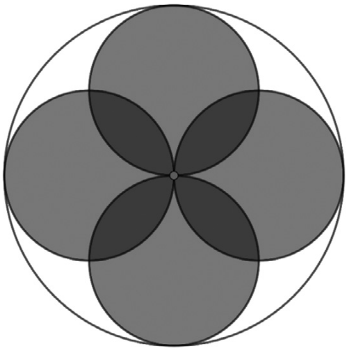
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Koliki dio površine velikoga kruga nije osjenčan?



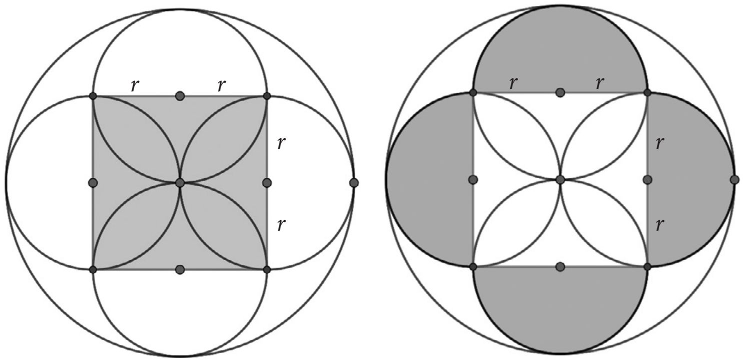
Rješenje: Ovaj ćemo zadatak riješiti na dva načina.

Uočimo da je duljina promjera malih krugova jednaka duljini polumjera velikoga kruga.

Označimo s r radijuse malih krugova. Radijus velikoga kruga onda je $2r$.

Prvi način:

Od površine velikoga kruga oduzet ćemo površinu kvadrata i površine četiriju polukrugova koji su prikazani na slikama.



Površina velikoga kruga je $P_{VK}=\left(2r\right)^2\pi=4r^2\pi$.

Površina kvadrata je $P_K=\left(2r\right)^2=4r^2$.

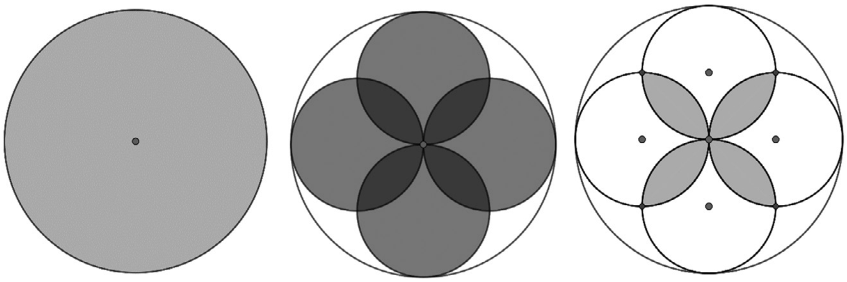
Površina jednoga manjega polukruga je $P_{PK}=\dfrac{1}{2}r^2\pi$.

Površina neosjenčanoga dijela velikoga kruga je

$$P=P_{VK}-P_K-4P_{PK}=4r^2\pi-4r^2-4\cdot\frac{1}{2}r^2\pi=\left(4\pi-4-2\pi\right)r^2=\left(2\pi-4\right)r^2=2.283r^2.$$

Drugi način:

Od površina velikoga kruga oduzet ćemo površine četiriju manjih krugova. Pritom smo tamnije „listiće” oduzimali dva puta jer su presjek dvaju manjih krugova. Stoga na kraju treba još jednom dodati površine tih „listića”.

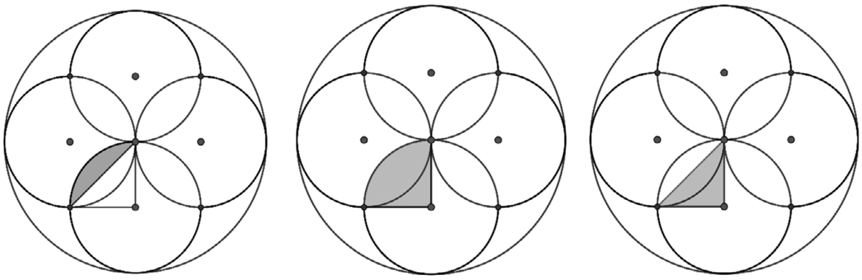


$$P_K - 4P_{MK} + 4P_L$$

Površina velikoga kruga je $P_{VK} = (2r)^2 \pi = 4r^2\pi$.

Površina maloga kruga je $P_{MK} = r^2\pi$.

Površina polovine „listića” jednaka je razlici površine četvrtine maloga kruga i površine odgovarajućega pravokutnoga trokuta s katetama duljine *r*.



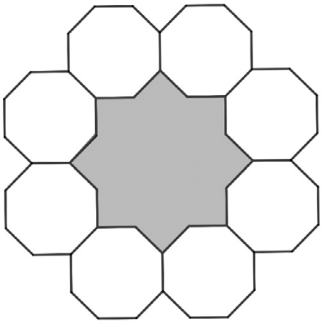
$$\frac{1}{2}P_L = \frac{1}{4}P_{MK} - P_\Delta$$

Površina jednoga „listića” je $P_L = 2\cdot\left(\frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\right) = \frac{1}{2}r^2\pi - r^2$.

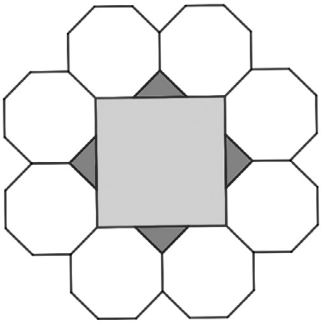
Površina neosjenčanoga dijela velikoga kruga je

$$P = P_K - 4P_{MK} + 4P_L = 4r^2\pi - 4r^2\pi + 4\cdot\left(\frac{1}{2}r^2\pi - r^2\right) = 2r^2\pi - 4r^2 = (2\pi - 4)r^2 = 2.283r^2.$$

Primjer 2. Kolika je površina lika omeđenog s osam sukladnih pravilnih osmerokuta kojima stranice imaju duljinu 1?

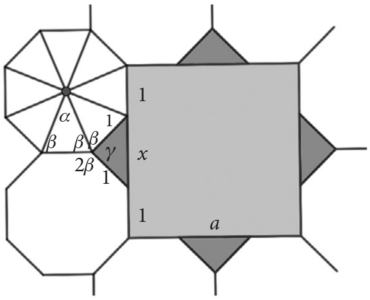


Rješenje: Istaknuti lik možemo podijeliti na kvadrat i četiri sukladna trokuta kao na donjoj slici.



Podijelimo li pravilni osmerokut na osam sukladnih jednakokračnih trokuta, za kutove tih trokuta vrijedi

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45° \text{ i } \alpha + 2\beta = 180°, \text{ iz čega slijedi } 2\beta = 180° - \alpha = 135°.$$



Također vrijedi $\gamma = 360° - 4\beta = 360° - 270° = 90°$, što znači da se radi o jednakokračnim pravokutnim trokutima koji zajedno s kvadratom tvore istaknuti lik.

Površina jednog takvog pravokutnog jednakokračnog trokuta kojemu katete imaju duljine 1 iznosi

$$P_T = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Duljina hipotenuze toga trokuta iznosi

$$x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

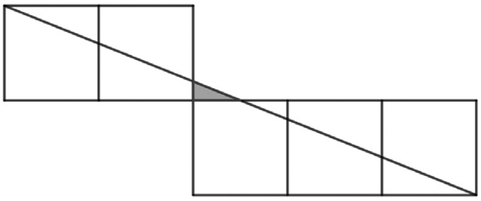
Stranica kvadrata ima duljinu $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Tražena površina istaknutoga lika jednaka je

$$P = 4P_T + a^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2,$$

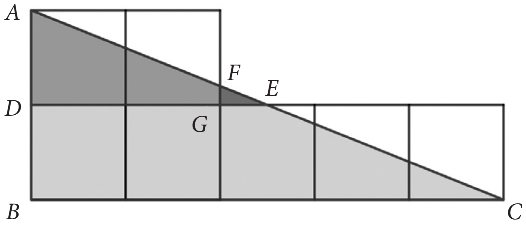
$$P = 2 + 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13.67$$

Primjer 3. Na slici je zadano pet sukladnih kvadrata. Kolika je površina jednoga od tih kvadrata ako je površina osjenčanoga trokuta jednaka 1?



Rješenje: Dopunimo sliku na sljedeći način.

Neka je duljina stranice kvadrata jednaka a.



Trokuti ABC i ADE su slični pa su njihove odgovarajuće stranice proporcionalne.

Slijedi $\frac{|DE|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|AB|}$, tj. $\frac{|DE|}{5a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$. Dakle, $|DE|=\frac{5a}{2}$.

Vrijedi $|GE|=|DE|-|DG|=\frac{5a}{2}-2a=\frac{a}{2}$.

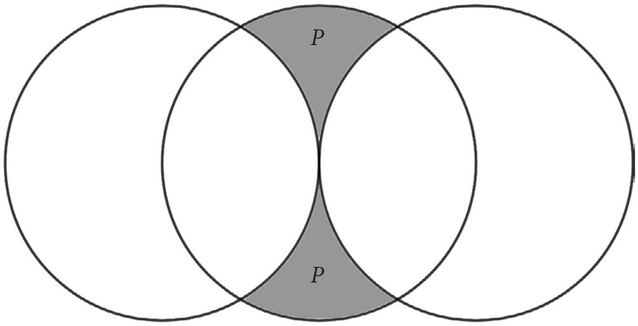
Trokuti ADE i FGE također su slični pa su i njihove odgovarajuće stranice proporcionalne.

Slijedi $\frac{|FG|}{|AD|}=\frac{|GE|}{|DE|}$, tj. $\frac{|FG|}{a}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}}=\frac{1}{5}$. Dakle, $|FG|=\frac{a}{5}$.

Površina trokuta FGE je 1 pa vrijedi $P_{FGE}=\frac{|FG|\cdot|GE|}{2}=1$, tj. $|FG|\cdot|GE|=2$.

Slijedi $\frac{a}{5}\cdot\frac{a}{2}=2$, tj. $\frac{a^2}{10}=2$. Dakle, $a^2 = 20$, što znači da je površina svakoga kvadrata na slici jednaka 20.

Zadatak 1. Koliki je zbroj osjenčanih površina označenih s P ako je radijus svih triju kružnica jednak 4?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/featured