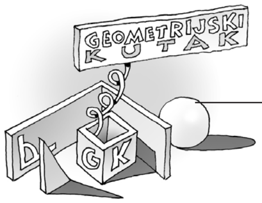
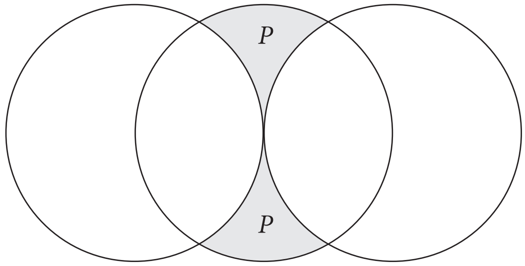


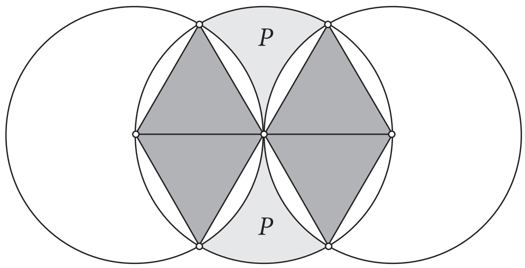
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Koliki je zbroj osjenčanih površina označenih s P ako je radijus svih triju kružnica jednak 4?



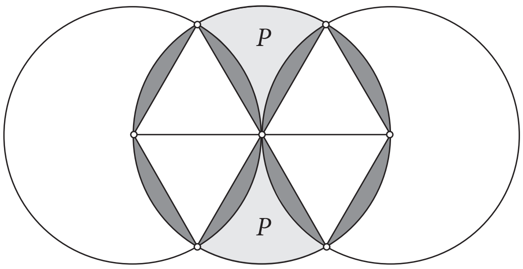
Rješenje: Zadatak ćemo riješiti tako što ćemo od površine središnjega kruga oduzeti dijelove izvan površine P. Prvo u središnjem krugu istaknemo površine četiriju jednakostraničnih trokuta kojima stranice imaju duljinu jednaku radijusu kruga.

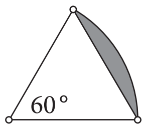


Jedan od tih trokuta ima površinu $P_\Delta = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$ pa je njihova ukupna površina jednaka

$$4P_\Delta = 4\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}\text{ . Za } r = 4 \text{ dobivamo } 4P_\Delta = 16\sqrt{3}\text{ .}$$

Zatim istaknemo još osam kružnih odsječaka čije ćemo površine P_O također oduzeti od površine središnjega kruga.





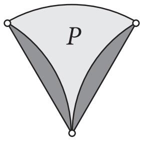
Površina jednoga odsječka dobije se tako što se od površine kružnoga isječka (šestina kruga jer je središnji kut 60°) oduzme površina jednakostraničnoga trokuta.

$$8P_O = 8\cdot\left(\frac{P_K}{6} - P_\Delta\right) = 8\cdot\left(\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4r^2\pi}{3} - 2r^2\sqrt{3}.$$

Za $r = 4$ dobivamo $8P_O = \dfrac{64\pi}{3} - 32\sqrt{3}$.

Označimo površinu kruga P_K koja iznosi $P_K = r^2\pi = 16\pi$. Tražena je površina osjenčanoga dijela

$$2P = P_K - 4P_\Delta - 8P_O = 16\pi - 16\sqrt{3} - \left(\frac{64\pi}{3} - 32\sqrt{3}\right) = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \approx 10.96.$$

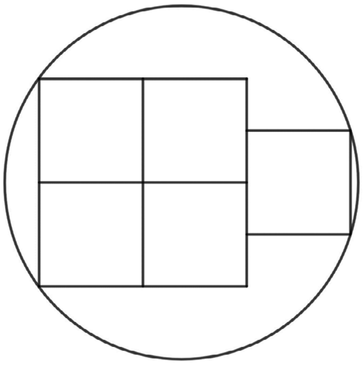


Isti se zadatak mogao riješiti i na drugi način. Na primjer, od šestine kruga treba oduzeti površinu dvaju kružnih odsječaka. Na taj način dobiva se površina lika označena P.

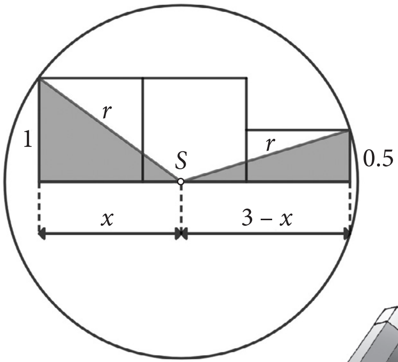
$$P = \frac{P_K}{6} - 2P_O = \frac{r^2\pi}{6} - 2\cdot\left(\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{16\pi}{6} - \frac{16\pi}{3} + 8\sqrt{3} \approx 5.48.$$

Dakle, $2P \approx 10.96$.

Primjer 2. U kružnicu radijusa r upisano je pet sukladnih kvadrata sa stranicama duljine 1, kako je prikazano na slici. Koliko je r?



Rješenje: Označimo sa S središte zadane kružnice. Unutar kružnice istaknimo dva pravokutna trokuta kojima su hipotenuze polumjeri kružnice (vidi sliku). Jedna kateta lijevoga trokuta ima duljinu 1, a duljina druge nije poznata pa je možemo označiti s x. Desni trokut ima jednu katetu duljine 0.5, a druga ima duljinu $3 - x$ jer zbroj duljina donjih kateta mora biti 3.



Primijenimo Pitagorin poučak na oba istaknuta pravokutna trokuta.

$$1^2 + x^2 = r^2$$

$$0.5^2 + (3-x)^2 = r^2$$

Desne su strane jednakosti jednake r^2 pa su i lijeve strane jednake, tj. vrijedi

$$1^2 + x^2 = 0.5^2 + (3-x)^2$$

$1^2 + x^2 = 0.25 + 9 - 6x + x^2$ (član x^2 na lijevoj i desnoj strane jednakosti se ponište)

$$1 = 9.25 - 6x$$

$$6x = 8.25$$

$$x = 1.375$$

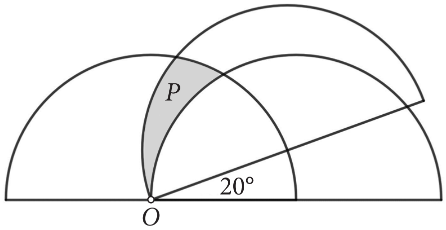
Dobiveni rezultat uvrstimo u jednu od početnih jednadžbi.

$$1^2 + 1.375^2 = r^2$$

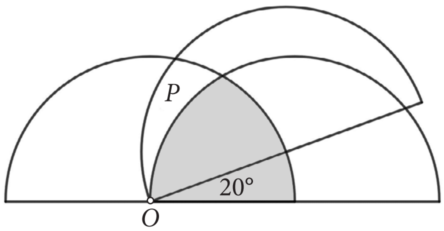
$$r^2 = 1 + \left(\frac{11}{8}\right)^2$$

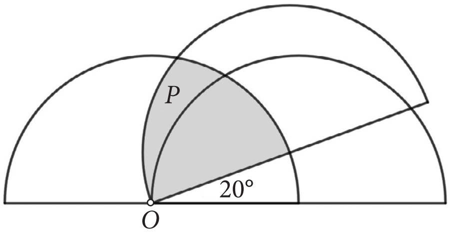
$r^2 = \dfrac{185}{64}$, iz čega slijedi da je traženi $r = \dfrac{\sqrt{185}}{8} \approx 1.7$.

Primjer 3. Desni polukrug zarotiran je za 20° oko točke *O*. Kolika je površina *P* osjenčanoga dijela na slici ako svi polukrugovi imaju polumjer duljine 3?

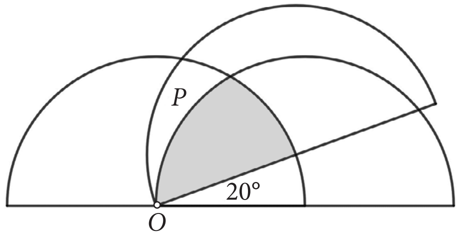


Rješenje: Rotacijom lika ne mijenja se površina pa možemo primijetiti da istaknuta područja na donjim slikama imaju jednake površine.

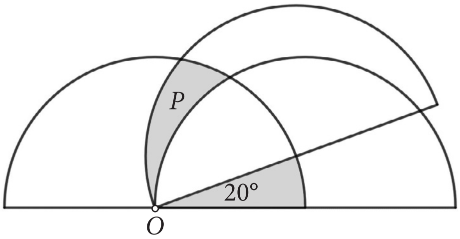




Istaknuta područja imaju jedan zajednički dio.



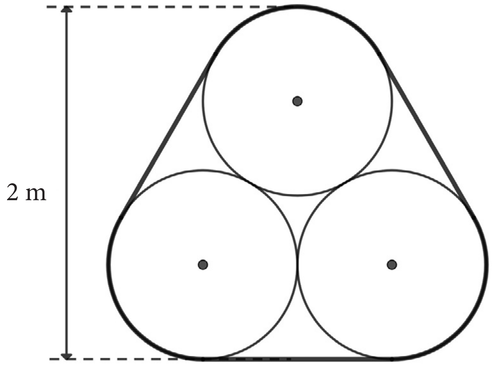
To znači da preostali dijelovi obaju istaknutih područja moraju imati jednake površine.



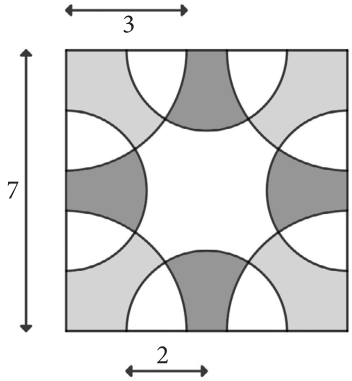
Dakle, površina P jednaka je površini kružnoga isječka kojem središnji kut ima veličinu 20°.

$$P = \frac{20^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{1}{18} \cdot 9\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak 1. Kolike je duljine remen koji obavija tri jednaka kotača na slici?



Zadatak 2. Kolika je razlika površina svjetlije i tamnije obojenih područja ako su zadane duljine stranica kvadrata i radijusi kružnih lukova?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos