(a_n)_{n\geq 0}$ s $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ i

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0.$$

Dokaži da n dijeli a_n za svaki $n \geq 1$.

Rješenje. Iz pretpostavke dobivamo: $a_4 = 12$, $a_5 = 25$, $a_6 = 48$. Primijetimo

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = 1, \quad \frac{a_3}{3} = 2, \quad \frac{a_4}{4} = 3, \quad \frac{a_5}{5} = 5, \quad \frac{a_6}{6} = 8$$

odakle pretpostavljamo da su ovo su ovo članovi Fibonaccijevog niza. Dovoljno je pokazati $a_n = nF_n$ za $n \geq 1$. Ovo ćemo dokazati metodom matematičke indukcije.

Za $n = 1$, 2, 3, 4 tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da vrijedi za n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Tada je:

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - n(F_{n+2} - F_{n+1}) \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{n+2} - (n+2)(F_{n+3} - F_{n+2}) \\
&= (n+4)(F_{n+3} + F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4}.
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 1$.

Knjigom Vladis Vujnović, *Sa svemirom na Ti*, Izvori, Zagreb, 2023., nagrađeni su učenici:

1. *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb;
2. *Vid Horvat* (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 1/293

a) Iz matematike: *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3931–3940, 3942, 3943.

b) Iz fizike: *Lara Đubur Krajinović* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 522–525; *Ana Lakoš* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 522–525; *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 1820, 1822–1824.

Nagradni natječaj br. 246

U kružnici polumjera R, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su okomite tetive. Dokaži

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2.$$

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadatci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara i fizičara, novosti iz znanosti, prilozi o državnoj maturi i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje ili pošaljite slike crtane računalom (eps, jpg, png i sl.).

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj zanimljivoj temi, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original, a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na početku lista.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto. **Rješenja se mogu slati i e-poštom na adresu glavnog urednika:** `zeljko.hanjs@math.hr`

Matematičko-fizički list na Facebooku

Možete pronaći MFL i na Facebooku na stranici

`https://www.facebook.com/MatFizL`

Uz razno-razne podatke o MFL-u moći ćete naći i nove zadatke za rješavanje.