Povijest teorije skupova u 19. stoljeću

Tin Adlešić[1]

Praćenje početaka bilo koje matematičke i znanstvene discipline uvijek je suočeno s određenim poteškoćama. Naizgled to nije slučaj s teorijom skupova za koju se često tvrdi da je u potpunosti djelo Georga Cantora. Neupitan je Cantorov doprinos njezinu razvoju i uzdizanju do samostalne matematičke discipline, ali ističući samo njega zanemaruju se ključni doprinosi drugih matematičara, posebice Dedekinda.

U ovom povijesnom prikazu opisujemo kako je nastala teorija skupova te njezin razvoj u drugoj polovici 19. stoljeća. Glavnu liniju razvoja teorije predstavljaju Richard Dedekind i Georg Cantor, no to ne znači da su oni jedini koji je proučavaju. Mnogi matematičari dali su svoj doprinos teoriji, ali trend razvoja općenito je diktirao spomenuti dvojac.

1. Početak teorije skupova (1850. – 1874.)

Teorija skupova nastala je na njemačkom kulturnom području sredinom 19. stoljeća. Razloge za takvo vrijeme i mjesto možemo tražiti u intelektualnim, filozofskim i matematičkim okolnostima. Reforma njemačkih sveučilišta poslije poraza od Napoleona, a posebice osnivanje Berlinskog sveučilišta[2] 1810. godine, označile su promjene u načinu bavljenja znanošću. Obrazovanje nije bilo usmjereno samo na „korisne" primjene, kao što je to bio slučaj u Francuskoj nakon građanske revolucije, već na cjelokupnu izgradnju osobe, izgledom više nalik na renesansni ideal. Za posljedicu imamo približavanje humanističkih disciplina i filozofije prirodnim znanostima i matematici.

U filozofiji pretežito prevladava Kantov utjecaj, koji se u većini slučajeva pokušava prilagoditi novim tendencijama. Često se određene postavke Kantove filozofije odbacuju i zamjenjuju drugima, a neke se dodatno naglašavaju. U takvim filozofskim okolnostima nastaje *konceptualni pristup* u matematici, čiji su pioniri Carl Friedrich Gauss, Carl Gustav Jacobi i Gustav Lejeune Dirichlet. Konceptualni pristup određeno područje matematike svodi na jedan jedinstveni koncept pomoću kojeg se općenitije iskazuju i dokazuju određene tvrdnje. Prvo korištenje konceptualnog pristupa u punom sjaju pojavljuje se kod Bernharda Riemanna i njegovog pojma mnogostrukosti, a kroz njegov utjecaj i kod Richarda Dedekinda u pojmu sistema, odnosno skupa.

[1]Tin Adlešić, Učiteljski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

[2]Danas Humboldtovo sveučilište u Berlinu.

1.1 Riemann i teorija skupova

Centralni pojam Riemannovog matematičkog rada je pojam mnogostrukosti. Definiciju tog pojma Riemann uvodi u svom habilitacijskom radu iz 1854. godine, a začetci te ideje sežu nekoliko godina ranije (1851.) te se nalaze u njegovoj doktorskoj disertaciji. Glavni Riemannov cilj u disertaciji je postaviti teoriju analitičkih funkcija na sigurnije temelje i sistematičnije prikazati dotadašnje rezultate. Za razliku od Weierstrassa, koji je također nastojao postići strogim i preciznim dokazima, Riemann je želio teoriju zasnovati na općenitijim i apstraktnijim pojmovima. Tako je došao, pokušavajući pronaći nužne i dovoljne uvjete koji određuju analitičke funkcije, do pojma plohe koji će kasnije poopćiti u pojam mnogostrukosti.

Riemannove ideje o apstraktnijem i općenitijem prikazu teorije, premda prisutne u doktorskoj disertaciji, svoj pravi oblik dobivaju u habilitacijskom radu. Kao što smo već spomenuli, pojam plohe iz disertacije sada je poopćen u pojam mnogostrukosti te mu cilj nije više samo podariti stabilne temelje teoriji analitičkih funkcija, već mnogo ambiciozniji. Uvedeni pojam mnogostrukosti trebao bi poslužiti kao temelj cijeloj teoriji magnituda[3], što znači cijeloj tadašnjoj teorijskoj matematici. Mnogostrukosti su za Riemanna usko povezane s tradicionalnom logičkom teorijom klasa; one se sastoje od elemenata koji potpadaju pod određeni koncept. Drugim riječima, mnogostrukosti su ekstenzije koncepata, a to znači da predstavljaju (logičke) klase. Između ostalog, mnogostrukostima je postignuto da se geometrija u potpunosti oslobodila pozivanja na prostorni zor te je postala apstraktna teorija. Mnogostrukosti su također značajne i s aritmetičke strane jer potiču ideju da bi mogle poslužiti kao sredstvo za preciznije definiranje pojma broja; ideja koju će na određeni način od Riemanna preuzeti Dedekind. Nažalost, Riemannove ideje iz habilitacijske teze nisu bile poznate velikom broju matematičara, već maloj grupi njegovih suradnika, uključujući Dedekinda, i možda nekolicini talijanskih matematičara. Šira javnost s njima je upoznata tek 1868. godine Dedekindovim objavljivanjem Riemannove habilitacijske teze, zajedno s jednim Riemannovim člankom o trigonometrijskim redovima.

Riemannovi najvažniji doprinosi su u analizi i teoriji brojeva, no uvođenje pojma mnogostrukosti pridonijelo je stvaranju povoljnog ozračja za daljnji konceptualni i apstraktni razvoj baziran na njima. Upravo je Riemann prvi iznio ideju o zasnivanju cjelokupne matematike na jedinstvenom apstraktnom principu. Nemoguće je precijeniti utjecaj Riemannovih temeljnih ideja na Dedekinda i Cantora, što najbolje oslikava činjenica da je Cantor ono što danas nazivamo teorijom skupova nazivao *teorijom mnogostrukosti*.

1.2 Rani Dedekindovi doprinosi

Prvu polovicu Dedekindovog znanstvenog djelovanja karakterizira nekoliko značajki: pokazuje veliku posvećenost sistematiziranju postojećeg znanja, oslanja se na

[3]U drugoj polovici 19. stoljeća vladala je velika zbrka u terminologiji. Teorija magnituda nije ništa drugo nego teorija o realnim brojevima. Danas bi bilo uobičajeno nazivati je analizom, ali tada su je nazivali raznim imenima poput algebre, teorije brojeva, teorije kontinuuma, aritmetike i slično.

stroge i precizne dokaze (utjecaj Dirichleta), te značajno koristi skupovnu terminologiju. Habilitacijski rad iz 1854. godine ne pokazuje još uvijek punu raskoš Dedekindovog talenta i ne može se naslutiti njegovo kasnije područje istraživanja. Ipak se u njemu naziru ideje koje će s vremenom doći do izražaja; već spomenuta strogost u dokazima i razvoju teorije, posebno naglašavanje povijesnog razvoja matematičkih ideja, te ideja o postupnom razvoju aritmetike, počevši s prirodnim brojevima, definicijskom nadogradnjom koja završava s kompleksnim brojevima. Ipak, u habilitacijskom radu još nema naznaka skupovnog jezika.

Od 1855. godine glavno Dedekindovo područje rada je algebra. Veći dio vremena između 1855. i 1858. godine posvetio je reformulaciji i sistematizaciji dotadašnjeg znanja. Rezultate do kojih je tada došao nije odmah objavio, što je karakteristično za njegovo znanstveno djelovanje. To ne znači da je općenito rijetko objavljivao, već da je određeni materijal dugo i detaljno analizirao prije negoli se odlučio na objavu. Zbog toga imamo situaciju da je nekoliko ideja iz njegovog ranijeg perioda sadržano u skicama sve do njihovog konačnog objavljivanja tek nekoliko desetljeća kasnije. Ono što se u tom periodu može jasno vidjeti, i u neobjavljenim i u objavljenim radovima, korištenje je skupovne terminologije. Budući da Dedekindov habilitacijski rad ne sadrži naznake te terminologije, može se zaključiti kako je Riemann izvršio velik utjecaj na njega svojim habilitacijskim radom. U svojim radovima Dedekind za skupove koristi pojmove poput *domene* i *kompleksa*, a u jednom članku iz 1857. godine pojmove *klase* i *sistema*. S vremenom će se u njegovoj terminologiji pojam sistema ustaliti kao standardni naziv za skupove.

Jedan od glavnih problema koji je zaokupljao Dedekindovu pažnju najranije od 1856. godine je faktorizacija na proste ideale. Navedeni problem u početku je pokušavao riješiti tada uobičajenim sredstvima, što znači bez korištenja skupovnog jezika. Iako je postigao određene uspjehe, nije uspio svoj naum u potpunosti ostvariti. Godine 1862. odustaje od navedenog problema i posvećuje se uređivanju i izdavanju neobjavljenih radova Gaussa, Dirichleta i Riemanna, a najviše vremena ulaže u pripremanje Dirichletovih predavanja o teoriji brojeva. Pripremajući drugo izdanje Dirichletovih predavanja 1869. godine, ponovno se vraća na problem faktorizacije. Ovaj put koristi skupovni jezik i zaključuje kako se jedino pomoću njega problem može riješiti na odgovarajući način. Svoju teoriju ideala, zajedno s rješenjem problema faktorizacije, objavljuje 1871. godine kao deseti dodatak Dirichletovim predavanjima. U tom dodatku uvodi mnoge nove pojmove poput polja kompleksnih brojeva, algebarskog broja, modula i ideala. No, za nas najvažnije, nedvosmisleno koristi jezik skupova, gotovo na jednak način na koji se i danas koristi u algebri. Primjerice, polje definira kao „svaki skup beskonačno mnogo realnih ili kompleksnih brojeva, koji su zatvoreni i potpuni u sebi tako da je zbroj, razlika, umnožak i kvocijent bilo koja dva broja ponovno broj istog skupa." ([5]). Koristi pojmove najveće zajedničke mjere dvaju polja, što odgovara presjeku dvaju polja, te najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju polja, što pak odgovara uniji dvaju polja. Sličnu terminologiju upotrebljava i za module te ideale. Vrijedi naglasiti kako je Dedekindovu terminologiju presjeka i unije u potpunosti preuzeo Cantor u svojoj seriji članaka između 1879. i 1884. godine.

Najvažniji Dedekindov rad u ovom periodu je *Statigkeit und irrationale Zahlen*[4] iz 1872. godine u kojem prezentira definiciju realnih brojeva pomoću rezova. Gotovo u isto vrijeme definiciju realnih brojeva ponudili su Weierstrass i Cantor, no Dedekind se od njih izdvaja po specifičnom pristupu samom problemu. Weierstrass i Cantor definiraju realne brojeve na način da budu pogodni za korištenje u matematičkoj analizi, a to nastoje postići pomoću njezinih metoda; prvi pomoću sumacija redova, a potonji pomoću Cauchyjevih nizova. S druge strane, Dedekind smatra nužnim (najkasnije od 1858. godine) strogo zasnivanje aritmetike same po sebi, kako bi se u budućnosti izbjeglo tada uobičajeno pozivanje na geometrijski zor ili intuiciju. Posebno naglašava pojam *neprekidnosti* ili, u današnjoj terminologiji, *potpunosti* realnih brojeva. Realni brojevi definirani su kao rezovi kolekcije racionalnih brojeva, a pomoću rezova također su definirane njihove operacije i uređaj na njima. Najvažniji dokaz u radu je da kolekcija realnih brojeva ima svojstvo potpunosti.

Očito je da skupovi kod Dedekinda igraju puno značajniju ulogu nego kod Riemanna, no oni ipak nisu dio samostalne teorije, već samo prikladno sredstvo za postizanje određenih ciljeva. Dedekind je uvelike doprinio izdvajanju teorije skupova u samostalnu matematičku disciplinu, a ključni korak u tom procesu napravit će Georg Cantor.

1.3 Točkasti skupovi

Problem definicije pojma funkcije javlja se od samog početka, odnosno od otkrivanja matematičke analize u 17. stoljeću. Razni autori koristili su razne definicije, što je samo dodatno doprinosilo konfuziji. Godine 1822. Joseph Fourier pokazuje da se svaka funkcija može prikazati kao suma trigonometrijskih redova (može se razviti u Fourierov red), stoga trigonometrijski redovi postaju glavno sredstvo za proučavanje funkcija. Takve reprezentacije funkcija u određenim se slučajevima pokazuju problematičnima jer neki redovi ne moraju nužno konvergirati. Godine 1829. Dirichlet je prvi pokazao pod kojim uvjetima Fourierov red konvergira, a njegov rezultat otvorio je mnoga nova područja istraživanja. Posebno se ističe Riemannovo detaljnije objašnjenje pojma integrala iz 1854. godine, pomoću kojeg su se dodatno razjasnili i Fourierovi redovi. To je za posljedicu također imalo da su se polako počele prihvaćati proizvoljne, općenite funkcije, koje nisu zadane nekim globalnim pravilom.

Daljnjim proučavanjem Riemannovog integrala, zajedno s pojmom općenite funkcije, dolazi do potrebe za uvođenjem tzv. *točkastih skupova*, odnosno dijela matematike koji će kasnije biti poznat kao *topologija*. Pojavu točkastih skupova možemo u određenom smislu pronaći u radovima Rudolfa Lipschitza iz 1864. godine, a prvi autor koji je uveo dva osnovna pojma teorije točkastih skupova (*guste* i *nigdje guste* kolekcije) u svome radu iz 1870. godine bio je Hermann Hankel. Njegov rad imao je

[4]Hrv. Neprekidnost i iracionalni brojevi.

veliki utjecaj na mnoge matematičare koji su se bavili realnom analizom, a posebice na Cantora.

Cantor svoju matematičku karijeru započinje u teoriji brojeva, a oko 1869. godine potpada pod utjecaj Eduarda Heinea. Heine se pretežito bavio realnom analizom, a posebno trigonometrijskim redovima, stoga to postaje glavno područje Cantorova interesa. Glavni problem koji je zaokupljao i Cantora i Heinea bio je pronaći odgovarajuće uvjete tako da funkcija bude jedinstveno reprezentirana trigonometrijskim redom. Heine je 1870. godine pronašao odgovarajuće uvjete za neprekidne funkcije, a Cantorova je ideja da se rezultat pokuša poopćiti na funkcije koje nisu nužno neprekidne. Za takvu generalizaciju Cantoru su potrebni tzv. *derivirani skupovi*. Za beskonačni skup točaka P definira se njegov derivirani skup P' kao skup svih graničnih točaka skupa P. Jednostavno se onda može definirati drugi derivirani skup P'' (derivirani skup od P'), treći derivirani skup P''' itd. Točkasti skupovi zatim se pomoću deriviranih skupova svrstavaju u dvije zasebne klase: skupove *prve vrste* i skupove *druge vrste*. Skupovi prve vrste su oni čiji je n-ti derivirani skup prazan (za neki n), a skupovi druge vrste su oni koji nisu prve vrste. Upravo je pomoću skupova prve vrste Cantor došao do rješenja problema generalizirane reprezentacije u radu iz 1872. godine: funkcija $f(x)$ jedinstveno je reprezentirana trigonometrijskim redom ako taj red konvergira za sve x funkciji $f(x)$, osim možda za one x koji pripadaju nekom skupu prve vrste.

Teorija točkastih skupova nastavila se razvijati velikom brzinom i do kraja 19. stoljeća razdvojila se na dva velika područja: *topologiju* i *teoriju mjere*. Cantor je nastavio objavljivati radove iz tog područja, a u njima pokazuje sve veću tendenciju postavljanja pitanja koja nemaju nužno direktnu primjenu. Promatranjem točkastih skupova kao zasebne matematičke discipline, koja nije samo alat, Cantor će doprinijeti stvaranju velikog dijela onoga što danas nazivamo *naivnom teorijom skupova*.

2. Naivna teorija skupova (1874. – 1900.)

Kao početak naivne teorije skupova gotovo jednoglasno uzima se godina 1874. u kojoj Cantor izdaje rad u kojem dokazuje neprebrojivost skupa realnih brojeva.[5] Nije u potpunosti jasno zašto je baš taj trenutak izabran kao početak novog razdoblja jer Dedekind do tada već godinama koristi skupovnu terminologiju, a čak je koristi i Cantor u svojim radovima o točkastim skupovima nekoliko godina ranije. Godina 1874. nipošto nije toliko značajna da bi bila referentna točka za „prije i poslije".

Postoji nekoliko drugih mogućih godina koje bi se mogle uzeti kao početak naivne teorije skupova, no svaka od njih suočena je s određenim poteškoćama. Prva moguća godina je 1854. u kojoj je objavljena Riemannova habilitacijska teza. Problem s tom godinom je što, kao što smo već spomenuli, javnost nije bila pretjerano upoznata s Riemannovim idejama koje se nalaze u tezi te ona sasvim sigurno nije mogla izvrši-

[5]Cantorovi izvorni radovi mogu se pronaći u [3], a neki od njih prevedeni su na engleski jezik i nalaze se u [2].

ti odgovarajući utjecaj na matematičku javnost. Nadalje, sama ideja mnogostrukosti, odnosno skupa, nije primijenjena na nekom novom i inovativnom problemu, već je poslužila za razvoj postojećih matematičkih disciplina. Druga godina koja dolazi u obzir mnogo je bolji izbor od prethodne, a to je 1872. godina u kojoj Cantor i Dedekind objavljuju radove u kojima definiraju realne brojeve. Izbor te godine je problematičan jer je vrlo upitno koristi li uopće Cantor skupove za definiciju realnih brojeva. Treća mogućnost je 1879. godina u kojoj Cantor počinje objavljivati svoju poznatu seriju od šest članaka (o kojima će kasnije biti više riječi). Smatramo da je upravo ta godina najbolja kao odrednica početka naivne teorije skupova. Ne samo da Cantor u tim radovima uvelike koristi skupovnu terminologiju, već teoriju skupova promatra kao zasebnu matematičku disciplinu. U tom trenutku Cantor je napredniji od Dedekinda koji u potpunosti prihvaća skupove kao samostalne matematičke objekte tek 1888. godine.

2.1. Neprebrojivost kontinuuma

Dedekind i Cantor upoznali su se 1872. godine i od tada, uz povremene pauze, traje korespondencija i razmjena ideja između njih. Bez obzira na relativno dobro dokumentiranu razmjenu pisama[6], ipak je teško procijeniti koliki je zapravo bio Dedekindov utjecaj na Cantora. Uspoređujući Cantorove ranije i kasnije radove, možemo zaključiti kako je Dedekindov sistematski pristup s vremenom oblikovao Cantorov način razmišljanja i pristupa problemima, ali nije jasno u kojoj je mjeri pojam skupa preuzet od Dedekinda, a u kojoj je on mjeri plod Cantorovog samostalnog promišljanja pod utjecajem Riemannovih ideja.

Događaji koji prethode dokazu neprebrojivosti kontinuuma[7] započinju Cantorovim pismom Dedekindu 29. 11. 1873. godine. U tom pismu Cantor postavlja pitanje je li moguće bijektivno preslikati kolekciju (*Inbegriff*) prirodnih brojeva u kolekciju realnih brojeva i moli Dedekinda za pomoć. Cantor smatra da je nemoguće pronaći traženu bijekciju, ali za to nije pronašao odgovarajući dokaz. Dedekind u svom odgovoru navodi da Cantorovo pitanje nije za njega od prevelikog praktičnog interesa, te da ne zna kako riješiti Cantorov problem. Međutim, Dedekind je iskazao i dokazao postojanje bijekcije između kolekcije prirodnih brojeva i kolekcije algebarskih brojeva. U pismu 2. 12. 1873. Cantor se slaže s Dedekindovim stavom da problem prebrojivosti kontinuuma nije od prevelikog praktičnog interesa, ali navodi da bi negativni odgovor omogućio alternativni dokaz Liouvilleovog teorema o postojanju transcendentnih brojeva. Vrlo brzo, 7. 12. 1873., Cantor ponovno piše Dedekindu da je uspio riješiti problem; nije moguće bijektivno preslikati kolekciju prirodnih u kolekciju realnih brojeva. Cantor navedeni problem nije riješio pomoću dijagonalnog argumenta (prvi put ga je koristio 1891. godine), već primjenom Bol-

[6]Prepiska Cantora i Dedekinda o problemu neprebrojivosti kontinuuma posvjedočena je Cantorovim pismima i kasnijim Dedekindovim zapisima. Originalna Dedekindova pisma izgubljena su u Drugom svjetskom ratu. Njihova korespondencija o navedenom i idućim problemima može se pronaći u [2].

[7]Kontinuum je drugi naziv za kolekciju realnih brojeva.

zano-Weierstrassovog teorema srednje vrijednosti. Dedekind na to pismo odgovara dan kasnije i u njemu čestita Cantoru na uspjehu te pojednostavljuje Cantorov dokaz. Cantor šalje Dedekindu pismo 9. 12. 1873. u kojemu navodi da je pronašao pojednostavljeni dokaz svoje tvrdnje, no ne spominje Dedekindovo pojednostavljenje. Nije jasno je li to zato što je Dedekindovo pismo stiglo prekasno ili zato što ga je Cantor jednostavno ignorirao. Po svemu sudeći, Cantor je Dedekindovo pojednostavljenje iskoristio, ali namjerno ga nije spomenuo. Argument u prilog tome nalazi se u činjenici da je Cantor poslao Dedekindu pismo 10. 12. u kojem spominje pismo iz 8. 12., ali ne spominje Dedekindovu pomoć.

Cantor 25. 12. 1873. obavještava Dedekinda da je napisao i poslao na recenziju članak pod nazivom *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraische Zahlen*[8], koji je objavljen iduće godine. Članak je podijeljen u dva dijela. U prvom je dijelu dokazano neodređeno svojstvo koje se spominje u naslovu (algebarskih brojeva ima prebrojivo mnogo), a u drugom je dijelu prezentiran dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva i primjena tog rezultata (zajedno s onim iz prvog dijela) na dokaz postojanja transcendentnih brojeva. Odmah upada u oči da je glavni Cantorov rezultat zapravo Dedekindov, uz Cantorovo ograničenje na realne algebarske brojeve. Dedekind je otvoreno bio protiv takvog ograničenja i savjetovao je Cantoru da ukloni pridjev "realni" iz naslova, ali bezuspješno. Samo po sebi nije problematično Cantorovo korištenje tuđih rezultata, ali on nigdje ne navodi Dedekinda kao originalnog autora. Sigurno Cantor nije posjedovao dokaz o prebrojivosti algebarskih brojeva ranije, a malo je vjerojatno da je navedenu tvrdnju uopće razmatrao ili je postavio kao hipotezu. Istina je da se Cantorov dokaz u članku ponešto razlikuje od Dedekindovog i možda je upravo zato Cantor mislio da nije dužan citirati originalnog autora, ali te su razlike minimalne i nipošto ga ne odriješuju krivnje. U drugom dijelu Cantor je iskoristio još neke Dedekindove sugestije, pri čemu ga ni na tom mjestu nije spomenuo. Nije potrebno posebno naglasiti da su navedeni Cantorovi postupci uvelike narušili njihov odnos.

Bez obzira kakvi bili Cantorovi postupci, članak iz 1874. možemo shvatiti kao važan povijesni moment. Njime je u matematiku uvedeno jedno sasvim novo, specifično pitanje, a to je za posljedicu imalo otvaranje mnogih, srodnih pitanja. Postoje li kolekcije koje su brojnije od kolekcija prirodnih i realnih brojeva? Koliko u razlici brojnosti tih dvaju skupova doprinose iracionalni brojevi? I možda najvažnije pitanje: postoje li kolekcije veličine između veličina tih dviju kolekcija? Cantor je jedini imao dovoljno hrabrosti i dalekovidnosti postavljati navedena i slična pitanja.

2.2 Jednakobrojnost realnog pravca i realnog prostora proizvoljne dimenzije

Već 5. 1. 1874. Cantor u pismu Dedekindu postavlja novo pitanje: Može li se ploha (recimo kvadrat), korelirati 1-1 s krivuljom (recimo ravnom linijom s uključe-

[8]Hrv. O jednom svojstvu kolekcije svih realnih algebarskih brojeva.

nim rubovima) tako da svakoj točki plohe korespondira točka na krivulji, i obrnuto, da svakoj točki na krivulji korespondira točka na plohi?" Ovdje se još jednom ogleda Cantorova sposobnost postavljanja naizgled trivijalnih, ali dubokih pitanja. Cantor taj problem smatra vrlo teškim. Na prvu se čini da je odgovor trivijalno negativan te da dokaz uopće nije potreban. Dedekind na ovo i nekoliko idućih pisama nije odgovorio iz razloga navedenih u prethodnoj točki.

Odnos Cantora i Dedekinda ponovno se uspostavlja razmjenom nekoliko pisama tek u svibnju 1877. godine. U pismu 20. 6. 1877. godine Cantor moli Dedekinda da prouči njegov dokaz jednakobrojnosti kolekcija $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ te da iznese svoje mišljenje o tome je li dokaz dovoljno „aritmetički rigorozan". U tom pismu Cantor, kako bi izrazio broj elemenata skupova, prvi put koristi pojam „moć"[9] skupa. Dedekind u dokazu nije pronašao nijednu bitnu grešku, osim problema nejedinstvenosti decimalnog zapisa. U pismu 25. 6. 1877. Cantor prezentira Dedekindu drugačiji dokaz, koji izbjegava prijašnji Dedekindov prigovor te njime „uvjerava [Dedekinda] u točnost [njegovog] teorema".

Cantor je dokaz jednakobrojnosti kolekcija objavio 1878. godine u članku pod naslovom *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*[10]. Kao najvažniji pojam u članku pojavljuje se već spomenuti pojam moći skupa (mnogostrukosti), pomoću kojeg je Cantor iskazao svoj glavni rezultat: „dvije neprekidne mnogostrukosti, jedna dimenzije n, a druga dimenzije m, imaju istu moć." Cantor u članku daje primjere različitih skupova i njihovih moći. Moći konačnih skupova su brojevi elemenata tih skupova u uobičajenom smislu. Kao najmanju beskonačnu moć Cantor navodi moć skupa prirodnih brojeva te navodi neke prebrojive skupove različite od skupa prirodnih brojeva, primjerice skup algebarskih brojeva. Glavni rezultat dobiva dokazivanjem nekoliko povezanih teorema. Zanemarivši neke strogo tehničke teoreme u tom nizu, posebno se ističu njih tri. Navodimo ih u modernoj terminologiji, a izvorni iskazi mogu se pronaći u [3] i [4].

Teorem A. Segment $[0,1]$ je ekvipotentan s $[0,1]^n$.

Teorem C. Segment $[0,1] \cap \mathbb{P}$ je ekvipotentan s $[0,1]^n \cap \mathbb{P}^n$.

Teorem D. Segment $[0,1] \cap \mathbb{P}$ je ekvipotentan s $[0,1]$.

Simbolom $\mathbb{P}$ označava se kolekcija iracionalnih brojeva. Sada iz teorema **D** i **C** slijedi tvrdnja teorema **A**. Cantor članak završava neformalnim iskazom hipoteze kontinuuma i uvjerenjem u njezinu istinitost: „čini se vjerojatnim teorem da je broj klasa linearnih mnogostrukosti konačan, točno jednak dva", pri čemu su linearne mnogostrukosti beskonačni podskupovi od $\mathbb{R}$. Dokaz hipoteze kontinuuma postaje glavna preokupacija u njegovom daljnjem radu.

[9] Njem. Mächtigkeit. Danas prevodimo kao kardinalitet ili potencija (skupa).

[10] Hrv. Doprinos teoriji mnogostrukosti.

2.3. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten

Od 1879. do 1884. godine Cantor izdaje seriju od šest članaka pod zajedničkim nazivom *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*[11]. Ta serija članaka vrlo je važna ne samo zbog toga što Cantor u njima izlaže osnove transfinitne teorije skupova, već i zato što teoriju skupova promatra kao samostalnu matematičku disciplinu. Najvažniji od šest članaka peti je članak iz 1883. godine, koji je tiskan pod zasebnim nazivom *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*.[12]

Prva četiri članka (1879., 1880., 1882., 1883.)

Prvi članak u seriji objavljen je 1879. godine i ponajviše je služio kao uvod u prijašnji Cantorov rad. U njemu Cantor opisuje svojstva deriviranih skupova za koje smatra da mogu ispravno i jednostavno okarakterizirati kontinuum, što obećaje dokazati. Cantor se u dokazu koristi dvjema klasifikacijama skupova: s obzirom na njihove derivirane skupove i s obzirom na njihovu moć. Posebno definira slučaj kada dva skupa imaju istu moć te naglašava dvije vrste beskonačnih skupova: *prebrojive skupove* (skupovi moći jednake moći skupa prirodnih brojeva) i *neprebrojive skupove* (skupovi moći jednake moći skupa realnih brojeva). Osim ponešto drugačije terminologije, Cantorov prvi članak ne donosi mnogo novih rezultata.

Drugi članak objavljen 1880. godine nastavlja ono što je započeto prvim. Radi lakšeg proučavanja deriviranih skupova, Cantor uvodi osnovne skupovne pojmove poput unije, presjeka i inkluzije. Ta terminologija slaže se s Dedekindovom iz njegove monografije o idealima iz 1871. godine. Ono što je inovativno u ovom članku Cantorovo je korištenje unije beskonačno mnogo skupova. Tako on za neki skup P definira njegov derivirani skup beskonačnog reda kao $P^{\infty} := \cup_n P^{(n)}$. Simbol ∞ ovdje igra samo ulogu oznake, bez konkretnog sadržaja. Cantor tu ne staje, već dalje promatra derivirane skupove od P^{∞} pa tako dobiva $P^{\infty+1}$, $P^{\infty+2}$ i tako dalje. Zapravo, Cantor već na ovome mjestu ulazi u svijet transfinitnosti.

Treći članak objavljen je 1882. godine i u njemu Cantor prikazuje prijašnje rezultate (derivirani skupovi, moć, svugdje gusti skupovi...), ali u višim prostornim dimenzijama. Glavni je cilj proširiti pojam moći skupa na proizvoljne „dobro definirane" kolekcije. Međutim, Cantor ne može adekvatno definirati što znači dobro definirana kolekcija. Određivanje moći skupa također nosi određene, možda i veće, poteškoće. Ipak, Cantor pojam moći smatra svojstvenim svakom skupu. Štoviše, smatra ga objedinjujućim faktorom teorije skupova. Iz toga možemo zaključiti kako Cantor nije imao na umu samo korisne primjene teorije skupova, već je polako postajala jasnija ideja o teoriji skupova kao osnovi cjelokupne matematike. Cantor zatim dokazuje da je svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa ponovno prebrojiv i tako dokazuje da je prebrojivost najmanja beskonačna moć. Također navodi rezultat da je konačna ili prebrojiva unija prebrojivih

[11] Hrv. O beskonačnim linearnim točkastim mnogostrukostima.

[12] Hrv. Osnove opće teorije mnogostrukosti.

skupova prebrojiva. Nakon toga izlaže jedan vrlo važan teorem: „Neka je u *n*-dimenzionalnom neprekidnom prostoru definirana beskonačna kolekcija *n*-dimenzionalnih, neprekidnih poddomena takva da za svake dvije poddomene vrijedi da nemaju zajedničkih elemenata, osim možda na rubovima. Tada je ta kolekcija prebrojiva." Iz tog općenitog teorema Cantor izvlači posljedice za prostor u dvije i tri dimenzije te po prvi puta nastoji svoje rezultate primijeniti izvan područja matematike. Dolazi do zaključka da je kontinuiranost prostora samo mentalna i intuitivna konstrukcija te da zbog toga matematiku treba zasnovati na strogim aritmetičkim temeljima.

Četvrti članak objavljen je 1883. godine i ponajviše je posvećen primjeni prijašnjih rezultata na funkcionalnu analizu. Cantor uvodi nove, jasnije oznake za uniju i presjek te uvodi *izolirane skupove* kao najvažniji novi pojam. Pomoću njih nastoji još detaljnije odrediti odnos između diskretnih (prebrojivih) skupova i kontinuuma (neprebrojivih skupova). Pokazuje da je svaki izolirani skup prebrojiv, iz čega jednostavno dobiva rezultat da ako je derivirani skup *P*' skupa *P* prebrojiv, onda je i *P* prebrojiv. Cantor taj rezultat koristi kako bi dokazao još nekoliko tvrdnji o moćima određenih skupova. Najvažnije primjene odnose se na analizu te su upotpunjavanja rezultata Du Bois Reymonda i Harnacka.

Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre (1883.)

Cantorov peti članak izdan je 1883. godine pod zasebnim naslovom *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre*. Taj članak, skraćenog naziva *Grundlagen*, predstavlja najvažniji rani doprinos teoriji skupova. Glavna ideja rada je uvođenje transfinitnih (ordinalnih) brojeva. U prvoj polovici članka Cantor daje opći prikaz rezultata koje će u drugoj polovici dokazati. Uvodi potrebne definicije i izlaže filozofsko-matematičke argumente u korist transfinitnih brojeva. Na samom početku posebno naglašava kako je za njega napredak u teoriji mnogostrukosti gotovo nemoguć bez uvođenja novih, transfinitnih brojeva. Za potrebe jasnijeg određenja novih brojeva, Cantor razlaže beskonačnost na dva dijela: pravu (aktualnu) beskonačnost i nepravu (potencijalnu) beskonačnost. Novi brojevi pripadaju sferi aktualne beskonačnosti, a većina dotadašnje matematičke tradicije u sferi je potencijalne beskonačnosti. Ulaskom u svijet aktualne beskonačnosti Cantor je bio svjestan problema njezinog uobičajenog shvaćanja kao nečega nedostižnog, apsolutnog. Međutim, novi brojevi nisu apsolutno beskonačni, već se nalaze samo „preko" konačnih brojeva. Slična terminologija primjenjuje se i na aktualno beskonačne skupove; ti skupovi su transfinitni, nalaze se „preko" konačnih skupova, ali nisu apsolutno beskonačni. Na taj način Cantor ne dovodi u pitanje uobičajeni filozofski stav o nemogućnosti spoznaje Apsoluta, a omogućeno mu je govoriti o aktualno beskonačnim brojevima. Takvo poimanje beskonačnosti kasnije će poslužiti Cantoru (i njegovim nasljednicima) da se vrlo lako obračuna s paradoksima. Paradoksi se pojavljuju samo onda kada se apsolutno beskonačni skupovi tretiraju kao transfinitni, odnosno kada se pokuša opisati Apsolut.

U nastavku Cantor ukratko skicira način generiranja novih brojeva pomoću tri nova principa: *prvog principa generiranja*, *drugog principa generiranja* i *principa limitacije*. Principima generiranja dobivaju se novi brojevi, a principom limitacije dobivamo „prirodnu segmentaciju u apsolutnom beskonačnom nizu cijelih brojeva. Te segmente nazivamo brojevne klase." Prvim principom generiranja dobivaju se novi brojevi uvećavanjem za jedan. Drugim principom generiranja dobivamo tzv. *granične ordinalne brojeve*: iz dane kolekcije brojeva definiramo najmanji broj veći od svih prethodnih. Primjeri takvih brojeva su ω (najmanji broj veći od svih konačnih), $\omega \cdot 2$, i tako dalje. Principom limitacije iz neke kolekcije dobivamo novi broj najmanje moći veće od moći svih brojeva iz dane kolekcije. Princip limitacije koristi se za klasifikaciju transfinitnih brojeva u *brojevne klase*. *Prva brojevna klasa (I)* je kolekcija svih konačnih cijelih brojeva. Poslije prve brojevne klase slijedi *druga brojevna klasa (II)* koja sadrži sve prebrojive ordinale (ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ...), a nakon nje slijedi *treća brojevna klasa*, pa četvrta brojevna klasa i tako dalje. Cantor smatra da uvođenje transfinitnih brojeva može pomoći detaljnijem i preciznijem određenju pojma moći skupa. Uvodi novi pojam *rednog broja* dobro uređenog skupa[13] te pomoću tog pojma objašnjava možda najvažniju razliku između konačnih i beskonačnih skupova. Kod konačnih skupova njihov se redni broj i njihova moć podudaraju, dok to nije slučaj kod beskonačnih skupova; skupovi iste moći mogu imati različite redne brojeve. Iskazuje tvrdnju da je najmanja moć beskonačnih skupova jednaka moći prve brojevne klase. Nadalje, druga brojevna klasa ima moć neposredno veću od moći prve brojevne klase. U modernoj terminologiji, to znači da je moć prve brojevne klase $\aleph_0$, moć druge brojevne klase je $\aleph_1$, moć treće brojevne klase je $\aleph_2$ i tako dalje. Uočavanjem veze između moći i brojevnih klasa Cantor je napravio veliki napredak u proučavanju hipoteze kontinuuma. Sada se ona može iskazati na sljedeći način: kontinuum je ekvipotentan s drugom brojevnom klasom.

Nadalje, Cantor karakterizira kontinuum kao savršeni povezani skup i dokazuje prethodno spomenute rezultate o brojevnim klasama. Unatoč tome, nije uspio dokazati hipotezu kontinuuma. Zbog toga je iduće godine (1884.) objavio šesti, posljednji članak u seriji, koji se može smatrati nastavkom *Grundlagena*. U njemu podrobnije razmatra svojstva savršenih skupova i njihovu moguću primjenu. Detaljnije razrađuje korištenje transfinitnih brojeva pri proučavanju točkastih skupova, pri čemu ponešto mijenja dotadašnju terminologiju; uniju skupova promatra za proizvoljne skupove, a ne samo za disjunktne, i uvodi pojam gustog skupa u sebi. Pomoću pojma gustog skupa prezentira takozvanu *teoriju sadržaja*; svakom skupu moguće je pridružiti odgovarajući broj koji reprezentira njegov *volumen* ili *sadržaj*. Drugim riječima, ulazi u područje koje je danas poznato kao *teorija mjere*. Napominje da teorija sadržaja ima dalekosežne i duboke posljedice, no nije ju na ovom mjestu, a ni kasnije, detaljnije razrađivao. Na kraju, dokazao je da su svi savršeni skupovi međusobno ekvipotentni te se time još više približio rješavanju hipoteze kontinuuma. Drugim riječima, za do-

[13]Cantor pretpostavlja da se svaki skup može dobro urediti: „Koncept dobre uređenosti je fundamentalan za cijelu teoriju mnogostrukosti. ... uvijek je moguće svaki dobro definirani skup pretvoriti u dobro uređeni skup".

kaz hipoteze kontinuuma dovoljno je dokazati da neki savršeni skup ima moć druge brojevne klase. Nažalost, nije uspio dokazati željeni rezultat o savršenim skupovima, a posljedično ni hipotezu kontinuuma.

Prihvaćanje Cantorovih ideja

Cantorove rezultate iz serije članaka matematička je zajednica prihvatila više pozitivno nego negativno. Međutim, pogodile su ga reakcije određenih osoba koje je smatrao vrlo važnima za ocjenu svoga rada. Weierstrass i Dedekind nisu pokazivali veliku zainteresiranost, Schwarz ga je kritizirao, a do otvorenog sukoba došlo je s Kroneckerom. Nadalje, Mittag-Leffler, urednik časopisa u kojemu je Cantor planirao objaviti idući članak (1885. godine), s kojim je Cantor imao prijateljski odnos, savjetovao mu je suzdržanost i izbjegavanje preuranjenog objavljivanja članka. Cantor je taj savjet shvatio kao direktno odbijanje, što je drastično pogoršalo odnos s Mittag-Lefflerom. Kao posljedicu svega, osjećao se odbačenim od njemačke matematičke zajednice i nekoliko je godina izbjegavao objavljivati radove u matematičkim časopisima. U tom periodu nije prestao objavljivati radove filozofsko-teološke tematike, no ti radovi nemaju većeg značaja. Matematičkom objavljivanju vratio se tek 1892. godine.

2.4 Dedekindovo utemeljenje aritmetike

Dedekindov program utemeljenja aritmetike možemo pratiti najranije od 1858. godine. To nije program u strogom smislu jer Dedekind ni u jednom trenutku ne navodi njegove smjernice i glavne ciljeve, ali moguće ga je promatrati i rekonstruirati retrospektivno. Nakon članka iz 1872. godine, u kojem je definirao realne brojeve, Dedekind počinje iste godine pisati skicu iz koje će 1888. godine nastati njegovo najpoznatije i najvažnije djelo: *Was sind und was sollen die Zahlen?*[14] U njemu Dedekind izlaže revolucionaran pristup temeljima aritmetike. Do tada je bilo uvriježeno promatrati prirodne brojeve kao primitivne, već postojeće entitete, te pomoću njih definirati ostale brojeve. Međutim, Dedekind ide korak dalje i ne postulira unaprijed postojanje prirodnih brojeva, već ih nastoji definirati koristeći kao primitivne pojmove skupove i preslikavanja. Te pojmove je smatrao čisto logičkima, pa njegov program možemo u određenom smislu smatrati logicističkim[15]. Dedekindov logicizam razlikuje se od Fregeovog, no ta dva logicizma su u svojoj srži zapravo jednaka. Za Dedekinda skupovi nastaju apstrahiranjem ideje grupiranja, a Frege se oslanja na koncepte i njihove ekstenzije. Drugim riječima, Dedekindovi skupovi proizlaze iz „stvarnog svijeta", a Fregeove klase iz idealnog, platonističkog. Nadalje, Dedekind koristi ekstenzionalni pojam preslikavanja kao logički, a Frege inzistira na intencionalnom obliku (relaciji). Obojica zapravo koriste ekvivalentne pojmove, a njihovi se pristupi više razlikuju u terminologiji, a ne toliko u sadržaju.

[14]Što su i što bi trebali biti brojevi?

[15]Logicizam je filozofski pogled koji smatra da su sve matematičke istine zapravo logičke istine. Postoje razne inačice logicizma, a prvu je iznio Gottlob Frege [6].

Glavne Dedekindove motivacijske ideje su da brojevi ne ovise o intuiciji, prostoru i vremenu, te da su kreacija ljudskog uma. U navedenom članku, u poglavlju §1 uvodi pojam sistema (skupa) koji nastaje grupiranjem određenih objekata mišljenja, a objekte mišljenja naziva stvarima[16]. Sistem je u potpunosti određen svojim elementima i jednakost dvaju sistema definirana je pomoću ekstenzionalnosti; ako i samo ako imaju iste elemente. U nastavku definira podskup, strogi podskup, uniju i presjek te dokazuje teoreme koji govore o odnosu uvedenih pojmova. U §2 i §3 uvodi općeniti pojam preslikavanja, te pojmove injektivnog i bijektivnog preslikavanja. Također napominje kako se pomoću bijektivnih preslikavanja može sve sisteme razdvojiti na klase (ekvivalencije) s određenim reprezentantima. Korisno je napomenuti da, iako je Dedekind preslikavanje smatrao logičkim pojmom, ipak ga je definirao, što donekle oslabljuje njegovu logicističku poziciju.

U §4 uvodi originalnu i inovativnu ideju lanca[17]: „neka je zadano preslikavanje $\varphi : S \to S$ i neka je $K \subseteq S$. Kažemo da je K lanac ako vrijedi $\varphi[K] \subseteq K$". Definira i lanac skupa $A \subseteq S$ kao presjek svih lanaca $K \subseteq S$ koji sadrže A i označava ga s A_0. Drugim riječima, lanac skupa A najmanji je lanac koji sadrži A. Pojam lanca Dedekindu je poslužio za formuliranje teorema o potpunoj indukciji, koji je formulirao za općeniti lanac. U §5 uvodi poznatu definiciju beskonačnih sistema te pokušava dokazati da postoji beskonačni sistem, odnosno da je totalitet svih stvari koje mogu biti objekti mišljenja beskonačan. Dokaz tog teorema je ukratko sljedeći: promatramo moj svijet misli i svakoj misli s pridružujemo misao „s je objekt mog mišljenja". Tada imamo bijektivno preslikavanje, a onda iz toga i definicije beskonačnosti slijedi da je svijet mojih misli beskonačan sistem. Iz priloženog se vidi da je taj dokaz matematički vrlo slab i njime se u teoriju uvodi nepotrebni i opasni psihologizam.[18] U §6 Dedekind definira *jednostavno beskonačne sisteme*. Sistem N jednostavno je beskonačan ako je N lanac s obzirom na neku injekciju φ i najmanji je lanac koji sadrži neki element izvan $\varphi[N]$. Zatim navodi četiri uvjeta koja zadovoljavaju svi jednostavno beskonačni sistemi, a to su zapravo aksiomi nepravedno nazvani po Peanu:

α. $\varphi[N] \subseteq N$.
β. $N = \{1\}_0$.
γ. 1 nije u $\varphi[N]$.
δ. φ je injekcija.

Prirodne brojeve definira kao elemente nekog jednostavno beskonačnog sistema, pri čemu su zanemarena sva posebna svojstva objekata sistema i u obzir se uzimaju samo njihovi međusobni odnosi i redoslijed. Kraće, prirodni brojevi su apstraktni elementi proizvoljnog jednostavno beskonačnog sistema.

[16] Njem. Ding.

[17] Njem. Kette.

[18] Psihologizam u matematici je filozofski pogled po kojemu su sve logičke i matematičke istine posljedice psiholoških procesa. Psihologizam u matematici je opasan jer objektivnu narav matematike zamjenjuje čisto subjektivnim doživljajima, a da pri tome ne odgovara na pitanje kako se dolazi do matematičkih istina. Jedan od prvih napada na psihologizam može se pronaći kod Fregea [6].

Od §7 do §13 Dedekind definira osnovne pojmove na prirodnim brojevima poput nejednakosti, zbrajanja, množenja i potenciranja. Vrlo važno je ovdje istaknuti dvije tvrdnje. U §9 iskazuje teorem o definiciji pomoću indukcije (rekurzije). Taj teorem je iskazan isključivo za skup prirodnih brojeva, a ključno svojstvo je da prirodni brojevi imaju najmanji element. Dedekind je zapravo ovdje bio u mogućnosti definirati transfinitnu rekurziju da je promatrao općenite dobro uređene skupove. U §10 opravdava definiciju prirodnih brojeva tako što dokazuje da su svi jednostavno beskonačni sistemi međusobno ekvivalentni. Dedekindovo cijelo izlaganje bazira se na radoslijedu i rasporedu prirodnih brojeva, odnosno na njihovu ordinalnom karakteru. U posljednjem dijelu, §14, definira pojam kardinalnog broja konačnog sistema i za kraj demonstrira da se pojmovi kardinalnog i ordinalnog broja podudaraju na konačnim sistemima.

Dedekindova teorija izvršila je velik utjecaj na tadašnju, a pogotovo na noviju generaciju matematičara. Općenito se može zaključiti kako je teoriju pozitivno prihvatila znanstvena zajednica. Peanu je poslužila kao potvrda njegovih sličnih rezultata, a Zermelo je inspiraciju za nekoliko svojih aksioma dobio upravo iz nje. Naime, Zermelo je aksiom beskonačnosti nazivao Dedekindovim aksiomom. Možda najpozitivnija ocjena došla je od Fregea koji Dedekindovu teoriju naziva „najpotpunijim radom o temeljima matematike".

Ipak, ona nipošto nije bez mana. Dedekindovo iznošenje određenih (filozofskih) ideja nedovoljno je dobro razrađeno, ne naglašava skup kao ključno sredstvo pomoću kojeg razvija cijelu teoriju, ne obrazlaže posebno jasno logicističku poziciju, te svjesno izostavlja neke važne rezultate koji se nalaze u prijašnjim skicama. Primjerice, Cantor-Bernsteinov teorem i činjenicu da se svaki skup može zadati konceptom (aksiom komprehenzije). Uz to, djelo sadrži i određene tehničke pogreške koje posebno kritizira Frege; nerazlikovanje između pojmova „biti element" i podskupa, nejasna razlika između jednočlanog skupa i njegovog elementa, te izostanak definicije praznog skupa.

Na kraju možemo zaključiti kako je Dedekindov doprinos temeljima matematike nenadmašan i usporediv jedino s onim Fregea. Nažalost, Dedekind je ostao u sjeni drugih matematičara, napose Cantora. Hilbert iznosi hrabru i kontroverznu tvrdnju da je upravo on među prvima iz novije generacije matematičara „stalo na Cantorovu stranu" te ga tako uzdignuo iznad Dedekinda. Vrijedilo bi dublje istražiti koliki je zapravo Hilbertov utjecaj u „zaboravljanju Dedekinda", a koliko je zapravo sve splet (nesretnih) povijesnih okolnosti.

2.5. Cantorov povratak iz matematičke izoliranosti

Prvi Cantorov matematički članak nakon serije šest članaka objavljen je 1892. godine pod imenom *Über eine elementare Frage der Mannigfalitgkeitslehre*[19], a prezentiran je godinu ranije na kongresu Njemačkog matematičkog udruženja. U njemu

[19] Hrv. O osnovnom pitanju teorije mnogostrukosti.

Cantor ponovno dokazuje neprebrojivost skupa realnih brojeva, ali ovaj put teorem dokazuje pomoću *dijagonalnog argumenta*. Naglašava kako je dokaz tom metodom ne samo jednostavniji od prijašnjeg, već da ga se može poopćiti za dokaz općenitijih teorema. Koristeći tu metodu, Cantor dokazuje tvrdnju koja će postati poznata kao *Cantorov teorem*. Ona nije iskazana u današnjem obliku kao tvrdnja da je kardinalitet skupa X manji od kardinaliteta skupa podskupova od X, već u terminima skupa i funkcije. Cantor je za skup L uzeo linearni kontinuum (interval $[0,1]$), a za skup M je uzeo „totalitet" svih funkcija s L u $\{0,1\}$. Na kraju je dokazao da je kardinalni broj od M veći od kardinalnog broja skupa L.

Idući rad, pod imenom *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*[20], objavljen je u dva dijela; prvi dio 1895. godine, a drugi 1897. godine. Cantorova je namjera prikazati svoja dotadašnja otkrića na precizan i sistematičan način. Uvelike je doprinio upoznavanju šireg kruga matematičara sa svojim idejama i, možda najvažnije, dodatno je učvrstio teoriju skupova kao samostalnu matematičku disciplinu. Također je vrijedno naglasiti kako prvi put u naslovu koristi riječ „*Mengelehre*" koja se u njemačkom jeziku ustalila kao naziv za teoriju skupova.

Prvi dio započinje definicijom pojma skupa i nastavlja raspravom o kardinalnim brojevima. Definira zbroj kardinalnih brojeva dvaju skupova kao kardinalni broj disjunktne unije tih dvaju skupova, a umnožak kardinalnih brojeva dvaju skupova kao kardinalni broj Kartezijevog produkta tih dvaju skupova. Definicija umnoška je značajna jer se po prvi put u teoriji skupova pojavljuje operacija Kartezijevog produkta. Zatim proširuje aritmetiku kardinalnih brojeva definirajući njihovo potenciranje. Važan moment u prikazu teorije je Cantorovo eksplicitno navođenje otvorenih problema koje je potrebno riješiti. Naglašava problem trihotomije za kardinalne brojeve i Cantor-Bernsteinov teorem. U ovom dijelu Cantor po prvi put za kardinalne brojeve počinje koristi hebrejsko slovo $\aleph$.

U drugom dijelu izlaže teoriju linearno i dobro uređenih skupova, transfinitne brojeve i brojeve druge brojevne klase. Nakon temeljitog prikaza dobro uređenih skupova, dokazuje teorem koji će mu poslužiti kao temelj za dokazivanje usporedivosti ordinalnih brojeva. Ono što nedostaje u drugom dijelu, a čega je Cantor bio svjestan, dokaz je teorema o dobrom uređaju, odnosno da se svaki skup može dobro urediti. Taj teorem dokazao je Zermelo tek 1904. godine, a bez njega je Cantoru teško bilo na zadovoljavajući način prikazati vezu između ordinalnih i kardinalnih brojeva, stoga Cantorov prikaz nije zaokružena cjelina. Taj problem trebao je biti riješen u trećem dijelu, ali se on nažalost nikada nije pojavio u tisku.

Važnost Cantorovog *Baiträgea* ponajviše je u detaljnom prikazivanju rezultata. Teorija je „očišćena" od stranih primjesa, a kompozicija rada logična je i jasna. No, nedostataka svakako ima. Nedostaje spomenuti dokaz teorema o dobrom uređaju, ne spominju se rezultati iz prethodnog članka te nedostaje valjana definicija konačnih

[20]Hrv. Doprinosi temeljima transfinitne teorije skupova.

skupova. Bez obzira na sve to, *Baiträgea* je korak naprijed u daljnjem razumijevanju i istraživanju teorije skupova.

3. Daljnji razvoj

Za kraj ukratko prikazujemo daljnji razvoj teorije skupova, pojavu paradoksa te dva načina njihova rješavanja: Zermelovu aksiomatizaciju i Whitehead-Russellovu teoriju tipovu.

3.1 Širenje i prihvaćanje teorije skupova

Razdoblje od 1890. godine do otprilike početka 20. stoljeća period je konsolidacije teorije skupova, bez većih originalnih doprinosa. U Italiji Peano izdaje 1895. godine djelo *Formulaire de mathematiques* u kojem pokušava svu dotadašnju matematiku strogo izraziti u jasnom simboličkom jeziku, a glavnu ulogu igra pojam klase (skupa). U Francuskoj Jordan 1893. godine izdaje *Course d'analyse* u kojem koristi skupovnu terminologiju i naglašava njezinu korisnost za razvoj analize. U Njemačkoj Cantor izdaje svoj spomenuti *Baiträge,* Schoenflies 1900. godine detaljno prikazuje razvoj teorije točkastih skupova, a slično Shoenfliesu radi i Young u Engleskoj.

Međutim, najznačajniji trenutak za teoriju skupova dogodio se 1897. godine na *Prvom međunarodnom kongresu matamatičara,* gdje su Hadamar i Hurwitz posebno naglasili korisnost skupovne terminologije i mogućnosti njezine primjene. Velike zasluge za širenje ideja teorije skupova također ima Hilbert i njegov krug. Hilbert je otvoreno poticao svoje studente da se bave teorijom skupova, a možda je najznačajniji od njih Ernst Zermelo. Na *Drugom međunarodnom kongresu matematičara 1900. godine* Hilbert iznosi svoja 23 problema, a na prvo mjesto stavlja problem hipoteze kontinuuma. Važno je također napomenuti da Hilbert svoj aksiomatski sustav u *Grundlagen der Geometrie* uvelike temelji na skupovima.

Fregeov logicistički program, iako temeljen na intencionalnom shvaćanju entiteta (koncepti i relacije), nužno počiva na ekstenziji koncepata, odnosno na klasama (skupovima). Proširenje Booleovog algebarskog pristupa logici od strane Schrödera također počiva na mnogostrukostima (skupovima). Nadalje, Russell je posebno naglasio Cantorov teorem kao glavni rezultat teorije skupova i prvi ga je u potpunosti iskazao u terminima skupova. Upravo će ga proučavanje Cantorovog teorema dovesti do slavnog Russellovog paradoksa.

3.2. Paradoksi, aksiomatizacija i teorija tipova

Kronologija otkrivanja paradoksa vrlo je zamršena i nejasna. Godine 1897. Cantor u pismu Hilbertu izlaže jednu verziju Cantorovog paradoksa, a iste godine Burali-Forti objavljuje članak s argumentacijom koja dovodi do paradoksa danas poznatog pod njegovim imenom. Russellov paradoks vjerojatno je prvi otkrio Zermelo oko 1900. godine. Međutim, s ovom kronologojom ima nekoliko problema. Prvo, Cantor svoja sazanja o paradoksima nije nigdje objavio. Drugo, Burali-Forti krivo je shvatio Cantorovu definiciju dobrog uređaja, stoga nije uočio da njegova argumentacija u članku zapravo dovodi do kontradikcije. Treće, Zermelo je Russellov paradoks u potpunosti ignorirao. Rane pojave paradoksa nisu previše uzburkale matematičku javnost. Čak ni nakon što je Hilbert 1900. godine prvi put javno izrekao verziju Cantorovog paradoksa, to nije izazvalo veliku nelagodnost. Pogrešno bi bilo shvaćanje da uopće nije bilo nikakve reakcije, ali ona je bila vrlo slaba i oslanjala se na optimističnu ideju kako će se problemi riješiti detaljnijim istraživanjem transfinitnosti.

Prva osoba koja je ukazala na ozbiljan problem koji uzrokuju paradoksi bio je Bertrand Russell u svome djelu *Principles of mathematics* iz 1903. godine. Russell je paradoks nazvan po njemu otkrio 1901. godine proučavajući Cantorov teorem. Nije na prvu shvatio njegov značaj, a ni da to zaista je paradoks, već je smatrao da je moguće pronaći grešku u dokazu Cantorovog teorema. Nakon što se uvjerio da je s Cantorovim teoremom sve u redu, 1902. godine šalje pisma Fregeu i Peanu u kojima obrazlaže otkriveni paradoks. Frege odmah uočava da Russellov paradoks za posljedicu ima inkonzistentnost njegovog logičkog sustava. Frege paradoks nije mogao otkloniti nikakvim modifikacijama svojih aksioma, stoga je morao zaključiti kako je njegov logicistički program propao. Od tog trenutka počinje se jasnije shvaćati problem paradoksa. Ne samo da je Russellov paradoks onemogućio svođenje matematike na logiku u Fregeovom smislu, već je njegov opće-logički karakter doveo u pitanje samo poimanje logike i teorije skupova.

Međutim, reakcija na probleme paradoksa nije bila jednaka kod svih. Matematičari zainteresirani za formulaciju logike kao univerzalnog jezika imali su više problema nego matematičari zainteresirani za sustav koji će poslužiti kao osnova matematike. Frege je odmah shvatio da je zbog Russellovog paradoksa njegov logicistički program propao i zaključio je da nije moguće podariti aritmetici znanstvene temelje. Russell je pak smatrao kako je neophodna reformulacija cjelokupne logike, a srednji put je izabrao Hilbert i njegova škola, zalažući se za odvojeni paralelni razvoj logike i teorije skupova. Drugim riječima, logika bi trebala biti *metateorija* za razvoj teorije skupova.

Dodatni problem uzrokovala je pojava paradoksa koji ni najmanje ne ovise o skupovnoj terminologiji: *Richardov* i *Berryjev* paradoks. Russell u radu *Mathematical logic based on type theory* iz 1908. godine na jednom mjestu obrazlaže sve do tada poznate (logičke) paradokse i nastoji istražiti imaju li oni nešto zajedničko što uzorkuje problem. Russell je uočio nekoliko problematičnih značajki, stoga uvodi teoriju tipova koja za cilj ima njihovo sprječavanje. Kulminacija Russellovog pristupa događa se u kolaboraciji s Whiteheadom kada 1910. godine zajedno izdaju djelo *Principia Mathematica.*

Zermelo je pak krenuo putem Hilbertove škole. U duhu Hilbertovog formalizma, ponudio je određeni broj aksioma pomoću kojih je moguće iskazati i dokazati Dedekindove i Cantorove rezultate, a da se u isto vrijeme onemoguće paradoksi. Upravo to glavni je smisao Hilbertovog „paralelnog razvoja”. Aksiomatska teorija počiva na logici, ali se cjelokupna logika ne formulira kao matematička teorija. Zermelo je tako svojom aksiomatizacijom u potpunosti odvojio teoriju skupova od tradicionalnog shvaćanja logike i uveo je novi *iterativni koncept* skupa koji prevladava i danas uz rijetke iznimke.

Paralelni razvoj Zermelove aksiomatike i Whitehead-Russellove teorije tipova obilježio je prvu polovicu 20. stoljeća. Međutim, Whitehead-Russellova teorija tipova imala je puno više problema od Zermelove aksiomatizacije. Tehnički je vrlo komplicirana, a nije ni uspjela adekvatno zadovoljiti stroge zahtjeve koje su autori nametnuli svojoj logici. Neku vrstu srednjeg puta predložio je Quine 1937. godine. Quineova teorija bliža je teoriji tipova, ali koristi Zermelov pristup aksiomatizacije. Iako se Quineova teorija i dalje razvija[21], ona je ostala u sjeni Zermelove teorije skupova.

Bibiliografija

1. Adlešić, T., and Čačić V. *A Modern Rigorous Approach to Stratification in NF/NFU*. *Logica Universalis* 16.3 (2022.): 451-468.
2. Ewald, W. B. *From Kant to Hilbert Volume 2: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Vol. 2. Oxford University Press, 1996.
3. Cantor, G. *Gesammelte Abhandlungen: mathematischen und philosophischen Inhalts*. Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim, 1962.
4. Dauben, J. W. *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press, 1990.
5. Ferreirós, J. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Birkhauser Verlag AG, 2007.
6. Giaquinto, M. *The search for certainty: A philosophical account of foundations of mathematics: A philosophical account of foundations of mathematics*. Clarendon Press, 2002.
7. Van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Harvard University Press, 1967.
8. Russell, B. *The principles of mathematics*. Routledge, 2020.
9. Russell, B. and Whitehead, A. N. *Principia mathematica*. Cambridge University Press. (1910., 1912., 1913.).

[21]Uvod u (meta)teoriju Quineove teorije skupova može se pronaći u [1].