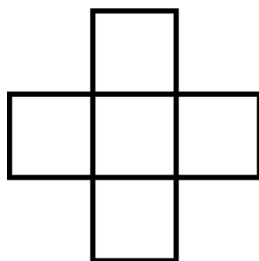


OD KVADRATIĆA DO KVADRATIĆA, OD KOCKICE DO KOCKICE

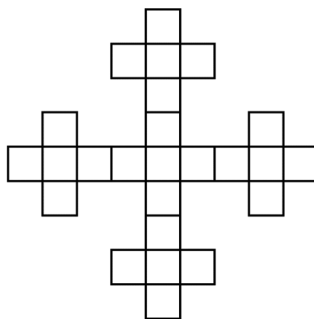
XV. gimnazija, David Ivanjek i Luka Duplančić

Kvadrat sa stranicom duljine 1 Fran je podijelio na 9 jednakih kvadrata te uklonio 4 mala kvadrata koja se nalaze u kutovima početnog kvadrata (vidi Sliku 1.). Kolika je površina jednog malog kvadratića? Kolika je površina dobivenog lika?



Slika 1.

Franu je dosadno pa je isti postupak ponovio na svakome od preostalih manjih kvadratića (vidi Sliku 2.). Kolika je površina najmanjih kvadratića? Kolika je površina dobivenog lika?



Slika 2.

Frana zanima kolika će biti površina lika ako navedeni postupak ponovi ukupno 10 puta. Kako mora ići u školu i ne stigne 10 puta uklanjati kvadratiće, pronađimo način kako to izračunati!

Površinu dobivenog lika najjednostavnije možemo izračunati tako da zbrojimo površine kvadratića.

Na početku (nakon nultog koraka) lik se sastoji od 1 kvadrata sa stranicom duljine 1. Njegova je ukupna površina $1 \cdot 1 = 1$.

Nakon prvog koraka lik se sastoji od 5 kvadrata površine $\frac{1}{9}$ (jer smo početni kvadrat podijelili na 9 jednakih) pa je ukupna površina $5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.



U drugome koraku svaki od 5 kvadrata podijelimo na 9 kvadratića i uklonimo 4 kutna kvadratića pa na svakom od 5 kvadrata ostane po 5 kvadratića. Stoga je ukupan broj novonastalih kvadratića $5 \cdot 5 = 25$. Svaki od novonastalih kvadratića ima $\frac{1}{9}$ površine prijašnjih kvadrata čija je površina bila $\frac{1}{9}$. Zato je površina svakog novonastalog kvadratića $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$. Nakon dva koraka ukupna je površina lika $25 \cdot \frac{1}{81} = \frac{25}{81}$.

Nakon trećeg koraka bit će $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kvadratića (umjesto svakog kvadratića iz prošlog koraka dobijemo 5 novih), a površina svakog kvadratića je $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{729}$ (svaki novi kvadratić ima površinu koja iznosi $\frac{1}{9}$ površine kvadratića iz prošlog koraka). Ukupna površina lika je $\frac{125}{729}$.

Nakon 10 koraka imat ćemo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5$ kvadratića, svaki površine $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \dots \cdot \frac{1}{9}$.

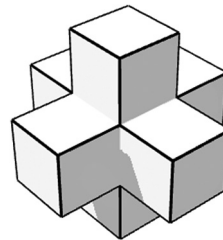
Ukupna površina je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \dots \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \dots \cdot \frac{5}{9}$.

Radi lakšeg zapisa uvedimo oznaku $\left(\frac{5}{9}\right)^{10}$, što znači pomnoži $\frac{5}{9}$ sa samim sobom 10 puta. Dakle, imamo 5^{10} kvadratića, svaki površine $\left(\frac{1}{9}\right)^{10}$. Ukupna je površina $5^{10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{10} = \left(\frac{5}{9}\right)^{10} \approx 0.028$.

Općenito, možemo reći kako je nakon n koraka ukupna površina lika jednaka $\left(\frac{5}{9}\right)^n$. Broj $\frac{5}{9}$ manji je od 1, stoga pomnožen sam sa sobom daje još manji broj. Što više puta pomnožimo $\frac{5}{9}$ samim sobom, to dobivamo sve manji i manji broj, no taj broj uvijek mora biti veći od 0 jer množimo samo pozitivne brojeve. Zaključujemo kako je površina lika nakon svakog koraka sve manja i manja, no nikada neće biti manja ni jednaka 0.

Fran ima i kocku s bridom duljine 1, tj. kocku obujma 1. Inspiriran svojim dvodimenzijskim likovima, odlučio je sličan postupak ponoviti na kocki.

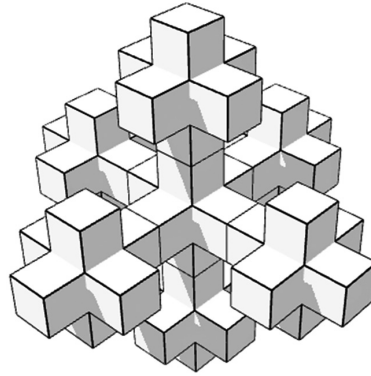
- Podijelio je kocku na 27 jednakih kockica te uklonio svih 20 kockica „na rubu” velike kocke. Tako mu je ostalo 7 kockica (vidi Sliku 3.). Koliki je obujam svake preostale kockice? Koliki je obujam dobivenoga tijela?



Slika 3.

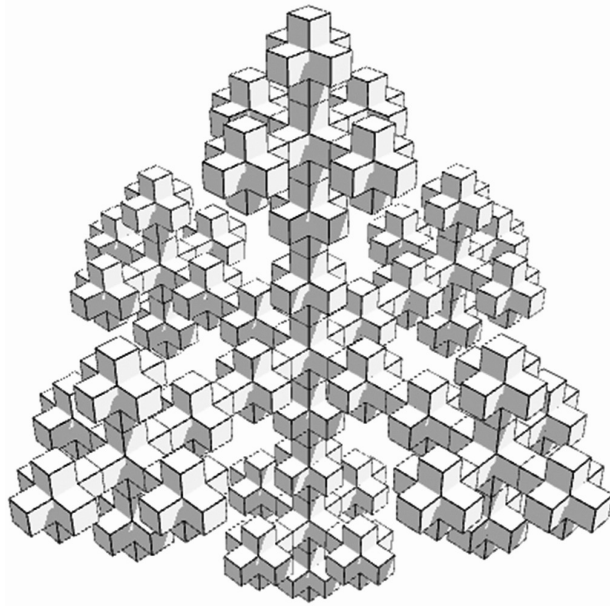


2. Kao i prije, Fran će svaku od manjih kockica podijeliti na 27 još manjih kockica te ukloniti 20 rubnih (vidi Sliku 4.). Koliki je obujam najmanjih kockica? Koliki je obujam novodobivenoga tijela?



Slika 4.

3. Možete li naći općeniti izraz za obujam tijela nakon n ovakvih koraka?



Slika 5. (nakon 3 koraka u 3D slučaju)

Rješenja zadataka

1. $\frac{27}{7} \approx 0.2593$
2. $\frac{7}{7} \cdot \frac{27}{27} \approx 0.0672$
3. $\left(\frac{27}{7}\right)^n$

