Matematičko modeliranje korištenjem običnih diferencijalnih jednadžbi u inženjerstvu[1]

Melita Štefan Trubić[2], Angela Bašić-Šiško[3] i Sanja Vranić[4]

Sažetak

Usvajanje koncepata i matematičkih sadržaja u sklopu matematičkih kolegija na inženjerskim fakultetima u velikoj je mjeri usmjereno na primjenu u realnim situacijama i inženjerskim problemima. Ključnu ulogu u tome ima matematičko modeliranje kao proces u kojem se određeni realni sustav opisuje na jednostavniji način primjenom različitih matematičkih alata i metoda. Rješenje tako dobivenog matematičkog modela potrebno je evaluirati i interpretirati u skladu s postavljenim modelom i fizikalnim ili inženjerskim problemom koji on reprezentira [1].

Naime, fizikalni zakoni često se temelje na promjenama određenih veličina. Uvažavajući činjenicu da se u matematici promjene opisuju derivacijama, prirodno je promjene koje se pojavljuju u realnim situacijama modelirati upravo korištenjem diferencijalnih jednadžbi.

U ovom radu prikazat će se više različitih odabranih jednostavnih problema u kojima se formiraju matematički modeli pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi s ciljem njegovanja dubljeg razumijevanja i razvoja konceptualnog učenja.

1. Uvod

Obične diferencijalne jednadžbe moćan su alat za opisivanje dinamičkih sustava i realnih situacija te su nezaobilazan dio matematičkog kurikuluma budućih inženjera. Teorija diferencijalnih jednadžbi oslanja se na prethodno usvojene koncepte iz diferencijalnog i integralnog računa te može djelovati tehnički i opterećeno složenim zapisom. Nerijetko fokus studenata ostane na primjeni i usavršavanju algebarskih procedura te se javljaju poteškoće u interpretaciji algebarskog zapisa i upotrebi odgovarajuće terminologije. Stoga je nužno u početnoj fazi usvajanja studente izložiti jednostavnim problemima modeliranja upotrebom običnih diferencijalnih jednadžbi s

[1]Predavanje održano na 9. kongresu nastavnika matematike 2022. u Zagrebu
[2]Melita Štefan Trubić, Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci
[3]Angela Bašić-Šiško, Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci
[4]Sanja Vranić, Učiteljski fakultet, Sveučilište u Rijeci

kontekstom koji je njima dohvatljiv kako bi se promovirao smisao i korelacija ovog dijela matematike s ostalim područjima znanosti i inženjerstva.

U radu će biti uvedeni neki jednostavniji motivacijski matematički modeli i njihova rješenja za poznate situacije s kojima se studenti mogu svakodnevno susresti, kao i složeniji modeli koji će matematiku povezati s područjem njihova interesa i stručnom domenom.

Prvi model iz primjene diferencijalnih jednadžbi koji je postavljen populacijski je rast u situaciji kada promatrana populacija ima neograničene resurse [4] i kada su resursi ograničeni [2]. Sličnim se modelima opisuje raspad radioaktivnih tvari [1] te problem hlađenja ili zagrijavanja tijela [3]. Također, bit će predstavljen i model iz područja elektrotehnike za određivanje jakosti struje u RL i RLC strujnim krugovima [2]. Zadnji postavljeni model opisuje slobodan pad u idealnim uvjetima bez otpora zraka. Dodatno se promatra situacija slobodnog pada s otporom zraka te problem kada je u sustav implementirana i elastična sila [4].

2. Obične diferencijalne jednadžbe

Jednadžbu koja sadržava derivacije zavisne varijable $y = y(x)$ s obzirom na nezavisnu varijablu x oblika

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

zovemo **obična diferencijalna jednadžba** (ODJ), pri čemu je njezin **red** određen redom najviše derivacije koja se u (1) pojavljuje.

Svaku funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava ODJ (1) zovemo **rješenjem** te jednadžbe. Skup funkcija

$$y = y(x, C_1, ..., C_n)$$

koje su sve rješenja ODJ (1) zovemo **općim rješenjem**.

Mnoge probleme koji se pojavljuju u biologiji, kemiji, fizici, ekonomiji i inženjerstvu moguće je pojednostavniti i zatim modelirati običnim diferencijalnim jednadžbama. Kako bi model kojim opisujemo određenu realnu situaciju bio u potpunosti definiran, potrebno je, uz diferencijalnu jednadžbu, zadati i početne uvjete, čime se dobiva početni problem.

Partikularno rješenje je rješenje jednadžbe (1) koje se može dobiti iz općeg rješenja i koje zadovoljava onoliko dodatnih uvjeta koliki je red jednadžbe. Najčešće se zadaju **početni uvjeti**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{2}$$

Problem koji se sastoji od jednadžbe (1) i početnih uvjeta (2) zovemo **početni (inicijalni) ili Cauchyjev problem**.

3. Matematički modeli

U nastavku rada prikazat će se formiranje matematičkih modela pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi koji su korišteni na nastavi u sklopu kolegija Matematika 2 na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Studenti su zajedno s nastavnikom analizirali realne fizikalne ili inženjerske probleme, postavljali modele, za njih uveli odgovarajuće metode rješavanja te dobivena rješenja validirali u skladu s fizikalnom interpretacijom problema.

3.1. Modeli populacijskog rasta

Primjer 1. Matematički model dinamike širenja virusa

Ako se ljudi slobodno kreću, nositelj virusa tijekom dana zarazi u prosjeku dvije osobe. Ako se ljudi pridržavaju pravila karantene i socijalnog distanciranja, nositelj virusa u prosjeku svaki peti dan zarazi jednu osobu. Treba odrediti broj zaraženih osoba u oba slučaja nakon tjedan dana ako je na početku promatranja samo jedna osoba bila zaražena. [4]

Neka je broj zaraženih osoba u trenutku t jednak $y(t)$. Uvažavajući činjenicu da je promjena broja zaraženih osoba proporcionalna trenutnom broju zaraženih uz konstantu proporcionalnosti k te da je na početku promatranja samo jedna osoba bila zaražena, imamo Cauchyjev problem:

$$\frac{dy}{dt} = ky,\, y(0) = 1\,.$$

Dobivena ODJ prvog reda rješava se metodom separacije varijabli i integriranjem

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$\ln y = kt + \ln C$$

te je opće rješenje jednako

$$y(t) = Ce^{kt}\,.$$

Uzmemo li u obzir početni uvjet $y(0) = 1$, dobiva se vrijednost konstante $C = 1$, odnosno partikularno rješenje:

$$y(t) = e^{kt}\,.$$

Dinamika širenja virusa ovisi o konstanti k koju ćemo odrediti na osnovi poznatih dodatnih informacija. U slučaju slobodnog kretanja nositelj virusa tijekom dana zarazi u prosjeku dvije osobe, što znači da su ukupno tri osobe zaražene. Tada vrijedi

$$y(1) = 3 \Rightarrow e^k = 3 \Rightarrow k = \ln 3\,,$$

pa se broj zaraženih osoba modelira funkcijom

$$y(t) = e^{t \ln 3}$$

Može se zaključiti da će u tjedan dana broj zaraženih osoba biti približno jednak $y(7) = 2187$.

U situaciji kada se ljudi pridržavaju pravila karantene i mjera socijalnog distanciranja, nositelj virusa u prosjeku svaki peti dan zarazi jednu osobu, odnosno zaražene su dvije osobe te vrijedi

$$y(5) = 2 \Rightarrow e^{5k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5}.$$

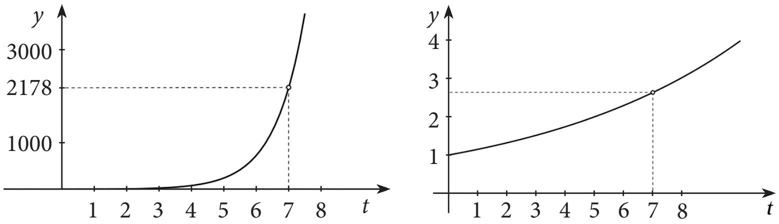
Broj zaraženih osoba modelira se funkcijom

$$y(t) = e^{t\frac{\ln 2}{5}},$$

te će se za tjedan dana dobiti znatno manji broj zaraženih osoba, odnosno

$$y(7) = 2.64 .$$

Dobivene vrijednosti mogu se usporediti i grafički (Graf 1.).



Graf 1. Slobodno kretanje i karantena

Primjedba. Ovo je vrlo pojednostavljen model u kojemu se ne uzima u obzir broj ozdravljenih.

Općenito, model populacijskog rasta može se primijeniti u različitim situacijama, pri čemu konstanta može biti pozitivna ili negativna, ovisno o tome promatra li se slučaj porasta ili smanjenja populacije odabranih jedinki.

Najjednostavniji matematički model rasta populacije stanovništva opisan eksponencijalnom funkcijom modelirao je engleski demograf i ekonomist **Thomas Robert Malthus** 1798. g. kako bi istaknuo nesrazmjer između geometrijskog porasta stanovništva i aritmetičkog rasta proizvodnje hrane koje će, kako je smatrao, nužno dovesti do oskudice hrane i siromaštva u svijetu u relativno kratkom razdoblju. No, povijest je pokazala da se neki prirodni procesi i odnosi ne mogu u potpunosti pojednostaviti, već se moraju promatrati u širem kontekstu.

Prirodni sustavi zbog svojih ograničenih resursa, kao što su životni prostor ili hrana, najčešće ne mogu prihvatiti neograničenu populaciju. Kako se populacija približava i dostiže svoj maksimalni kapacitet, resursi za održavanje života postaju manje obilni i stopa porasta populacije počinje opadati. Stoga se Malthusova pesimistička teorija nije pokazala pouzdanom. Za opisivanje samoograničenja rasta biološke populacije belgijski statističar **Pierre-Francois Verhulst** 1838. g. izveo je logističku jednadžbu.

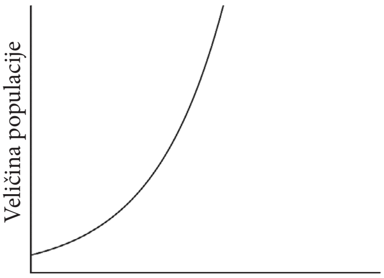
Primjer 2. Populacija u okolini s ograničenim resursima: logistička (Verhulstova) jednadžba

Pretpostavimo da je za promatranu populaciju, npr. kulturu bakterija, maksimalan kapacitet sustava (podloge) $K = 1000$, *a koeficijent rasta* $k = 0.07$ *na dan. Treba odrediti opće rješenje logističke diferencijalne jednadžbe uz zadane vrijednosti. Neka je broj jedinki populacije u trenutku t jednak P(t). Potrebno je odrediti P(t) ako početna populacija ima 100 jedinki, te broj jedinki nakon 12 i 48 dana.* [2]

U okolini s ograničenim resursima populacija na početku raste sa stopom rasta k, ali se taj rast usporava približavanjem veličine populacije maksimalnom kapacitetu sustava K. Opisano se ponašanje može izraziti logističkom jednadžbom:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Uočimo da je za jako malu populaciju, odnosno $P \approx 0$, izraz $1 - \frac{P}{K} \approx 1$, te dobivamo Malthusov model, dok u slučaju kada je $P \approx K$ populacija dostiže svoj maksimalan kapacitet, izraz $1 - \frac{P}{K} \approx 0$, odnosno s vremenom $\frac{dP}{dt} \approx$, što pokazuje da se rast populacije usporava.



Graf 2. Eksponencijalna regresija

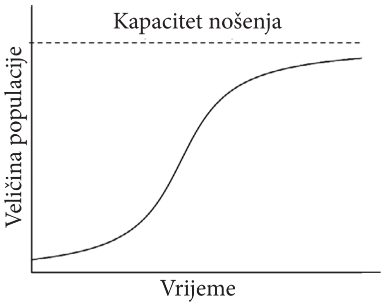
Iako logističku jednadžbu možemo prepoznati i kao Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu, ovdje ćemo je riješiti jednostavnijom metodom separacije varijabli i integriranjem:

$$\frac{dP}{dt} = k\frac{P(K-P)}{K}$$

$$\int \frac{KdP}{P(K-P)} = \int kdt$$

$$\int \left[\frac{K-P}{P(K-P)} + \frac{P}{P(K-P)}\right] dP = \int kdt$$

$$\int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right] dP = \int kdt$$



Graf 3. Logistička regresija

$$\ln P - \ln|K - P| = kt - \ln C$$

$$\ln \frac{CP}{K - P} = kt$$

$$\frac{CP}{K - P} = e^{kt}$$

$$\frac{K}{P} = 1 + Ce^{-kt}$$

Opće rješenje za nepoznati maksimalan kapacitet sustava K i koeficijent rasta k dobiva se u obliku

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-kt}},$$

odnosno u našem slučaju vrijedi

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ce^{-0.07t}}.$$

Nepoznatu konstantu C odredit ćemo na osnovi poznate početne populacije:

$$P(0) = 100 \Rightarrow \frac{1000}{1 + C} = 100 \Rightarrow 1 + C = 10 \Rightarrow C = 9,$$

pa dobivamo partikularno rješenje

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.07t}}.$$

Nakon 12 dana broj jedinki približno je jednak

$$P(12) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.07 \cdot 12}} \approx 205,$$

odnosno nakon 48 dana imamo

$$P(12) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.07 \cdot 48}} \approx 762.$$

3.2. Model brzine raspadanja radioaktivnih elemenata

Primjer 3. Mumija Ötzi

Ötzi, mumija ledenog čovjeka pronađena 1991. g. u Alpama, sadrži 52.5 % radioaktivnog ugljika C_6^{14}. Treba odrediti starost mumije u trenutku njezina pronalaska ako vrijeme poluraspada radioaktivnog ugljika C_6^{14} iznosi 5715 g. [1]

Neka je količina promatranog elementa u mumiji u trenutku t jednaka $y(t)$, pri čemu je u trenutku smrti njegova početna vrijednost u organizmu jednaka y_0. Uvažavajući činjenicu da je brzina raspadanja radioaktivnog elementa proporcionalna njegovoj trenutnoj količini, imamo početni problem:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,\ y(0) = y_0,$$

pri čemu je $k > 0$ fizikalna konstanta koja ovisi o promatranom elementu.

Slika 1. Ötzi - rekonstrukcija

Opće rješenje ODJ prvog reda dobiva se metodom separacije varijabli i integriranjem

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int kdt$$

$$\ln y = -kt + \ln C$$

u obliku

$$y(t) = Ce^{-kt},$$

pri čemu nakon uvrštavanja početnog uvjeta $y(0) = y_0$ slijedi $C = y_0$, odnosno imamo partikularno rješenje:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Dodatni uvjet da vrijeme poluraspada radioaktivnog ugljika C_6^{14} iznosi 5715 g., odnosno $y(5715) = 0.5y_0$, omogućava određivanje vrijednosti konstante *k*. Vrijedi da je $y_0 e^{-5715k} = 0.5y_0$, iz čega slijedi da je $k = 0.0001213$, pa se dobiva funkcija oblika

$$y(t) = y_0 e^{-0.0001213t}$$

po kojoj se uz dane uvjete modelira količina radioaktivnog ugljika C_6^{14} u organizmu. Korištenjem podatka o prisutnosti C_6^{14} u mumiji, $y(t) = 0.525y_0$, moguće je odrediti njezinu starost,

$$y_0 e^{-0.0001213t} = 0.525y_0 \Rightarrow t = \frac{\ln 0.525}{-0.0001213},$$

odnosno zaključiti da je pronađena mumija u trenutku njezina pronalaska imala približno 5312 g.

3.3. Model hlađenja ili zagrijavanja tijela

Primjer 4. Hlađenje kolača

Kolač se peče u pećnici na 200 °C. *Izvađen je iz pećnice na sobnu temperaturu od* 20 °C. *Nakon 3 minute temperatura kolača bila je* 140 °C. *Uz pretpostavku da je kolač ostavljen na sobnoj temperaturi, treba odrediti temperaturu kolača u proizvoljnom trenutku t. [3]*

Prema Newtonovu zakonu hlađenja, promjena temperature tijela u trenutku t srazmjerna je razlici između temperature tijela $T(t)$ i okoline T_{ok}, odnosno vrijedi:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_{ok}) ,$$

gdje je $k > 0$ konstanta koja ovisi o fizikalnim svojstvima promatranog tijela koje se hladi (u ovom slučaju kolača).

Negativan predznak na desnoj strani diferencijalne jednadžbe pokriva problem hlađenja i zagrijavanja tijela. Naime, ako je temperatura tijela veća u odnosu na temperaturu okoline, promjena će biti negativna i doći će do hlađenja, dok će u obrnutoj situaciji promjena biti pozitivna i tijelo će se zagrijati.

Problem koji treba riješiti u primjeru je sljedeći:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) , \qquad T(0) = 200^\circ .$$

Metodom separacije varijabli i integriranjem

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{T-20} = -kdt \\ &\int \frac{dT}{T-20} = -\int kdt \\ &\ln|T-20| = -kt + \ln C \end{aligned}$$

dobiva se opće rješenje oblika

$$T(t) = Ce^{-kt} + 20 ,$$

a uvažavanjem početnog uvjeta $T(0) = 200$ slijedi da je $C = 180$ te je traženo partikularno rješenje:

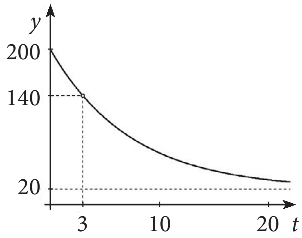
$$T(t) = 180e^{-kt} + 20 .$$

Dinamika promjene temperature ovisi o konstanti k čiju ćemo vrijednost odrediti na osnovi poznath informacija. Kako je $T(3) = 140$, dobivamo da je $k = 0.135$, odnosno rješenje početnog problema

$$T(t) = 180e^{-0.135t} + 20 ,$$

po kojem se uz zadane uvjete modelira temperatura kolača u trenutku t i koje je prikazano na grafu.

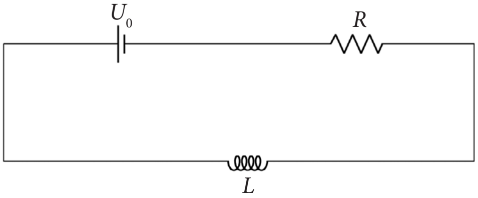
Iz grafa (Graf 4.) može se zaključiti da će okvirno nakon 20 minuta biti moguća degustacija kolača bez opasnosti od opeklina.



Graf 4. Hlađenje kolača

3.4. Strujni krug

U području elektrotehnike modeliranje korištenjem diferencijalnih jednadžbi prisutno je kod određivanja jakosti struje u strujnom krugu. Neka su otpornik električnoga otpora R i zavojnica induktiviteta L spojeni u strujni krug s konstantnim izvorom napona U_0. U trenutku $t = 0$ spušta se sklopka i strujnim krugom počinje teći struja (posljedično je $i(0) = 0$). Cilj je opisati iznos struje $i(t)$ u trenutku t. Na Dijagramu 1. prikazan je strujni krug nakon spuštanja sklopke. [2]



Dijagram 1. RL strujni krug nakon spuštanja sklopke

Prema 2. Kirchoffovu zakonu, zbroj svih padova napona u zatvorenom strujnom krugu jednak je ukupnom naponu izvora, odnosno matematički zapisano vrijedi:

$$\underbrace{L\frac{di}{dt}}_{\text{pad napona na zavojnici}} + \underbrace{Ri}_{\text{pad napona na otporniku}} = U_0,$$

pri čemu je dobivena nehomogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda odnosno početni problem:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}, \qquad i(0) = 0\,.$$

Opće rješenje pripadne homogene linearne diferencijalne jednadžbe dobiva se metodom separacije varijabli i integriranjem

$$\frac{di_h}{dt} + \frac{R}{L}i_h = 0$$

$$\frac{di_h}{i_h} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int\frac{di_h}{i_h} = -\int\frac{R}{L}dt$$

$$\ln i_h = -\frac{R}{L}t + \ln C$$

$$i_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Budući da se opće rješenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe može zapisati kao zbroj jednog partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe i općeg rješenja homogene jednadžbe, potrebno je još odrediti jedno partikularno rješenje. Jednostavno je pokazati da je u promatranom primjeru partikularno rješenje jednako

$$i_p(t) = \frac{U_0}{R},$$

pa slijedi da je opće rješenje polazne jednadžbe oblika

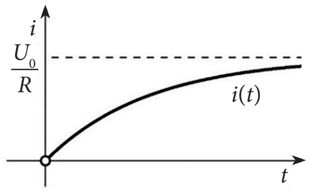
$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \underbrace{\frac{U_0}{R}}_{\text{stacionarno stanje}} + \underbrace{Ce^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{tranzijentno stanje}}.$$

Uvažavanjem početnog uvjeta $i(0) = 0$ dobivamo

$$\frac{U_0}{R} + C = 0,$$

odnosno vrijednost konstante $C = -\frac{U_0}{R}$ i partikularno rješenje početnog problema:

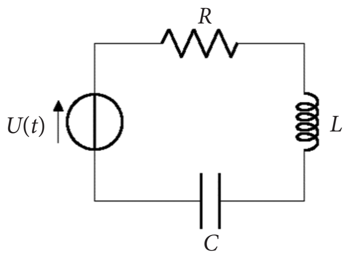
$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$



Graf 5. Jakost struje

Dobiveno rješenje predstavlja jakost struje u RL strujnom krugu koji je priključen na istosmjerni izvor i grafički je prikazano kao rastuća eksponencijalna funkcija s horizontalnom asimptotom $i = \frac{U_0}{R}$ (Graf 5.). Dakle, s protokom vremena jakost struje opisana funkcijom *i(t)* približava se stacionarnom stanju $i = \frac{U_0}{R}$.

Proširi li se RL strujni krug s kondenzatorom, dobiva se RLC strujni krug. Neka su otpornik električnoga otpora *R*, zavojnica induktiviteta *L* i nabijeni kondenzator kapaciteta *C* spojeni u strujni krug s izmjeničnim izvorom napona. Neka je *U(t)* vrijednost napona na izvoru u trenutku *t*. Cilj je opisati iznos struje *i(t)* u trenutku *t*, uz pretpostavku da je početna jakost struje jednaka $i(0) = 0$, te da je početni naboj na kondenzatoru jednak $q(0) = q_0$.



Dijagram 2. RLC strujni krug

Sada prema 2. Kirchoffovu zakonu u zbroj svih padova napona u zatvorenom strujnom krugu, za razliku od RL strujnog kruga, treba ubrojiti i pad napona na kondenzatoru koje treba zatim izjednačiti s ukupnim naponom izvora. Matematički zapisano imamo:

$$\underbrace{L\frac{di}{dt}}_{\text{pad napona na zavojnici}} + \underbrace{Ri}_{\text{pad napona na otporniku}} + \underbrace{\frac{1}{C}q}_{\text{pad napona na kondenzatoru}} = U(t).$$

Uzimajući u obzir da je $i = \frac{dq}{dt}$, dobivamo nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda oblika

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U(t), \qquad q(0) = q_0, \qquad \frac{dq}{dt}(0) = 0.$$

Rješavanjem prethodne diferencijalne jednadžbe nalazi se *q(t),* a zatim se iz $i(t) = q'(t)$ dobiva *i(t)*. Budući da je naglasak članka na modeliranju problema, postupak rješavanja u ovom problemu izostavljamo te upućujemo čitatelje na literaturu [3].

3.5. Slobodan pad

Upotrebom ODJ mogu se postaviti matematički modeli koji će opisati slobodan pad u idealnim uvjetima bez otpora zraka, situaciju slobodnog pada s otporom zraka te problem kada je u sustav integrirana i elastična sila. [4]

Slobodan pad bez otpora zraka. Prema 2. Newtonovu zakonu, gravitacijska sila jednaka je umnošku mase tijela *m* koje pada i ubrzanja *a*, odnosno vrijedi:

$$F = mg = ma,$$

pri čemu je *g* gravitacijska konstanta.

Uvede li se oznaka *x(t)* za udaljenost od početnog položaja, tada se brzina može izraziti s $v = x'(t)$, odnosno ubrzanje s $a = x''(t)$, te se dobiva ODJ 2. reda:

$$x''(t) = g.$$

Slobodan pad s otporom zraka. U situaciji kada postoji otpor zraka poznato je da će tijelo na koje djeluje manji otpor zraka brže padati i obratno. Često se uzima da je otpor zraka proporcionalan brzini. Ukupna sila koja na tijelo djeluje bit će jednaka gravitacijskoj sili umanjenoj za otpor zraka, pa prema 2. Newtonovu zakonu vrijedi:

$$F = mg - \beta v = ma,$$

pri čemu je β koeficijent otpora zraka i *v* brzina tijela koje pada. Uvažavanjem ranije uvedenih oznaka dobiva se ODJ 2. reda oblika:

$$mx''(t) + \beta x'(t) = mg.$$

Slika 2. Otpor zraka.

Slobodan pad s otporom zraka i elastičnom silom. Dodatno, u problemima kada je pored otpora zraka značajna i elastična sila, ukupna sila koja djeluje na tijelo bit će jednaka gravitacijskoj sili umanjenoj za sile koje djeluju u suprotnom smjeru u odnosu na nju, odnosno otpor zraka i elastičnu silu, pa se dobiva

$$F = mg - \beta v - kx = ma,$$

gdje je *k* koeficijent elastičnosti. Uz ranije uvedene oznake imamo ODJ 2. reda:

$$mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = mg,$$

pri čemu je *x(t)* položaj u odnosu na poziciju neproduljenog užeta, *g* gravitacijska konstanta, *m* masa tijela, β koeficijent otpora te *k* koeficijent elastičnosti.

Modeli koji opisuju zadane fizikalne probleme će se uz ODJ u potpunosti definirati zadavanjem početnih uvjeta u nekom trenutku, npr. u trenutku $t = 0$ početnog položaja $x(0) = 0$ i početne brzine $x'(0) = v_0$. Za rješavanje problema ponovno je potrebno poznavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda s konstantnim koeficijentima [3].

Slika 3. Otpor zraka i elastična sila

4. Zaključak

Nerazumijevanje i poteškoće u učenju diferencijalnih jednadžbi jednim dijelom proizlaze iz same prirode sadržaja. Teorija diferencijalnih jednadžbi podrazumijeva složene koncepte koji su u međuodnosu s pojmovima funkcije, derivacije i integrala te se oslanja na fluentnost u procedurama integriranja i deriviranja.

U tradicionalnom poučavanju ODJ imperativ se u velikom dijelu stavlja na instrumentalno znanje. Studentima je primarni fokus na procedurama koje pamte kao posebne trikove. Iskustvo s realističnim primjerima upotrebe običnih diferencijalnih jednadžbi može napraviti odmak od mnemotehničkih receptura za algebarske postupke prema razvoju konceptualnog znanja potrebnog za ispravno tumačenje novih situacija i stvaranje novih ideja izvan onih koje su zapamtili. Studenti su time izloženi svjesnijem iskustvu koje ih potiče na kontekstualizaciju koncepata običnih diferencijalnih jednadžbi i ispravnu interpretaciju terminologije iz algebarskog zapisa.

U ovom radu navedeni su jednostavni motivacijski primjeri matematičkih modela u inženjerstvu u kojima se primjenjuju obične diferencijalne jednadžbe. Sagledavanjem svih aspekata odabranog realnog problema, formuliranjem pripadajućeg matematičkog zapisa te odgovarajućom interpretacijom dobivenog rješenja, studenti razvijaju svoja znanja, vještine i sposobnosti kojima će moći odgovoriti na izazove koji se pred njih postavljaju kao pred buduće inženjere.

Literatura

1. E. Kreyszig, Advanced Engineering Matehematics, 9th ed., Wiley, Hoboken, 2006.
2. G. B. Thomas, M. D. Weir, J. R. Hass, Thomas' Calculus, 12th ed., Pearson, Boston, 2010.
3. D. G. Zill, A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, 9th ed., Brooks/Cole, Canada, 2009.
4. N. Črnjarić-Žic, S. Maćešić, predavanja iz kolegija Matematika 2, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2020.