Još dva dokaza Arhimedovog[1] teorema

Šefket Arslanagić[2] i Alija Muminagić[3]

U časopisu „Poučak", Vol. 14, Br. 54 (lipanj 2013.), 22-27 objavili smo članak pod naslovom *Arhimedov teorem* gdje smo dali četiri razna dokaza ovoga poučka. U ovom ćemo članku dati još dva dokaza.

Ponovimo sada kako glasi ovaj teorem.

Teorem (Arhimed): Oko trokuta ΔABC opisana je kružnica k i neka je točka D središte onog luka $\overparen{AB}$ kružnice k koji sadrži vrh C trokuta i neka je pri tome $|AC|<|BC|$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na stranicu BC trokuta ΔABC. Treba dokazati da je

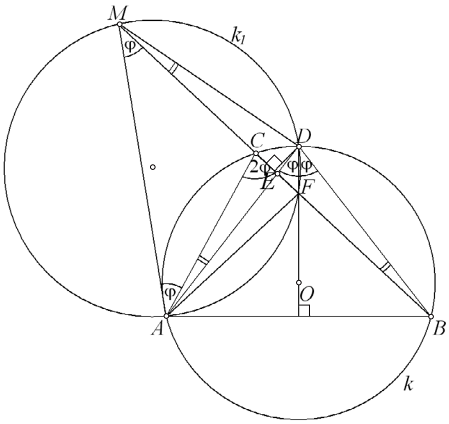
$$|AC|+|CE|=|BE|.$$

Dokaz 1: Neka je točka O središte opisane kružnice k oko trokuta ΔABC (Slika 1.). Tada je $|DA|=|DB|$ (jer je točka D središte većeg luka $\overparen{AB}$), pa je

$$|\angle DAC|=|\angle DBC|, \tag{1}$$

kao obodni kutovi nad lukom $\overparen{CD}$. Neka je $|\angle ADO|=\angle BDO|=\varphi$ i neka je točka F sjecište dužina $\overline{OD}$ i $\overline{BC}$. Tada je

$$|\angle FAB|=|\angle FBA|. \tag{2}$$



Slika 1.

[1]Arhimed iz Sirakuze, oko 287. – 212. prije nove ere, starogrčki matematičar, jedan od najvećih matematičara svih vremena
[2]Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina
[3]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Iz (1) i (2) slijedi:

$$|\angle DAF| = |\angle DBF|. \tag{3}$$

Produžimo stranicu $\overline{BC}$ preko točke C do točke M tako da je $|CM| = |CA|$. Trokut ΔCAM je jednakokračan i zato je $|\angle CAM| = |\angle CMA|$, a odavde je $|\angle ACB| = 2|\angle CMA|$ (kao vanjski kut trokuta ΔAMC). Dalje je $|\angle ACB| = |\angle ADB| = 2\varphi$ (kao obodni kutovi nad istim lukom $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k) pa slijedi da je $|\angle CAM| = |\angle CMA| = \varphi$. Zato točke A, M, D i F pripadaju istoj kružnici k_1 i odatle slijedi jednakost

$$|\angle DAF| = |\angle DMF|, \tag{4}$$

kao obodni kutovi nad istim lukom $\overset{\frown}{DF}$ kružnice k_1.

Iz (3) i (4) slijedi da je $|\angle DBF| = |\angle DMF|$, tj. trokut ΔBDM je jednakokračan pa je

$$|ME| = |BE|. \tag{5}$$

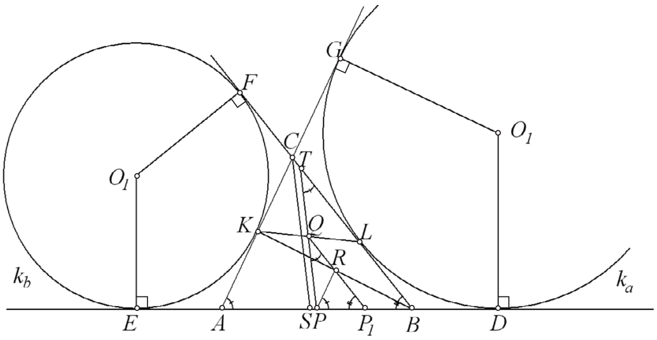
Budući da je trokut ΔCAM ΔCAM jednakokračan, to je

$$|MC| = |AC|\ . \tag{6}$$

Kako je $|ME| = |MC| + |CE|$, to odavde dobijamo zbog (5) i (6):

$$|AC| + |CE| = |BE|\text{, q.e.d.}$$

Dokaz 2: Koristit ćemo pripisane kružnice k_a i k_b trokuta ΔABC u kojemu je $|AC| < |BC|$. Neka kružnice k_a i k_b dodiruju stranice BC i AC u točkama L i K (Slika 2.). Neka je točka P polovište stranice AB trokuta ΔABC i neka je točka Q polovište dužine $\overline{KL}$. Dokazat ćemo da pravac kroz točke P i Q koji presijeca stranicu trokuta BC u točki T raspolovljava opseg tog trokuta, tj. da je $|PA| + |AC| + |CT| = |TB| + |BP|$.



Slika 2.

Uvedimo i druge oznake kao na Slici 2.

Imamo da je:

$\left|AB\right|+2\left|BD\right|=\left|AB\right|+\left|BD\right|+\left|BD\right|=\left|AD\right|+\left|BD\right|=$ (prema teoremu (*) o jednakosti tangentnih dužina) $=$

$$=\left|AG\right|+\left|BD\right|=\left|BD\right|+\left|AK\right|+\left|KC\right|+\left|CG\right|\overset{(*)}{=}\left|BL\right|+\left|AK\right|+\left|CF\right|+\left|CL\right|=$$

$$=\left|AK\right|+\left(\left|BL\right|+\left|CL\right|+\left|CF\right|\right)=\left|AK\right|+\left|BF\right|\overset{(*)}{=}\left|AK\right|+\left|BE\right|\overset{(*)}{=}\left|AE\right|+\left|BE\right|=$$

$$=\left|AE\right|+\left|AE\right|+\left|AB\right|=\left|AB\right|+2\left|AE\right|.$$

Odavde slijedi da je $\left|BD\right|=\left|AE\right|$.

Kako je $\left|BD\right|\overset{(*)}{=}\left|BL\right|$ ili zbog $\left|BD\right|=\left|AE\right|$, $\left|AE\right|=\left|BL\right|$, to je zbog $\left|AE\right|=\left|AK\right|$

$$\left|AK\right|=\left|BL\right| . \tag{7}$$

Spojimo točke B i K i neka je točka R polovište dužine $\overline{BK}$. Kako je točka P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ΔABC , to je dužina $\overline{PR}$ srednjica trokuta ΔABK , a $\overline{RQ}$ je srednjica trokuta ΔBLK . Zato je

$$PR \parallel AK \quad \text{i} \quad \left|PR\right|=\frac{1}{2}\left|AK\right| , \tag{8}$$

$$QR \parallel BL \quad \text{i} \quad \left|QR\right|=\frac{1}{2}\left|BL\right| . \tag{9}$$

Iz (7), (8) i (9) slijedi da je $\left|PR\right|=\left|QR\right|$, što znači da je trokut ΔPRQ jednakokračan. Zbog $PR \parallel AC$ i $QR \parallel BC$ je $\left|\angle RPP_1\right|=\left|\angle CAB\right|$ i $\left|\angle PP_1R\right|=\left|\angle ABC\right|$, gdje je $P_1=QR\cap AB$.

Dalje je $\left|\angle QRP\right|=\left|\angle RPP_1\right|+\left|\angle PP_1R\right|=\left|\angle CAB\right|+\left|\angle ABC\right|$ (jer je $\left|\angle QRP\right|$ vanjski kut trokuta ΔPP_1R) i zbog $\left|\angle CAB\right|+\left|\angle ABC\right|=180^0-\left|\angle ACB\right|$ (slijedi iz trokuta ΔABC) je

$$\left|\angle QRP\right|=180^\circ-\left|\angle ACB\right|. \tag{10}$$

Sada iz jednakokračnog trokuta ΔPQR slijedi

$$2\left|\angle PQR\right|+\left|\angle QRP\right|=180^\circ \overset{(10)}{\Leftrightarrow} 2\left|\angle PQR\right|+180^\circ-\left|\angle ACB\right|=180^\circ, \text{ tj.}$$

$$\left|\angle PQR\right|=\frac{1}{2}\left|\angle ACB\right|. \tag{11}$$

Neka je dužina $\overline{CS}$ simetrala kuta $\left|\angle ACB\right|$. Vidimo sada da je zbog (11)

$$PQ \parallel CS .$$

Kako je točka P polovište stranice AB, to je

$$\left|AS\right|+\left|SP\right|=\left|BS\right|-\left|SP\right| ,$$

odakle slijedi

$$|SP| = \frac{|BS| - |AS|}{2} \quad . \tag{12}$$

Prema teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta za trokut ΔABC vrijedi da je

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|BS|},$$

odakle

$$|AS| = \frac{|AC| \cdot |BS|}{|BC|} \quad . \tag{13}$$

Sada iz (12) i (13) dobivamo da je

$$|SP| = \frac{1}{2}\left(|BS| - \frac{|AC| \cdot |BS|}{|BC|}\right) = \frac{|BS|\left(|BC| - |AC|\right)}{2|BC|},$$

iz čega slijedi

$$|BC| - |AC| = \frac{2|SP| \cdot |BC|}{|BS|} \quad . \tag{14}$$

Zbog $PT \parallel CS$ je $\Delta BTP \sim \Delta BCS$, odavde slijedi da je

$$\frac{|SP|}{|BS|} = \frac{|CT|}{|BC|} \quad . \tag{15}$$

Sada iz (14) i (15) dobivamo da je

$$|BC| - |AC| = \frac{2|CT|}{|BC|} \cdot |BC| = 2|CT|,$$

a odavde je

$$|BC| = |AC| + 2|CT| = |AC| + |CT| + |CT|,$$

odnosno

$$|BC| - |CT| = |AC| + |CT| \quad . \tag{16}$$

Tako je konačno zbog (16)

$$|PA| + |AC| + |CT| = |PA| + |BC| - |CT| = |PA| + |BT|,$$

odnosno

$$|AC| + |CT| = |BT|, \text{ q.e.d.}$$

Literatura

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.
3. Carstensen, J., Muminagić, A., *Matematiske perler*, Frederiksberg (Danska), 2004.
4. Carstensen, J., Muminagić, A., *Arhimedov poučak*, Časopis Matka (Zagreb), br. 60, lipanj 2007.