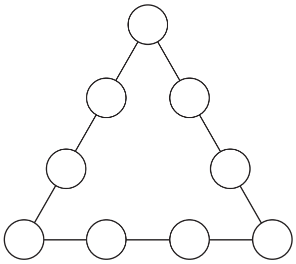
Matka 32 (2023./2024.) br. 125

# O JEDNOM ZADATKU

Jens Carstensen i Alija Muminagić, Danska



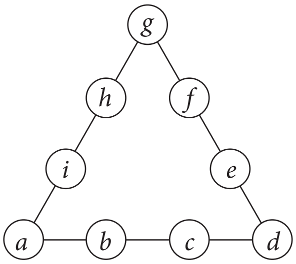
Čitateljima Matke sigurno je dobro poznat zadatak:

*U kružiće na stranicama trokuta upišite prirodne brojeve od 1 do 9 tako da zbrojevi brojeva na svim stranicama budu međusobno jednaki.*

U ovom ćemo članku dati rješenja preoblikovanog zadatka:

*U kružiće na stranicama trokuta upišite prirodne brojeve od 1 do 9 tako da zbrojevi kvadrata brojeva na svim stranicama budu međusobno jednaki.*

***Rješenje:*** Uvedimo oznake kao na Slici 1.:




*Slika 1.*

Prema uvjetima zadatka vrijede jednakosti:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=S$$
$$d^2+e^2+f^2+g^2=S$$
$$g^2+h^2+i^2+a^2=S.$$

Zbrajanjem navedenih jednakosti dobivamo:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+d^2+e^2+f^2+g^2+g^2+h^2+i^2+a^2=3S\text{, tj.}$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2+\left(a^2+d^2+g^2\right)=3S$$

Budući da je

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2=285,$$

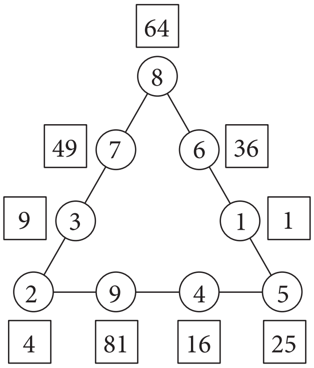
zaključujemo da je $285+\left(a^2+d^2+g^2\right)=3S$. Odatle je $a^2+d^2+g^2=3(S-95)$. Iz zadnje jednakosti slijedi da su svi pribrojnici djeljivi brojem 3 (tj. oni su 3, 6 i 9) ili niti jedan od njih nije djeljiv brojem 3.

Ako je $a = 3$, $d = 6$ i $g = 9$, uvrštavanjem bismo dobili da je $3^2 + 6^2 + 9^2 = 3(S - 95)$, odakle bi bilo $3S = 285 + 9 + 36 + 81$, tj. $3S = 411$ odnosno $S = 137$. Tada bi bilo $3^2+b^2+c^2+6^2=137$, tj. $b^2+c^2=92$, no takva dva prirodna broja $b$ i $c$ ne postoje.[1]

[1]Jednadžba $b^2 + c^2 = 92$ je diofantska jednadžba koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva između 1 i 9.

Ako bismo odabrali da je $a$ = 2, $d$ = 4 i $g$ = 7, uvrštavanjem bismo dobili da je $2^2+4^2+7^2=3(S-95)$, odakle bi bilo $3S=285+4+16+49$, tj. $3S$ = 354 odnosno $S$ = 118. Tada bi bilo $2^2+b^2+c^2+4^2=118$, tj. $b^2+c^2=98$, no takva dva prirodna broja $b$ i $c$ ne postoje.[2]

Uvažavajući prethodna razmatranja preostaje samo mogućnost $a$ = 2, $d$ = 5 i $g$ = 8, uvrštavanjem bismo dobili da je $2^2+5^2+8^2=3(S-95)$, odakle bi bilo $3S=285+4+25+64$, tj. $3S=378$ odnosno $S$ = 126.

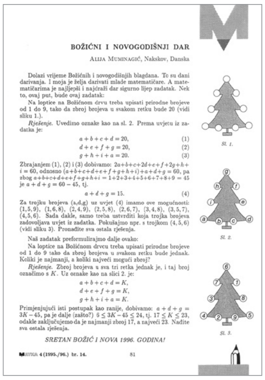


Tada je $2^2+b^2+c^2+5^2=126$, tj. $b^2+c^2=97$ odakle je $b$ = 9 i $c$ = 4.

Dalje je $5^2+e^2+f^2+8^2=126$, tj. $e^2+f^2=37$ odakle je $e$ = 1 i $f$ = 6.

Konačno, $8^2+h^2+i^2+2^2=126$, tj. $h^2+i^2=58$ odakle je $h$ = 7 i $i$ = 3.

Napomena. Uočite da je zbroj brojeva na stranicama trokuta jednak 20.[3]

**BOŽIĆNI I NOVOGODIŠNJI DAR**

Alija Muminagić, Nakskov, Danska

Dolazi vrijeme Božićnih i novogodišnjih blagdana. To su dani darivanja. I moja je želja darivati mlade matematičare. A matematičarima je najljepši i najdraži dar sigurno lijep zadatak. Neka to, ovaj put, bude ovaj zadatak:

Na loptice na Božićnom drvu treba upisati prirodne brojeve od 1 do 9, tako da zbroj brojeva u svakom retku bude 20 (vidi sliku 1.).

*Rješenje.* Uvedimo oznake kao na sl. 2. Prema uvjetu iz zadatka je:

$$a+b+c+d=20, \qquad (1)$$
$$d+e+f+g=20, \qquad (2)$$
$$g+h+i+a=20. \qquad (3)$$

Zbrajanjem (1), (2) i (3) dobivamo: $2a+b+c+2d+e+f+2g+h+i=60$, odnosno $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+a+d+g=60$, pa zbog $a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ je $a+d+g=60-45$, tj.

$$a+d+g=15. \qquad (4)$$

Za trojku brojeva (a,d,g) uz uvjet (4) imamo ove mogućnosti: (1,5,9), (1,6,8), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7), (4,5,6). Sada dakle, samo treba ustvrditi koja trojka brojeva zadovoljava uvjet iz zadatka. Pokušajmo npr. s trojkom (4,5,6) (vidi sliku 3). Pronađite sva ostala rješenja.

Naš zadatak preformulirajmo dalje ovako:

Na loptice na Božićnom drvcu treba upisati prirodne brojeve od 1 do 9 tako da zbroj brojeva u svakom retku bude jednak. Koliki je najmanji, a koliki najveći mogući zbroj?

*Rješenje.* Zbroj brojeva u sva tri retka jednak je, i taj broj označimo s $K$. Uz oznake kao na slici 2. je:

$$a+b+c+d=K,$$
$$d+e+f+g=K,$$
$$g+h+i+a=K.$$

Primjenjujući isti postupak kao ranije, dobivamo: $a+d+g=3K-45$, pa je dalje (zašto?) $6 \le 3K-45 \le 24$, tj. $17 \le K \le 23$, odakle zaključujemo da je najmanji zbroj 17, a najveći 23. Nađite sva ostala rješenja.

*SRETAN BOŽIĆ I NOVA 1996. GODINA!*

Sl. 1.

Sl. 2.

Sl. 3.

MATKA 4 (1995./96.) br. 14. 81

[2]Jednadžba $b^2+c^2=98$ je diofantska jednadžba koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva između 1 i 9. Zainteresiranim Matkačima predlažemo da prouče dostupnu literaturu o diofantskim jednadžbama.

[3]Ako imate mogućnost, pročitajte članak A. Muminagića Božićni i novogodišnji dar (Matka broj 14 (1995./96.))