

## Usporedba Montessori i singapurskog modela početne nastave matematike

Ljerka Jukić Matić\*

[ljukic@mathos.hr](mailto:ljukic@mathos.hr)

<https://orcid.org/0000-0002-8947-6333>

Sanela Mužar Horvat\*\*

[smuzarhorvat@unisb.hr](mailto:smuzarhorvat@unisb.hr)

<https://orcid.org/0000-0002-4949-1002>

Branko Bognar\*\*\*

[bbognar@ffos.hr](mailto:bbognar@ffos.hr)

<https://orcid.org/0000-0002-8037-6555>

<https://doi.org/10.31192/np.22.1.12>

UDK: 37.091.3:51Montessori

37.091.3:51(592.3)

Pregledni članak / Review

Primljeno: 13. rujna 2023.

Prihvaćeno: 21. prosinca 2023.

*U radu se uspoređuju model Montessori i singapurski model početne nastave matematike. Kao elementi usporedbe uzeta su teorijska polazišta, nastavne metode, nastavni materijali, matematički zadatci, uloga učitelja i rezultati istraživanja. Singapurski je model usmjeren na poučavanje učenika koje je dosljedno, pragmatično i prilagođeno matematičkim ciljevima te rješavanju problemskih zadataka, dok u modelu Montessori prevladava samostalna aktivnost i igra uz korištenje specifičnih didaktičkih materijala. Oba modela pomažu učenicima u učenju matematičkih sadržaja na smislen, privlačan, zabavan i interaktivan način, a odlikuju ih bolji obrazovni rezultati učenika u nastavi matematike u odnosu na tradicionalan pristup. Zajedničke sastavnice ovih modela nastave matematike su poštivanje učenikove individualnosti, promjene uloge učenika i učitelja u učenju i poučavanju, korištenje odgovarajućih didaktičkih materijala u procesu učenja. S obzirom na uočene prednosti oba modela imaju svoje mjesto u početnoj nastavi matematike.*

**Ključne riječi:** *model Montessori nastave matematike, nastavni modeli, početna nastava matematike, singapurski model nastave matematike.*

\* Izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek.

\*\* Dr. sc. Sanela Mužar Horvat, Sveučilište u Slavanskom Brodu, Odjel društveno-humanističkih znanosti, Gundulićeva 20, HR-35000 Slavonski Brod.

\*\*\* Prof. dr. sc. Branko Bognar, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Filozofski fakultet, Odsjek za pedagogiju, Lorenza Jäger 9, HR-31000 Osijek.

## Uvod

U međunarodnom istraživanju TIMSS utvrđeno je da u Hrvatskoj već u četvrtom razredu osnovne škole više od trećine učenika ne voli učiti matematiku što:

»nedvojbeno utječe na njihove rezultate u ovome području. Taj postotak ukazuje na to da bi se buduće reforme, osim na sadržajne promjene kurikuluma, mogle usmjeriti i na osmišljavanje načina kako učenicima matematiku učiniti pristupačnijom te osigurati dovoljno mogućnosti i vremena za svladavanje nužnih matematičkih sadržaja u svakome uzrastu.«<sup>1</sup>

Stoga se učitelji i donositelji obrazovnih politika nalaze u nezavidnom položaju tražeći načine kako da nastavu matematike u nižim razredima osnovne škole učine kvalitetnijom. Pogledamo li rezultate učenika četvrtog razreda na međunarodnom istraživanju TIMSS iz matematike možemo uočiti da se Singapur nalazi u samom vrhu<sup>2</sup>, što ukazuje na kvalitetan nastavni model početne nastave matematike. Također, istraživanja pokazuju da djeca koja pohađaju Montessori programe pokazuju visoku razinu postignuća u matematici.<sup>3</sup> Stoga, u ovom radu uspoređujemo model Montessori i singapurski model početne nastave matematike. Ti modeli alternativa su tradicionalnoj nastavi usmjerenoj na učitelja u kojoj je učenikovo učenje »podrazumijevalo pažljivo praćenje nastavnikova 'realiziranja programa', zatim prepisivanje tragova te 'realizacije' na ploči, te rješavanje zadataka za domaću zadaću iz udžbenika i zbirki zadataka«.<sup>4</sup>

### 1. Modeli nastave matematike

U didaktici postoji razlika između pojmova nastavni modeli, strategije, metode i postupci. Strategije se dijele »na metode, ove na veći broj postupaka«.<sup>5</sup> Nastavni modeli su najširi didaktički pojam. Pod nastavnim modelom se »misli znanstveno uopćavanje na temelju proučavanja općih i zajedničkih obilježja didaktičkih rješenja za nastavu«.<sup>6</sup> Modeli su jasno opisane aktivnosti uz na-

<sup>1</sup> Usp. Ines ELEZOVIĆ i sur., *Rezultati TIMSS 2019 – Međunarodnoga istraživanja trendova u znanju matematike i prirodoslovlja. Nacionalni izvještaj Republika Hrvatska*, Zagreb, Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, 2019, 80.

<sup>2</sup> Usp. Elezović i sur., *Rezultati TIMSS 2019...*, 18.

<sup>3</sup> Usp. Chloë MARSHALL, Montessori education. A review of the evidence base, *Science of Learning*, 2 (2017) 1-11.

<sup>4</sup> Usp. Milan MATIJEVIĆ, (Na)učiti kako se uči (matematika), *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 12 (2011) 45, 30-38.

<sup>5</sup> Usp. Ladislav BOGNAR, Milan MATIJEVIĆ, *Didaktika*, Zagreb, Školska knjiga, 1992, 287.

<sup>6</sup> Usp. Milan MATIJEVIĆ, *Učiti po dogovoru. Uvod u tehnologiju obrazovanja odraslih*, Zagreb, Birotehnika, 2000, 61.

vođenje razloga njihove provedbe u praksi. To uključuje teorijska polazišta, kurikulume, nastavna sredstva, pisane materijale za učitelje i učenike.<sup>7</sup>

Unatoč uvriježenu nazivu *Montessori metoda* koji je uvela sama autorica,<sup>8</sup> tu je riječ o širem didaktičkom pojmu, a ne o nastavnoj metodi, stoga ćemo u ovom radu upotrebljavati naziv Montessori (nastavni) model što vrijedi i za singapurski model. Oba modela namijenjena su prije svega početnoj nastavi matematike, odnosno u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole,<sup>9</sup> stoga se mogu nazvati modelima početne nastave matematike.

## 2. Usporedba Montessori i singapurskog modela početne nastave matematike

U ovom radu usmjerili smo se na usporedbu Montessori i singapurskog modela početne nastave matematike. Naime, ti modeli se ne odnose samo na metodički aspekt nastave (nastavne metode, zadatke i didaktičke materijale) već uključuju razrađena teorijska polazišta, odgovarajuće kompetencije i ulogu učitelja te rezultate istraživanja koji ukazuju na veću učinkovitost obaju modela u odnosu na tradicionalnu početnu nastavu matematike. Činjenica da su to učinkoviti modeli početne nastave matematike potakla nas je na njihovu usporedbu.

Premda je singapurski model razvijen i najviše vezan uz Singapur, on se – kao i Montessori model – koristi u različitim dijelovima svijete. Unatoč tome, singapurski model se u drugim zemljama ne ostvaruje u cjelini već samo u dijelovima (npr. udžbenici<sup>10</sup> ili metoda konkretno-slikovno-apstraktno<sup>11</sup>). Zbog toga smo se u tekstu usmjerili na analizu tog modela u Singapuru, gdje se primjenjuje cjelovito. Za razliku od toga, Montessori model nije vezan ni uz jedno geografsko područje već se koristi kao alternativan pristup u različitim zemljama.

<sup>7</sup> Usp. Bruce JOYCE, Marsha WEIL, *Models of teaching*, New Delhi, Prentice-Hall, 2003, 11.

<sup>8</sup> Usp. Maria MONTESSORI, Gerald Lee GUTEK, *The Montessori method. The origins of an educational innovation*, Lanham, Rowman – Littlefield, 2004, 16.

<sup>9</sup> Usp. Marshall, *Montessori education. A review of the...*, 1; Marija SABLJIĆ, Marija LESANDRIĆ, Alma ŠKUGOR, Ostvarivanje promjena u primarnom obrazovanju implementacijom Montessori pedagogije, u: Vladimir STRUGAR, Višnja RAJIĆ (ur.), *Suvremeni pristupi obrazovanju učitelja*, Zagreb, HAZU – Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, 2022, 196-234.

<sup>10</sup> Usp. Ariel Mariah LINDORFF, James HALL, Pamela SAMMONS, Investigating a Singapore-based mathematics textbook and teaching approach in classrooms in England, *Frontiers in Education*, 4 (2019) 37, 1-21.

<sup>11</sup> Alvin BARCELONA, Upgrading the problem-solving experiences of the primary students using an online Singapore mathematics platform, *American Journal of Education and Technology*, 1 (2022) 3, 9-17.

## 2.1. Teorijska polazišta nastavnih modela

Montessori model nastao je početkom 20. stoljeća, a utemeljila ga je Maria Montessori. U razvoju svojih pedagoških ideja bila je pod utjecajem filozofa Rousseaua te pedagoga Pestalozzia i Fröbela. Potaknuta Rousseovom filozofijom<sup>12</sup> zalagala se za slobodu djeteta, s tim da je odbacila njegovu zamisao da se dijete razvija u nestrukturiranoj okolini izvan društvenog konteksta. Pestalozzi je utjecao na njezin teorijski pristup idejom da škola treba biti djetetu drugi dom u kojemu će ono učiti kroz posebno osmišljene praktične aktivnosti. Poseban utjecaj na Montessori imao je njemački pedagog Fröbel koji je isticao važnost samostalnog učenja u strukturiranom okruženju.<sup>13</sup> Međutim, Montessori je smatrala da su svi njezini prethodnici bili previše filozofski orijentirani. Zbog toga, pod utjecajem fizikalnog antropologa Lombrosa i eksperimentalnog psihologa Sergia, pokušava svoju teoriju utemeljiti na analizi podataka dobivenih mjerenjem i promatranjem aktivnosti djeteta.<sup>14</sup>

Montessori vidi dijete kao konstruktora vlastitog razvoja, što je slično suvremenom pedagoškom konstruktivizmu.<sup>15</sup> Naglašava važnost postupnog razvoja djetetovih prirodnih sposobnosti, počevši od promatranja pa do formiranja ideja. Montessori pridaje važnost odgoju koji promovira dječje interese, uvažava njihovu psihološku kompleksnost i specifičnosti različitih faza razvoja.<sup>16</sup> Prva faza, upijajući um (do 6 godina), uključuje lako apsorbiranje informacija, pri čemu prve tri godine (nesvjesni upijajući um) imaju najveći utjecaj s fokusom na neovisnost. Od treće godine, u fazi svjesnog upijajućeg uma, dijete se zanima za društvo i kulturu te razvija kontrolu volje. U fazi kozmičkog odgoja i obrazovanja (6-12 godina), za razliku od ranog djetinjstva u kojemu dijete spoznaje svijet koristeći svoja osjetila, ono imaginativnim istraživanjem i rasuđivanjem upoznaje svemir.<sup>17</sup> Tijekom adolescencije (12-18 godina) dijete prolazi kroz fizičke promjene i želi se identificirati s vršnjacima. Montessori je isticala da su pokret i spoznaja usko povezani. Zbog toga je razvila model u kojemu se velik broj obrazovnih aktivnosti, a tako i aktivnosti u nastavi matematike, ostvaruju manipuliranjem konkretnim materijalima.<sup>18</sup>

Iako je Montessori zagovarala znanstveno promatranje spontanog učenja učenika, model se nije uvijek temeljio na rezultatima istraživanja jer je do ne-

<sup>12</sup> Usp. Montessori, Gutek, *The Montessori method...*, 10.

<sup>13</sup> Usp. isto, 29.

<sup>14</sup> Usp. Montessori, Gutek, *The Montessori method...*, 13.

<sup>15</sup> Usp. Slavica BAŠIĆ, Modernost pedagoške koncepcije Marije Montessori, *Pedagogijska istraživanja*, 8 (2011) 2, 205-214.

<sup>16</sup> Usp. Barbara ISAACS, *Bringing the Montessori approach to your early years practice*, London – New York, Routledge, 2015, 12.

<sup>17</sup> Usp. Margaret E. STEPHENSON, Cosmic education, *The NAMTA Journal*, 38 (2013) 1, 119-132.

<sup>18</sup> Usp. Angelina Stoll LILLARD, *Montessori the science behind the genius*, New York, Oxford Press, 2017, 37.

kih zaključaka došla intuitivno i arbitrarno,<sup>19</sup> a neki su utemeljeni u njenom religijskom opredjeljenju.<sup>20</sup> Međutim, bitne postavke njene teorije potvrđene su u naknadnim istraživanjima. Tako su neuroznanstvena istraživanja dokazala važnost ranih iskustava za razvoj mozga te općenito da se u mozgu događaju promjene u skladu s fazama razvoja koje je opisala Montessori.<sup>21</sup> Osim toga, dokazano je da manipuliranje predmetima pomaže u rješavanju zadataka u početnoj nastavi matematike.<sup>22</sup> Isto tako, postoje dokazi da je sloboda izbora povezana s učeničkom ustrajnošću i interesom za matematičke aktivnosti.<sup>23</sup>

Singapurski model utemeljen je na različitim teorijskim pristupima: Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja, Brunerovoj i Dienesovoj teoriji razvoja matematičkog mišljenja, na Skempovom razlikovanju instrumentalnog i relacijskog razumijevanja te na teoriji Vigotskog koji ističe važnost socijalne interakcije učenika s odraslima i vršnjacima.<sup>24</sup> Prema Piagetu, djeca prolaze kroz četiri faze kognitivnog razvoja: senzomotorička, predoperacijska, faza konkretnih operacija i faza formalnih operacija. Sve faze kognitivnog razvoja su nužne da bi dijete moglo doći do apstraktnog mišljenja na kojemu se temelji matematičko mišljenje. Bruner, uvažavajući Piagetove faze kognitivnog razvoja, navodi tri vrste mentalnog predočavanja: aktivno, ikoničko i simboličko<sup>25</sup> na čemu se temelji konkretno-slikovno-apstraktna (K-S-A) metoda učenja matematike koja se koristi u Singapuru. Dienes se zalagao za korištenje manipulativnih materijala, igara i priča u matematici, jer smatra da matematika treba biti zabavan istraživački proces koji potiče djecu na kreativnost.<sup>26</sup> Skempovova teorija o relacijskom i instrumentalnom razumijevanju matematike vidljiva je u korištenju metode modela u kojoj učenici razvijaju razumijevanje matematičkih koncepta i paralelno uče postupke.<sup>27</sup> Vigotski je smatrao da učenici mogu nadmašiti svoju trenutnu razinu razumijevanja uz pomoć učitelja ili vršnjaka, pri čemu

<sup>19</sup> Usp. Silvija PHILIPPS, *Montessori priprema za život: odgoj neovisnosti i odgovornosti*, Jastrebarsko, Naklada Slap, 1999, 11.

<sup>20</sup> Usp. Stephenson, *Cosmic education...*, 123.

<sup>21</sup> Usp. Mara FABRI, Stefania FORTUNA, Maria Montessori and neuroscience. The trailblazing insights of an Exceptional Mind, *The Neuroscientist*, 26 (2020) 5-6, 394-401

<sup>22</sup> Usp. Kira J. CARBONNEAU, Scott C. MARLEY, James P. SELIG, A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives, *Journal of Educational Psychology*, 105 (2013) 2, 380-400.

<sup>23</sup> Usp. Lillard, *Montessori the science behind the genius...*

<sup>24</sup> Usp. Berinderjeet KAUR, The why, what and how of the 'Model' method. A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems, *ZDM – Mathematics Education*, 51 (2019) 1, 151-168.

<sup>25</sup> Usp. Jerome Seymour BRUNER, *Toward a theory of instruction*, Cambridge, The Belknap Press, 1966, 44.

<sup>26</sup> Usp. Zoltan DIENES, Some thoughts on the dynamics of learning mathematics, u: Bharath SRIRAMAN (ur.), *Zoltan Paul Dienes and the dynamics of mathematical learning*, Montana, The University of Montana Press, 2007, 1-118.

<sup>27</sup> Usp. Wong Khoo YOONG, *Effective mathematics lessons through an eclectic Singapore approach. Yearbook 2015, Association of Mathematics Educators*, Singapore, World Scientific Publishing, 2015, 87.

je razliku između samostalnog razumijevanja i razumijevanja uz tuđu pomoć nazvao zonom proksimalnog razvoja, što je u singapurskom modelu izraženo u ključnoj ulozi učitelja.<sup>28</sup>

Ako usporedimo oba modela, možemo uočiti važnost razvojnih faza, pri čemu svaka faza ima svoje specifičnosti koje bi trebalo uvažavati u radu s djecom različite dobi. Piaget je uvažavao rad Marije Montessori, koristeći ga kao temelj za vlastitu teoriju,<sup>29</sup> stoga su posljednje dvije Piagetove faze vrlo slične Montessori fazama u kojima se dijete odmiče od konkretnog i usmjerava prema apstraktnom mišljenju, s tim da je u oba modela istaknuto korištenje i manipuliranje konkretnim objektima. Treba istaći kako su u Singapuru razvili model nastave matematike proučavajući novije znanstvene teorije od kojih neke nisu postojale početkom dvadesetog stoljeća kad se razvijao Montessori model.

## 2.2. Nastavne metode i didaktički materijali u modelima početne nastave matematike

Oba modela teže k tome da učenici razviju dublje razumijevanje matematičkih koncepata.<sup>30</sup> No, Montessori više naglašava učeničko samostalno otkrivanje uporabom didaktičkih materijala,<sup>31</sup> dok se singapurskim modelom učenici potiču da koriste različite strategije za rješavanje problema.<sup>32</sup>

Oba modela koriste konkretne materijale i vizualne reprezentacije da bi olakšali razumijevanje matematike. Montessori model temelji se na uporabi specijalnih didaktičkih materijala koji uz odgovarajuće vježbe prate razvojne mogućnosti djeteta, tj. od jednostavnijih postaju sve složenije, od konkretnih sve apstraktnije.<sup>33</sup> Riječ je o visokokvalitetnim materijalima koji su dizajnirani tako da potiču djecu na aktivnosti i manipulaciju. Mnogi od tih materijala omogućuju djetetu da samostalno prepozna i ispravi svoje pogreške bez potrebe za intervencijom učitelja.<sup>34</sup>

<sup>28</sup> Usp. Eng Guan TAY i dr., The National Institute of Education and Mathematics Teacher Education. Evolution of pre-service and graduate mathematics teacher education, u: Tim Lam TOH, Berinderjeet KAUR, Eng Guan TAY (ur.), *Mathematics education in Singapore*, Singapore, World Scientific, 2019, 351-383.

<sup>29</sup> Usp. Carol Garhart MOONEY, *Theories of childhood. An introduction to Dewey, Montessori, Erikson, Piaget & Vygotsky*, Minnesota, Redleaf Press, 2013, 45.

<sup>30</sup> Ngan Hoe LEE, Wee Leng NG, Li Gek Pearlyn LIM, The intended school mathematics curriculum, u: Toh, Kaur, Tay (ur.), *Mathematics education in Singapore...*, 35-53.

<sup>31</sup> Usp. Angeline S. LILLARD, Playful learning and Montessori education, *American Journal of Play*, 5 (2013) 2, 157-171.

<sup>32</sup> Usp. Pui Yee FOONG, Review of Research on Mathematical Problem, u: Wong Khoon YOONG i dr. (ur.), *Mathematics education. The Singapore journey*, Singapore, World Scientific Publishing, 2009, 263-300.

<sup>33</sup> Usp. Phillips, *Montessori priprema za život...*, 63.

<sup>34</sup> Usp. Isaacs, *Bringing the Montessori...*, 52.

U singapurskom modelu konkretno-slikovno-apstraktna (K-S-A) metoda osigurava dublje razumijevanje matematičkih pojmova. U njoj učenje počinje aktivnim angažmanom ili iskustvom dobivenim manipuliranjem konkretnim materijalima. Zatim učenici nastoje produbiti svoje razumijevanje pomoću slikovnih prikaza kojima se vizualiziraju apstraktni matematički odnosi i različite strukture problema.<sup>35</sup> Time učenici uče apstraktne matematičke ideje na opipljiv i vidljiv način. Učenici prvo manipuliraju stvarnim predmetima, nakon toga prelaze na izradu modela koji se koriste za predočavanje matematičkih veličina navedenih u zadatku.<sup>36</sup>

Razlika između Montessori i singapurskog modela ogleda se u stupnju učestalosti korištenja didaktičkih materijala. Montessori pribor je učenicima stalno dostupan i mogu se njime samostalno služiti,<sup>37</sup> dok je singapurski didaktički materijal u rukama učitelja koji odlučuje kad će se učenici njime služiti slijedeći propisani matematički kurikulum.<sup>38</sup> Za razliku od Montessori modela u kojemu se rabe posebno dizajnirani didaktički materijali, u singapurskom modelu konkretni materijali nisu izrađeni posebno za taj model. Osim toga, u Singapuru učenici imaju udžbenike u kojima su navedeni slikovni prikazi matematičkih zadataka, dok tradicionalni Montessori model ne koristi udžbenike.<sup>39</sup>

### 2.3. *Specifičnost nastavnih zadataka u analiziranim modelima nastave matematike*

Učenici u Montessori učionicama prilikom rješavanja matematičkih zadataka koriste posebno pripremljeni materijal. Primjerice, perlice zlatne boje služe za uvođenje u dekadski sustav te njime učenici stvaraju vizualnu predodžbu koja im kasnije može pomoći u zadacima apstraktnog tipa te u računskim operacijama kvadriranja, odnosno kubiranja.

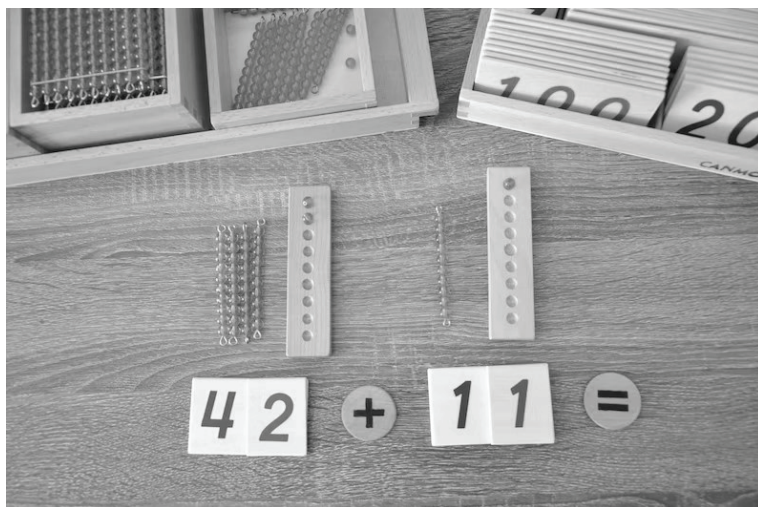
<sup>35</sup> Usp. Beverly J. FERRUCCI, Berinderjeet KAUR., Jack A. CARTER i Banhar YEAP, Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom, u: Carole E. GREENES (ur.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 2008, 195-209.

<sup>36</sup> Usp. Tek Hong KHO, Shu Mei YEO, Lianghuo FAN, Model method in Singapore primary mathematics textbooks, u: Keith JONES i dr. (ur.), *International conference on mathematics textbook research and development*, Southampton, University of Southampton, 2014, 275-282.

<sup>37</sup> Usp. Qais FARYADI, The application of Montessori method in learning mathematics: An experimental research, *Open Access Library Journal*, 4 (2017), 1-14.

<sup>38</sup> Usp. Chun Ming Eric CHAN, Kit Ee Dawn NG, Ngan Hoe LEE, Jaguthsing DINDYAL, Problems in real-world context and mathematical modelling, u: Tin Lam TOH, Berinderjeet KAUR, Eng Guan TAY (ur.), *Mathematics education in Singapore*, Singapore, Springer, 2019, 195-216.

<sup>39</sup> Usp. Montessori, Gutek, *The Montessori method...*, 3.

Slika 1. Igra zbrajanja.<sup>40</sup>

Slika 1. primjer je zadatka u kojemu su jedinice i desetice označene različitim bojama. Učitelj postavlja zadatak s karticama nakon čega učenik odlazi do ormara, uzima odgovarajući broj perlica i pridružuje karticama pripadajuću količinu perlica i tako rješava zadatak.

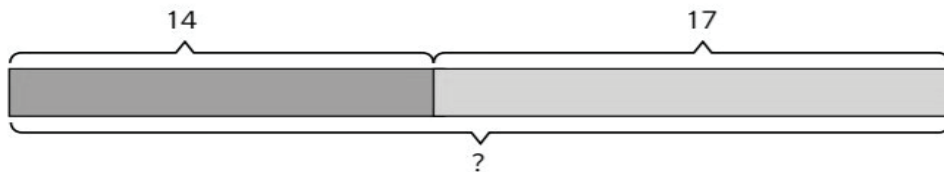
Singapurski model potiče učenike na istraživanje različitih strategija za rješavanje problemskih zadataka poput rješavanja unatrag, traženje uzorka, pogodi i provjeri itd.<sup>41</sup> Razumijevanje matematičkih koncepata ostvaruje se primjenom u stvarnim situacijama, tj. matematičkom modeliranju. Jedna od posebno istaknutih metoda kojima se koriste prilikom rješavanja zadataka riječima je metoda modela ili pravokutnika.<sup>42</sup> Učenici crtaju pravokutnike koji predstavljaju kvantitativne dijelove i/ili cjelinu s obzirom na kontekst zadatka. Pravokutnici su modeli koji ne prikazuju stvarne objekte iz tekstualnog zadatka, već prikazuju količine i odnose između količina. Ti crteži su shematske prirode jer se odnose na unutarnju strukturu problema koji je dan u tekstualnim zadacima (slika 2).

<sup>40</sup> Izvor: <https://www.etsy.com/uk/listing/722093532/montessori-double-digits-addition-math>.

<sup>41</sup> Usp. MINISTRY OF EDUCATION SINGAPORE, *Mathematics syllabus. Primary one to six. Implementation starting with 2021 Primary One Cohort*, (2023) 2021-primary-mathematics-syllabus-p1-to-p6.pdf (moe.gov.sg) (20.12.2023).

<sup>42</sup> Usp. Ng Swee FONG, Kerry LEE, Model method. A visual tool to support algebra word problem solving at the primary level, u: Wong Khoo YOONG i dr. (ur.), *Mathematics education. The Singapore journey*, Singapore, World Scientific Publishing, 2009, 169-203.





Helena ima 14 peciva, njezina prijateljica ima 17 peciva. Treba izračunati koliko peciva imaju zajedno. U tom zadatku operacija zbrajanja prikazana je na slici 2. Rezultat je veličina cjeline. Učenici trebaju napisati jednakost:  $14$  (dio) +  $17$  (dio) =  $31$  (cjelina) što je odgovor na postavljeno pitanje. Odnosno, zajedno imaju 31 pecivo.

Slika 2. Slikovni model u kojemu se za prikaz zbrajanja koriste pravokutnici.<sup>43</sup>

U singapurskom modelu slijedi se kurikulum matematike, koji je vrlo strukturiran i spiralan.<sup>44</sup> Srž kurikulumu je rješavanje matematičkih problema<sup>45</sup> korištenjem različitih metoda, između ostalog Polyina četiri koraka koji uključuju razumijevanje problema, planiranje, rješavanje i osvrt na dobiveno rješenje.<sup>46</sup> Za razliku od njega, Montessori model ima slobodan kurikulum jer se učenje temelji prvenstveno na individualnoj aktivnosti učenika koji bi uz uporabu konkretnih materijala trebali otkriti, razumjeti i primjenjivati matematičke pojmove i operacije.<sup>47</sup>

### 2.5. Uloga učitelja u analiziranim modelima nastave matematike

Postoje različiti načini toga kako postati Montessori učitelj. Obično to podrazumijeva uključivanje osoba, koje su prethodno završile neki studij (ne nužno učiteljski), uz specifičnu izobrazbu koja može trajati godinu dana ili više. Ta izobrazba osigurava temeljito razumijevanje Montessori modela.<sup>48</sup> Osim teorijskog znanja, izobrazba Montessori učitelja obuhvaća praktično iskustvo s Montessori materijalima i metodama<sup>49</sup> i praksu pod nadzorom iskusnog Montessori učitelja.<sup>50</sup> Nakon završetka izobrazbe, Montessori učitelji dobivaju

<sup>43</sup> Usp. Andy CLARK, *Singapore math. A visual approach to word problems model drawing in Math in focus*, Marshall Cavendish Education, 2010, 2.

<sup>44</sup> Usp. Berinderjeet KAUR, Enactment of school mathematics curriculum in Singapore. Whither research!, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 46 (2014) 46, 829-836.

<sup>45</sup> Usp. Ministry of Education, Singapore, *Mathematics syllabus primary...*, 10.

<sup>46</sup> Usp. George PÓLYA, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Zagreb, Školska knjiga, 1956, 5.

<sup>47</sup> Usp. Immaculate Kizito NAMUKASA, Kinful Lartebea ARYEE, Pedagogical knowledge for teaching mathematics in Montessori schools, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16 (2021) 3, 1-20.

<sup>48</sup> Usp. Jacqueline COSENTINO, Culture, craft, & coherence. The unexpected vitality of montessori teacher training, *Journal of Teacher Education*, 60 (2009) 5, 520-527.

<sup>49</sup> Usp. isto, 526.

<sup>50</sup> Usp. Aida MACIA-GUAL, Laura Domingo-PENAFIEL, Demands in early childhood education: Montessori pedagogy, prepared environment, and teacher training, *International Journal of Research in Education and Science*, 7 (2021) 1, 144-162.

potvrdu od relevantne Montessori asocijacije.<sup>51</sup> U Montessori modelu učitelj preuzima ulogu organizatora koji suptilno vodi učenika kroz proces učenja. On nije poučavatelj, već organizator i usmjerivač<sup>52</sup> jer ključnu ulogu ima učenik. Učenje se manje događa slušanjem izlaganja, a više stjecanjem iskustva tijekom rješavanja konkretnih zadataka uz korištenje Montessori didaktičkih materijala.<sup>53</sup> Učitelj će najprije djeci prikazati zašto i kako se koristi pojedini materijal, a djeca će dalje prema svom interesu učiti pomoću tog materijala.

Obrazovanje budućih učitelja u Singapuru je formalno i centralizirano. Učitelji se biraju između trećine najuspješnijih srednjoškolaca. Naglasak u inicijalnom obrazovanju učitelja je postavljen na metodički aspekt nastave (59 % sati), na učenje pedagoških teorija (29 % sati) te na svladavanje stručnih sadržaja u koje ulazi i matematika (12 % sati).<sup>54</sup> Formalno inicijalno obrazovanje osigurava duboko razumijevanje kurikuluma matematike kao i nastavnih metoda inkorporiranih u singapurski model (npr. K-S-A). Osim toga, Ministarstvo obrazovanja Singapura pruža brojne mogućnosti stručnog usavršavanja.<sup>55</sup> Uz to, učitelje se potiče na sudjelovanje u znanstvenim istraživanjima te na provedbu akcijskih istraživanja.<sup>56</sup> Sve to osigurava kontinuirano osposobljavanje učitelja za ostvarivanje kvalitetne nastave matematike. Učitelji u Singapuru organiziraju nastavu vodeći računa o stvaranju pozitivne razredne kulture, pripremanju i ostvarivanju nastave te o vrednovanju i povratnim informacijama.<sup>57</sup> Važno im je da učenici mogu razumjeti osnovne matematičke koncepte i procedure koje onda primjenjuju u samostalnom rješavanju problemskih zadataka.

U oba modela učitelji prolaze kroz temeljito formalno inicijalno obrazovanje ili izobrazbu, no ključna razlika leži u specifičnostima modela za koji se pripremaju. Dok Montessori učitelji postaju stručnjaci za holistički, samousmjereni pristup odgoju i obrazovanju<sup>58</sup> koji je temeljen na uporabi specifičnih didaktičkih materijala,<sup>59</sup> singapurski učitelji matematike postaju stručnjaci za modeliranje i vizualizaciju u matematici, koristeći K-S-A pristup u rješavanju

<sup>51</sup> Usp. Immaculate Kizito NAMUKASA, Kinful Lartebea ARYEE, Pedagogical knowledge for teaching mathematics in Montessori schools, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16 (2021) 3, 1-20.

<sup>52</sup> Usp. Matijević, *Alternativne škole...*, 38.

<sup>53</sup> Usp. Faryadi, *The application of Montessori method...*, 10.

<sup>54</sup> Usp. Lim Kek JOO, *Singapore teachers. SABER country report 2015*, Washington, World Bank (12.12.2017) <http://hdl.handle.net/10986/29523> (20.12.2023), 8.

<sup>55</sup> Usp. Maria Teresa TATTO i sur., *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*, Amsterdam, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), 2012, 143.

<sup>56</sup> Usp. Ben Heng CHOY, Jaguthsing DINDYAL, Developing the competencies of mathematics teacher-researchers, u: Oon Seng TAN i dr. (ur.), *Singapore math and science education innovation. Beyond PISA*, Singapore, Springer, 2021, 287-298.

<sup>57</sup> Usp. Ministry of Education Singapore, *Mathematics syllabus primary...*, 23.

<sup>58</sup> Usp. Matijević, *Alternativne škole...*, 38.

<sup>59</sup> Usp. Faryadi, *The application of Montessori method...*, 10.

nerutinskih matematičkih problema. U oba modela od učitelja se ne očekuje da budu prenositelji znanja već da pomažu učenicima u samostalnom učenju.<sup>60</sup> Ipak, učitelji se u Singapuru više skrbe o nastavi koja, osim individualnog, uključuje frontalni i suradnički oblik nastave, dok u Montessori modelu učitelji stvaraju sigurnu okolinu za samostalno, pretežito individualno učenje učenika.

## 2.6. Rezultati istraživanja analiziranih modela nastave matematike

Rezultati istraživanja o uspješnosti Montessori modela ukazuju na to da učenici postižu jednake ili bolje rezultate u matematici od svojih vršnjaka u tradicionalnim školama.<sup>61</sup> To se prije svega može pripisati pravilnoj uporabi manipulativa za koje je važno a) da se dosljedno koriste duže vrijeme, b) da se nakon nekog vremena s konkretnih materijala prijeđe na apstraktne prikaze, c) da manipulativi ne sadrže ometajuće detalje te d) da se učenicima eksplicitno objasni veza između manipulativa i matematičkog pojma.<sup>62</sup> Razlog zbog kojega u nekim istraživanjima nema razlike moguće je tražiti u tome što Montessori model nije dosljedno implementiran.<sup>63</sup> Učenici uključeni u Montessori model pokazuju veće zadovoljstvo u učenju matematike i veće samopouzdanje u rješavanju matematičkih zadataka, pa čak i onih problemskih.<sup>64</sup>

Učenici koji se školuju prema singapurskom modelu pokazuju veću uspješnost u rješavanju matematičkih problema u odnosu na učenike iz uobičajenih pristupa nastave.<sup>65</sup> U eksperimentalnom istraživanju provedenom u Engleskoj uporaba singapurskih udžbenika pokazala se učinkovitijom od udžbenika koji

<sup>60</sup> Usp. Lim Suat KHOH, Mathematics education in Singapore. Looking back and moving on, *The Mathematics Educator*, 6 (2002) 2, 1-14.

<sup>61</sup> Usp. Brooke T. CULCLASURE, David J. FLEMING, Ginny RIGA, *An evaluation of Montessori education in South Carolina's public schools*, Greenville, The Riley Institute at Furman University, 2018; Kathryn RINDSKOPF DOHRMANN, *Outcomes for students in a Montessori program. A longitudinal study of the experience in the Milwaukee public schools*, Rochester, Association Montessori International – USA, 2003, 3; Abha BASARGEKAR, Angeline S. LILLARD, Math achievement outcomes associated with Montessori education, *Early Child Development and Care*, 191 (2021) 7-8, 1207-1218; Justus J. RANDOLPH i dr., Montessori education's impact on academic and nonacademic outcomes. A systematic review, *Campbell Systematic Reviews*, 19 (2023) 3, 1-74.

<sup>62</sup> Usp. Elida V. LASKI i dr., What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education, *SAGE Open*, 5 (2015) 2, 1-8.

<sup>63</sup> Usp. Hsin-Hui PENG, Sham'ah MD-YUNUS, Do children in Montessori schools perform better in the achievement test? A Taiwanese Perspective, *International Journal of Early Childhood*, 46 (2014) 2, 299-311.

<sup>64</sup> Usp. Mark A. DONABELLA, Audrey C. RULE, Four seventh grade students who qualify for academic intervention services in mathematics learning multi-digit multiplication with the Montessori checkerboard, *Teaching Exceptional Children Plus*, 4 (2008) 3, 299-311.

<sup>65</sup> Usp. Kevin MAHONEY, *Effects of Singapore's model method on elementary student problem-solving performance. Single-case research*, doktorska disertacija, Northeastern University, Digital Repository Service, 2012, 99, 110.

su do tada bili korišteni u nastavi.<sup>66</sup> No, čak i korištenje dijela K-S-A metode iz singapurskog modela pokazuje veću uspješnost. Naime, učenici, a posebno oni s teškoćama,<sup>67</sup> koji su učili matematiku pomoću metode toga modela postigli su bolje rezultate od učenika koji nisu bili uključeni u tu metodu.<sup>68</sup> Uspješnost singapurskog modela potvrđuju rezultati međunarodnih istraživanja kao što su TIMSS<sup>69</sup> i PISA<sup>70</sup> u kojima se Singapur u postignućima učenika nalazi na vrhu ljestvice.

## Zaključak

U ovom je radu uspoređen Montessori i singapurski model početne nastave matematike koji su alternativa tradicionalnoj nastavi uvelike temeljenoj na aktivnosti učitelja, a manje na onome što učenici čine i razumiju. Utvrđene su neke sličnosti, ali i razlike u nekoliko ključnih aspekata (tablica 1).

Oba modela povezuje korištenje konkretnih materijala tijekom usvajanja nastavnih sadržaja iz matematike. Didaktički materijali imaju važno mjesto u početnoj nastavi matematike jer pomažu učenicima u razumijevanju matematičkih koncepata, a zatim u usvajanju apstraktnih matematičkih ideja.<sup>71</sup> Oba modela pokazuju učinkovitost u razvoju matematičkog mišljenja kod djece, a učitelji koji poučavaju u oba modela osposobljeni su za svoj posao. Ovaj članak pomaže razumjeti sastavnice koji modele čine uspješnima i pokazuje put prema kvalitetnijoj nastavi matematike jer istraživanja pokazuju da primjena i samo nekih elemenata (npr. udžbenika, metoda ili didaktičkih materijala) može unaprijediti učenička postignuća.<sup>72</sup>

<sup>66</sup> Usp. Lindorff i sur., *Investigating a Singapore-Based Mathematics Textbook...*

<sup>67</sup> Usp. Lisa L. MORIN i dr., The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties, *Learning Disability Quarterly*, 40 (2017) 2, 91-104.

<sup>68</sup> Usp. Jenny Taliaferro BLALOCK, *The impact of Singapore Math on student knowledge and enjoyment in mathematics*, doktorska disertacija, Louisiana Tech University, (01.09.2011), <https://digitalcommons.latech.edu/dissertations/357>, (20.12.2023).

<sup>69</sup> Usp. Elezović i sur., *Rezultati TIMSS 2019...*, 18.

<sup>70</sup> Usp. Ana MARKOČIĆ DEKANIĆ i sur., *PISA 2018. Rezultati, odrednice i implikacije. Međunarodno istraživanje znanja i vještina učenika*, Zagreb, Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, 2019, 148.

<sup>71</sup> Usp. Rose GRIFFITHS, Jenni BACK, Sue GIFFORD, *Using manipulatives in the foundations of arithmetic: Literature review*, Nuffield Foundation (14.06.2017), <https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Literature20Review20Making20numbers2014Jun17.pdf> (20.12.2023).

<sup>72</sup> Usp. Lisa L. MORIN i dr., The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties, *Learning Disability Quarterly*, 40 (2017) 2, 91-104; Angeline S. LILLARD, Shunned and admired: Montessori, self-determination, and a case for radical school reform, *Educational Psychology Review*, 31 (2019) 4, 939-965.

Tablica 1: Razlike između Montessori i singapurskog modela početne nastave matematike.

Kriterij usporedbe	Montessori model	Singapurski model
Teorijska polazišta	Dijete je u središtu odgojnog i obrazovnog procesa, a u procesu učenja njegova samostalnost i aktivnost dolaze do izražaja. Učenje se temelji na korištenju didaktičkih materijala prilagođenih fazama razvoja djeteta.	Temelji se na suvremenim teorijskim pristupima različitih autora u kojima se uvažavaju razvojne faze djetetova razvoja, ali isto tako i mogućnost razvoja apstraktnog mišljenja uz pomoć K-S-A metode, učitelja i vršnjaka.
Metode učenja i poučavanja te didaktički materijali	Prevladava samostalna aktivnost i igra uz korištenje posebno izrađenih didaktičkih materijala.	Koristi se K-S-A metoda u rješavanju problemskih zadataka koja je uključena i u udžbenike.
Zadatci	Učenici rješavaju uobičajene matematičke zadatke te one koji su povezani sa svakodnevnim životom.	Naglasak je na problemskim zadacima.
Uloga učitelja	Uloga učitelja je pomoći djetetu u samostalnom učenju.	Učitelj vodi proces učenja nastojeći omogućiti učenicima sustavno razumijevanje matematičkih pojmova te ih dovesti do samostalnog rješavanja problemskih zadataka.
Rezultati istraživanja	Učenici koji matematiku uče po Montessori modelu postižu jednake ili nešto bolje rezultate od učenika koji su uključeni u tradicionalnu nastavu.	Na međunarodnom istraživanju TIMSS Singapur zauzima prvo mjesto u matematičkoj pismenosti.

Ljerka Jukić Matić\* – Sanela Mužar Horvat\*\* – Branko Bognar\*\*\*

*Comparison of the Montessori and Singaporean Models of Elementary Mathematics Education*

Summary

This paper compares Montessori and Singaporean models of elementary mathematics education. The comparison includes theoretical starting points, teaching techniques, teaching materials, mathematical activities, the roles of teachers, and research findings. The Singaporean model focuses on teaching students in a manner that is consistent and adapted to mathematical objectives and problem-solving, while in the Montessori model, independent activity and play prevail, with the use of specific didactic materials. Both models facilitate the acquisition of mathematical knowledge in a meaningful, engaging, enjoyable, and interactive manner. Moreover, these models have demonstrated superior educational outcomes compared to conventional approaches in teaching mathematics. Common components of these mathematics teaching models include freedom in curriculum implementation, respect for the uniqueness of each student, and modifications to the roles of students and teachers in the learning process. Additionally, these models emphasize the use of appropriate didactic materials. Considering the observed benefits, we believe that both models have a place in elementary mathematics education.

*Key words: Montessori math teaching model, teaching models, elementary mathematics education, Singaporean math teaching model.*

(na eng. prev. Ljerka Jukić Matić)

---

\* Ljerka Jukić Matić, PhD, Assoc. Prof., University J. J. Strossmayer of Osijek, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; Address: Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, Croatia; E-mail: ljukic@mathos.hr.

\*\* Sanela Mužar Horvat, PhD, University of Slavonski Brod; Address: Gundulićeva 20, HR-35000 Slavonski Brod, Croatia; E-mail: smuzarhorvat@unisb.hr.

\*\*\* Branko Bognar, PhD, Full Prof., University J. J. Strossmayer of Osijek, Faculty of Humanities and Social Sciences; Address: Lorenza Jägerova 9, HR-31000 Osijek, Croatia; E-mail: bbognar@ffos.hr.