Matka 32 (2023./2024.) br. 126

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

SANGAKU MATEMATIKA

Matemagičari često pri rješavanju problema primjenjuju različite pristupe. Ovdje ćemo ilustrirati nekoliko problema koje su riješili stari japanski Matemagičari, a danas ih mogu riješiti i oni vrlo mladi pomoću sadržaja i postupaka iz školske matematike.

Matematički panoi (*sangaku*), koje katkada možemo vidjeti obješene iznad vratiju crkava i svetišta u Japanu, svaki put privuku pozornost turista sa zapada. To su drvene ploče na koje su urezani geometrijski problemi. Do danas ih je sačuvano 817, a raspoređeni su nejednako po okruzima/regijama. Oko stotinu ih je u prefekturi Iwate, Fukušime i Saitame. Samo ih je petnaestak u gradu Tokiju, ali su oštećeni potresima i ratovima.

Problemi prikazani na tim pločama vrlo su različiti. Tamo se često nalaze geometrijski problemi s krugovima, kvadratima, trokutima i elipsama. Pano sadrži problem i njegovo rješenje, potpis/potpise onog koji ga je smislio i riješio, te rješenje problema. Većina panoa nije previše stara. Pojedine su rekonstruirali povjesničari.

Sangaku matematika tradicionalni je oblik japanske matematike koji datira iz razdoblja Edo (1603. – 1868.). Riječ *sangaku* na japanskom jeziku znači *obješena ploča* ili *tabla na kojoj se piše* zato što su matematički problemi i geometrijski poučci bili napisani na drvenim pločama i obješeni na svetištima i hramovima.

Ove matematičke probleme postavili su matematički entuzijasti, a često su ih rješavali i proučavali samuraji, trgovci i obični građani. Sangaku problemi često su bili inspirirani izazovima iz geometrije i trigonometrije. Cilj je bio pronaći kreativna rješenja i dokaze za ove probleme, a rješenja bi bila izložena javnosti u svetištima i hramovima.

Ono što sangaku matematiku čini posebnom estetska je vrijednost i ljepota u njihovim rješenjima. Ponekad bi rješenja uključivala prekrasne geometrijske slike i simetriju. Neka rješenja također bi bila umetnuta u obliku haiku poezije.

Sangaku matematika ima povijesni i kulturni značaj u Japanu. Ti sangaku problemi pokazuju kako su ljudi u to vrijeme vrednovali matematiku i kako su se bavili matematičkim izazovima u svakodnevnom životu.

Danas se sangaku matematika često proučava kao dio matematičke povijesti i ima određeni kulturološki utjecaj u Japanu. Neka originalna rješenja i ploče s problemima sačuvani su u muzejima i arhivima diljem Japana.

Sangaku problemi specifični su za japansku matematičku tradiciju iz razdoblja Edo, a izvori koji se izravno bave ovom temom relativno su rijetki. Međutim, postoje neke knjige koje se bave tradicionalnom japanskom matematikom i u kojima se može naći i nešto o sangaku problemima. Evo nekoliko takvih knjiga:

1. *Wasan: The Fascination of Traditional Japanese Mathematics* autora Yosuke Hagihare. Ova knjiga pruža uvid u različite aspekte tradicionalne japanske matematike, uključujući sangaku probleme. Autor istražuje matematičke teme iz Edo razdoblja i predstavlja neke od poznatih sangaku problema.
2. *The Crane's Walk: Plato, Pluralism, and the Inconstancy of Truth* autora Jeremyja M. Inglisa. Iako ova knjiga ne obrađuje isključivo sangaku probleme, istražuje matematičke koncepte u tradicionalnoj japanskoj matematici, uključujući geometrijske probleme koji su bili popularni u tom razdoblju.
3. *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry Problems* autora Fukagawe Hidetoshija i Tonyja Rothmana. Iako ova knjiga nije posvećena isključivo sangaku problemima, nudi zbirku tradicionalnih japanskih geometrijskih problema, uključujući neke koji su povezani s tradicijom sangaku matematike.

Edo razdoblje u japanskoj matematici traje od 1603. do 1868. godine, a nazvano je prema gradu Edo (danas Tokio) koji je bio sjedište šogunata Tokugawa i glavni grad Japana u to vrijeme. Tijekom Edo razdoblja matematika je u Japanu doživjela znatan razvoj i postala važan dio japanske kulture i obrazovanja. U to vrijeme japanski su Matemagičari usavršili tradicionalne metode koje su se koristile stoljećima, a također su usvojili i preuzeli brojne matematičke tehnike iz Kine i drugih azijskih zemalja.

Jedna od glavnih karakteristika japanske matematike u Edo razdoblju bila je njezina primjena u praktične svrhe, kao što su trgovina, zemljišne mjere, arhitektura i izrada kalendara. Vlada šogunata Tokugawa poticala je razvoj matematike kao korisne discipline koja je služila društvu.

Tijekom Edo razdoblja matematičko je znanje postalo sveprisutno pa su se počeli objavljivati brojni matematički tekstovi i priručnici. Ti tekstovi obuhvaćaju različite aspekte matematike, uključujući aritmetiku, algebru, geometriju, trigonometriju i astronomiju.

Edo razdoblje također je razvijalo razvoj matematičke umjetnosti, poput kaligrafije i umjetnosti geometrijskih uzoraka, koji su često kombinirali matematičke principe s estetskim vrijednostima. Iako je Edo razdoblje donijelo značajan napredak u japanskoj matematici, nakon njega su se japanski Matemagičari sve više počeli povezivati s europskim matematičkim idejama i započela je modernizacija japanske matematike prema zapadnim standardima. Ipak, naslijeđe Edo razdoblja i dalje ima važno mjesto u japanskoj matematičkoj kulturi.

1. Uvod

U Matki smo nekoliko godina (od broja 67. u ožujku 2009. godine do broja 81. u rujnu 2012. godine) objavljivali različite *sangaku* zadatke otkrivajući na kojem hramu, kada i gdje su napisani.

Verziju jednog takvog zadatak objavili smo u Matki broj 118. u prosincu 2021. godine kao strip zadatak *Kad će se sresti?*

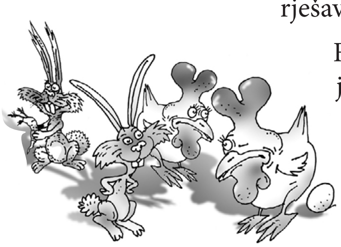
U ovom ćemo tekstu prikazati nekoliko zadataka iz knjige *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry Problems* (*Sveta matematika: Japanska hramska geometrija*) Fukagawe Hidetoashija i Tonyja Rothmana s predgovorom Freemana Dysona iz poglavlja *Lakši geometrijski problemi na hramovima*.

Uvodno prikažimo sljedeća dva problema.

Ploču na kojoj je napisan problem 1. napisao je Ufu Chosaburo 1743. godine u hramu Kurasako Kannon. Veličina ploče je 76 cm × 33 cm.

Problem 1. 50 je kokoši i zečeva. Ukupan broj nogu je 122. Koliko ima kokoši, a koliko zečeva?

Rješenje: G. Polya u svojoj je knjizi *Matematičko otkriće* dao, uz algebarsko rješavanje, i domišljato rješenje jednog učenika:

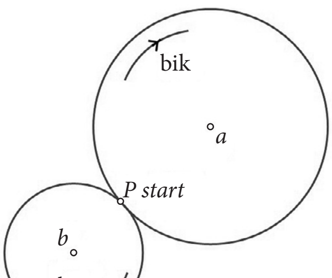


> Farmer je našao svoje životinje u vrlo čudnoj pozi: svaka kokoš stajala je na jednoj nozi, a svaki zec na zadnjim nogama. U tom čudnom položaju sudjelovala je točno polovina svih nogu. Taj broj možemo razmatrati i kao broj koji se dobije ako brojimo samo noge – ako se svaka kokošja broji samo jednom, a zečja dva puta. Oduzmite od ovakvog broja nogu broj glava svih životinja i ostat će vam broj glava zečeva. Dakle, zečeva ima 11, a kokoši je 39.

Ovaj je način prikladan i ako zamijenimo posebno odabrane brojeve bilo kojim drugim brojevima. Samo rješenje koje može biti izloženo manje neobično zahtijeva jasni intuitivni obuhvat situacije. Polya je u knjizi napisao: *Čestitam četrnaestogodišnjaku koji je našao takvo rješenje! No, blistave ideje ne niču tako često. Da se takva ideja pojavi, nužna je rijetka sreća.*

Tanikawa Taizo objesio je ploču koja sadrži problem 2. godine 1846. u hramu Yuisin u Chita-gunu, prefektura Aichi. Široka je 98 cm, a visoka 48 cm.

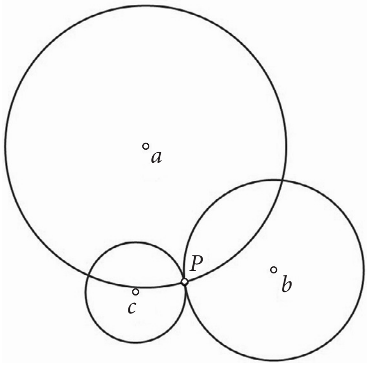
Sangaku je bio nepoznat sve do 1979. godine kada je netko posjetio hram, pronašao ga praznog i napuštenog i otkrio ploču.



Problem 2. Kružna cesta A opsega 48 km dodiruje u točki P drugu kružnu cestu B opsega 32 km. Bik i konj kreću iz točke P cestom A odnosno B. Bik prijeđe 8 km dnevno, a konj 12 km dnevno. Nakon koliko se dana bik i konj ponovno sretnu u P?

Rješenje: Neka je d broj dana kretanja bika i konja. Tada vrijedi za bika $8d = 48m$, gdje je m cijeli broj obilazaka kružne ceste A. Slično zaključujemo da za konja vrijedi $12d = 32n$, gdje je n cijeli broj obilazaka kružne ceste B. Odavde dobivamo da je $\frac{m}{n} = \frac{4}{9}$. Za najmanje moguće prirodne brojeve $m = 4$ i $n = 9$ dobivamo $d = 24$ dana.

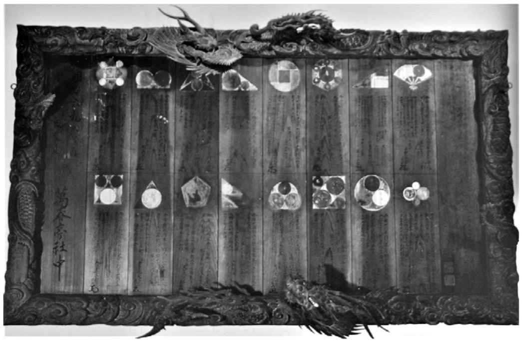
2. Primjeri sangaku problema



Ploču na kojoj je napisan ovaj problem objesio je Hara Toyokatsu 1829. u svetištu Katsurahama u Akigunu u prefekturi Hirošima, a ona je dimenzija 81 cm × 46 cm. Sam problem citiran je iz knjige *Saitei Sanpo* ili *Revizija određenih problema* iz 1797. Fujite Kagena.

Problem 3. Kao što je prikazano na slici, kroz točku P prolaze kružnice A, B i C opsega $56+\frac{2}{3}$ km, $30+\frac{5}{7}$ km i $13+\frac{3}{4}$ km. Tri konja a, b i c počinju se istovremeno kretati oko A, B i C iz P. Brzina konja a je $8+\frac{41}{1000}$ km po danu, konja b je $6+\frac{123}{4000}$ km po danu, a c $4+\frac{41}{2000}$ km po danu. Koliko će dana proći prije nego što se tri konja ponovno sretnu u P?

(***Rješenje:*** Konji će se opet sresti nakon 20 000 dana.)



Sljedeću elementarnu vježbu može se vidjeti kao drugu u donjem redu na sangaku ploči u boji u svetištu Katayamahiko.

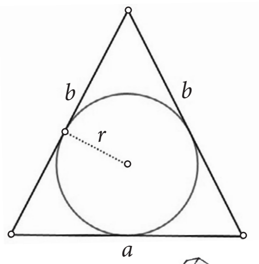
Ova ploča uokvirena zmajem jedna je od najljepših sangaku ploča, a posvetio ju je Irie Shinjun 1873. godine, u dobi od sedamdeset osam godina, u svetištu Kataymahiko u gradu Murahisagun Okayama. Sangaku je dimenzija 162 cm × 88 cm. U predgovoru stoji:

Matematika je duboka. Ljudi imaju svoje metode za rješavanje problema. To vrijedi i za Zapad, kao i za Kinu i Japan. Tko ne uči marljivo, ne može riješiti nijedan problem. Matematiku još nisam svladao iako učim od mladosti.

I tako nisam nikome postao učitelj nego su me neki ljudi zamolili da ih poučavam matematici. Pokazao sam im rješenja problema i objesit ću sangaku u obližnjem svetištu Katayamahiko na kojem je ispisano šesnaest problema. Ovu ploču posvećujem svetištu u nadi da će moji učenici dobiti više stipendija u matematici.

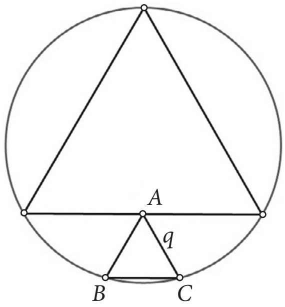
Problem 4. Jednakokračnom trokutu sa stranicama $a = 12$ i $b = 10$ upisana je kružnica polumjera r (vidi sliku na rubu). Izračunajte r.

(***Rješenje:*** $2r = 6$)

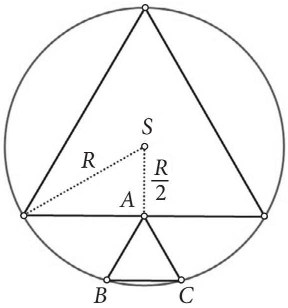


Znamo za sljedeći problem iz neobjavljenog rukopisa *Jinbyo Bukkaku Sangakushu* ili *Zbirke Sangakua iz Aida škole* koju je napisao Aida Yasuaki (1747. – 1717.) nepoznatog datuma. Problem je izvorno predložio 1800. godine Kobata Atsukuni, učenik škole Aida, i predstavio ga na ploči u hramu Kanzeondo u gradu-dvorcu Toba.

Problem 5. U kružnicu promjera $2R = 100$ upisani su veliki i mali jednakostranični trokuti, kao što je prikazano na slici. Pomoću R izrazite stranicu q malog jednakostraničnog trokuta ABC ako je A polovište jedne stranice velikog trokuta.



Rješenje: Neka je S središte kružnice. Tada je $|SA| = \frac{R}{2}$ i $|SB| = R$.



Prema Pitagorinu poučku vrijedi $R^2 = \left(\frac{R}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)q\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Za q dobivamo $q = \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}\right)R \approx 26.7$

3. Sangaku problemi za rješavanje

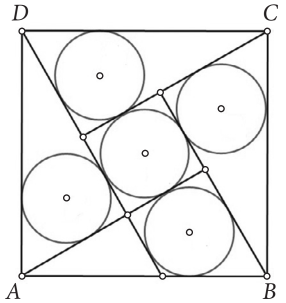
Predlažemo vam nekoliko sangaku problema japanskih Matemagičara za samostalno rješavanje.

1. Ovaj zadatak objavljen je 1820. godine u okrugu Miyagi. Sadrži jedan rezultat klasične japanske matematike iz razdoblja Edo, poznate pod nazivom *wasanska*.

Zadatak: Zadane su dvije kružnice koje se dodiruju izvana, s polumjerima duljine r_1 i r_2, te njihova zajednička tangenta t. Dokažite da je udaljenost među diralištima kružnica na zajedničkoj tangenti jednaka $2\sqrt{r_1 r_2}$.

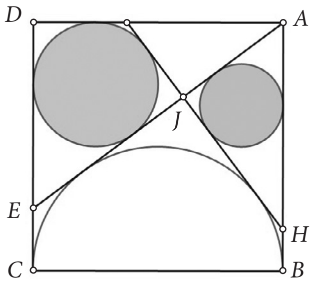
2. Ovaj je sangaku iz 1811. godine. Nalazi se u Ichikawadani-Ohmoto, u prefekturi Nagano. Ovdje navodimo šesti zadatak.

Zadatak: Pet sukladnih kružnica sa središtima S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 polumjera r upisane su u kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine a. Koliki je omjer $r : a$?



3. Ovaj je sangaku napisan 1883. godine. Nalazio se u svetištu u prefekturi Iwate, no danas više ne postoji.

Zadatak: Nad stranicom $\overline{BC}$ kvadrata ABC kao promjerom nacrtana je polukružnica. Iz vrha A nacrtana je tangenta na tu polukružnicu. Ona siječe stranicu $\overline{CD}$ tog kvadrata u točki E. U trokut AED upisana je kružnica polumjera r_1. Druga zajednička vanjska tangenta ove kružnice i polukružnice siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki H, a dužinu $\overline{AE}$ u točki J. U trokut AHJ upisana je kružnica polumjera r_2. Dokažite da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$.



4. Ovaj se problem nalazi na ploči iz 1875. godine koja je još uvijek izložena u svetištu Kamagata u gradu Nagawi u prefekturi Nagano.

Zadatak: U sferu su upisani kocka i dvije manje sfere tako da jedna sfera dodiruje donju bazu kocke u središtu te baze i sferu, a druga sfera dodiruje gornju bazu kocke u središtu te baze i sferu. Ako su duljina brida kocke i promjer donje sfere jednake, koliki je omjer polumjera upisanih sfera?

Napomena. Jednom knjigom iz Matkine biblioteke nagradit ćemo onoga tko pošalje rješenje barem jednog zadatka. Objavit ćemo i njegovo rješenje.