IZ NASTAVNE PRAKSE

Nogomet u nastavi matematike 8. razreda osnovne škole

Franka Miriam Brückler[1] i Filip Mijač[2]

Uvod

...I tako, malo pomalo, stigli smo do kraja osnovne škole. U 8. razredu, prema novom kurikulu [1], učenici računaju s potencijama u kojima je baza racionalna, a eksponent cjelobrojan, uče računati s jednostavnijim algebarskim izrazima, rješavaju i primjenjuju pojedinačne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom te sustave od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, računaju s (drugim) korijenima, uključivo rješavanja čisto kvadratnih jednadžbi, skiciraju i izrađuju modele geometrijskih tijela te određuju njihova oplošja i volumene, bave se Talesovim i Pitagorinom poučkom, preračunavaju mjerne jedinice za duljinu, masu, vrijeme, volumen, površinu i kut te prikazuju mjeriva obilježja znanstvenim zapisom, procjenjuju i računaju vjerojatnosti slučajnih događaja, primjenjuju razmjernost, razmatraju odnose dviju kružnica i dvaju pravaca u ravnini, ... Kao i prije, mnoge od ovih tema možemo povezati s nogometom.

Nogomet u aritmetici i algebri 8. razreda OŠ

Aritmetika razine 8. razreda osnovne škole (mislimo na ono što je u ovom razredu novo) nema nekih specifičnih poveznica s nogometom. Najviše nam od toga treba korjenovanje, ali povezano s primjenom Pitagorina poučka, što ćemo susresti u sljedećem odjeljku. Također, možemo primjerice kapacitete raznih stadiona zapisivati znanstvenim zapisom [2, str. 32].

Što se algebre tiče, ovdje dajemo jedan jednostavni primjer.

Primjer 1.

Kapacitet osječke Opus Arene, na kojoj se u doba objave ovog članka već odigrala kvalifikacijska utakmica između Hrvatske i Turske, iznosi 13 005, od čega je 5 % bilo rezervirano za navijače turske reprezentacije. Iako su ulaznice prodavane po tri različite cijene, budući da bi nas to vodilo na sustav s tri nepoznanice, uzmimo da su

[1]Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
[2]Filip Mijač, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

u prodaji bile samo ulaznice po dvije cijene: 25 € i 30 €, koje su vrijedile za veliku većinu mjesta za domaće navijače na stadionu. Kako smo vidjeli u medijima, sve ulaznice rasprodane su ekspresno, u samo nekoliko minuta od puštanja u prodaju. Recimo da smo saznali – u trenutku pisanja ovog članka nismo mogli pronaći taj podatak, ali red veličine sigurno je blizak ovom koji navodimo – da je ukupan prihod od prodaje ulaznica domaćim navijačima bio 337 625 €.

Prvo, od 13 005 mjesta 95 % njih bilo je namijenjeno domaćim navijačima. To iznosi 12 354.75, uzmimo dakle da je to 12 355. Iz podataka u medijima znamo da je prodano svih 12 355 ulaznica. Od njih je x bilo po cijeni od 25 € i y po cijeni od 30 €, dakle prva jednadžba našeg sustava glasi

$$x + y = 12\,355.$$

S druge strane, ukupan prihod 337 625 € dobiven je od prodaje x ulaznica po 25 € i njih y po 30 €, dakle druga jednadžba sustava glasi

$$25x + 30y = 337\,625.$$

Rješavanjem ovog sustava zaključili bismo da je prodano 6605 ulaznica po 25 € i 5750 ulaznica po 30 €.

Nogomet u geometriji 8. razreda OŠ

Geometrija 8. razreda osnove škole pruža mnogo mogućnosti povezivanja s nogometnim temama, pri čemu se posebno ističe primjena Pitagorina poučka. Pritom se prirodno pojavljuje i još jedna tema ovog razreda, a to je računanje s drugim korijenima. Krenimo od jednostavnog primjera.

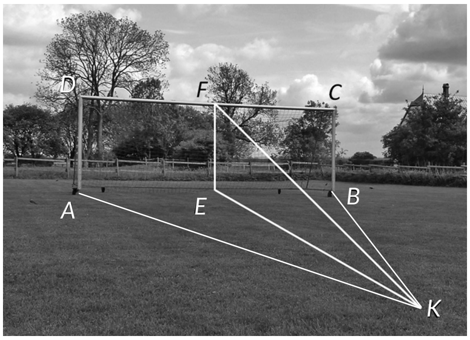
Primjer 2.

Kao što smo već spominjali u prethodnim nastavcima ovog serijala, najčešće su dimenzije nogometnog terena (primjerice, na stadionima zagrebačkog Dinama, minhenskog Bayerna i istanbulskog Fenerbahçea) 68 m × 105 m. Koliko je duga najdulja dužina koju neki igrač može pretrčati na takvom stadionu, a da pritom ne izlazi iz okvira terena?

Budući da je teren pravokutnog oblika, očigledno je najdulja dužina unutar terena spojnica dvaju nasuprotnih vrhova, tj. dijagonala, a njezina je duljina, prema Pitagorinu poučku, jednaka

$$\sqrt{105^2 + 68^2}\ \text{m} = \sqrt{15649}\ \text{m} \approx 125.10\,\text{m}\ .$$

Dok je prethodni primjer elementaran i samo od „teorijski-nogometnog” interesa, Pitagorin poučak omogućuje objašnjenje nekih nogometnih (statističkih) činjenica poznatih većini navijača. Konkretno, radi se u kaznenim udarcima. Prema nogometnim statistikama (vidi npr. [3,4,5]) u otprilike 70 % – 90 % slučajeva, ovisno o ligi odnosno natjecanju, kazneni udarac rezultira pogotkom. Postotci su nešto niži u „slabim” ligama nego u „jakim” natjecanjima. Zašto? Na prvi pogled to se ne čini sa-



Slika 1. Geometrija kaznenog udarca

svim jasnim – ta u „slabom" su natjecanju i izvođači i vratari lošiji, te bi se to, intuitivno gledajući, trebalo nekako „izravnati". Jesu li to u slabijim prvenstvima izvođači slabiji ili su pak golmani bolji nego u jačima?

Da bismo bolje razumjeli o čemu se radi, analizirajmo prvo geometriju kaznenog udarca (Slika 1.). Točka K s koje se izvodi udarac prema pravilima [6] je na 10.97 m od polovišta E donjeg ruba nogometnih vrata, koja su dimenzija 2.44 m × 7.32 m.[3] Uočimo pravokutni trokut KEF, gdje je F polovište gornjeg ruba vrata. Prema Pitagorinu poučku slijedi da je

$$|KF| = \sqrt{10.9728...^2 + 2.4384...^2}\ \text{m} = 11.24(05...)\,\text{m}.$$

No, i trokut KFC je pravokutan, pa je – opet prema Pitagorinu poučku – udaljenost od točke izvođenja kaznenog udarca do bilo kojeg od dva dalja (gornja) vrha vrata jednaka

$$y = \sqrt{|KF|^2 + (7.3152.../2)^2}\ \text{m} = 11.82\,\text{m}.$$

Dakle, maksimalna udaljenost koju će lopta u kaznenom udarcu prijeći (ako uopće uđe u okvir vrata) je 11.82 m. U jakim prvenstvima vrhunski izvođači kaznenih udaraca ispucavaju lopte vrlo precizno (dakle, mogu ciljati i točno u jedan od gornjih kutova) brzinama i do 100 km/h – udaljenost od D do C tako ispucana lopta prijeći će u manje od pola sekunde. Budući da je reakcijsko vrijeme vratara jedina veličina koju možemo smatrati više-manje neovisnom o kvaliteti natjecanja i iznosi oko 0,2 s, vidimo da čak i najboljem vrataru vrijeme preostalo za uloviti precizno i jako ispucanu loptu teško da je dovoljno da je stvarno ulovi. S druge strane, u slabijem natjecanju vrataru preostane više vremena (jer lopta neće biti ispucana tako visokom brzinom) i preciznost je izvođača manja, pa su nešto veće šanse obrane kaznenog udarca.

Nogomet u vjerojatnosti 8. razreda OŠ

U prethodnom odjeljku spomenuli smo da su postotci uspješnosti izvođenja kaznenih udaraca i jedanaesteraca[4] prilično slične u svim natjecanjima i uglavnom variraju od 70 % do 90 %, pri čemu su postotci uspješnosti kod jedanaesteraca nešto manji nego kod kaznenih udaraca. Znamo i da mnogi jedanaesterce i kaznene udarce smatraju vrstom lutrije, pa je prirodno u analizi kaznenih udaraca i jedanaestera-

[3]U izvornim, engleskim pravilima 12 yd (jardi), što je preračunato – opet tema za nastavu matematike! – 10.9728... m. Slično su i dimenzije nogometnih vrata širina 8 yd (7.3152... m) i visina 8 ft (2.4384... m). Naime, 1 yd je egzaktno 0.9144 m i egzaktno jednak 3 ft.

[4]Za one koji ne znaju: kazneni udarac dosuđuje se tijekom utakmice, dok se jedanaesterci izvode u slučaju da neka utakmica za koju mora biti odlučen pobjednik (npr. finale svjetskog prvenstva) završi neodlučeno čak i nakon produžetaka.

ca, osim geometrije i fizike, uključiti i vjerojatnost. U ovom ćemo ih odjeljku stoga shvatiti kao igru na sreću, čije ćemo pravilo prvo postaviti jako jednostavno i onda poboljšati kako bismo dobili realističniji model.

Da bi pogodak pao, vratar ne smije uloviti loptu. Ako to gledamo kao lutriju, možemo to reći i ovako – ako vratar pogodi dio gola u koji lopta ide, obranit će, a inače će izvođač postići pogodak. Iako naravno vratar gleda izvođača i temeljem njegovih kretnji (i poznavanja navika toga igrača) pokušava zaključiti u koji će dio vrata lopta biti upućena, kao što je očito svakom tko je češće vidio izvođenje kaznenih udaraca i jedanaesteraca, dobar dio vratarove odluke kamo skočiti čista je lutrija. Stoga naša pretpostavka „vratar nasumce pogađa *u koji dio vrata* lopta ide i, ako pogodi, brani udarac" nije jako daleko od realnosti. No, sad je potrebno precizirati što mislimo pod *dijelom vrata*.

Slika 2. Nogometna vrata podijeljena na četvrtine

Prvo podijelimo vrata na četiri dijela (Slika 2.) prema kojima golman može skočiti: gornja i donja lijeva četvrtina te gornja i donja desna četvrtina. U tom slučaju pogodak će biti postignut ako vratar odabere krivu četvrtinu, dakle u 75 % slučajeva bit će postignut pogodak. No, ovo je bilo jako jednostavno i možda smo sasvim slučajno dobili postotak sličan postotcima iz stvarnih statističkih podataka. Model možemo popraviti tako da vrata u mislima podijelimo na više dijelova. Ako ih podijelimo na pet dijelova (gornji i donji lijevi i desni dijelovi te peti dio neka je sredina jer je moguće da izvođač puca prema sredini), vratar će pogoditi kamo lopta ide u 1/5 slučajeva, a u preostalih 4/5 = 80 % bit će postignut pogodak. Možemo podijeliti vrata i na više dijelova, ali ne smijemo pretjerati: s obzirom na relativnu veličinu vratara u odnosu na vrata (vratar pokriva otprilike četvrtinu površine vrata, što se lako geometrijski pokaže – zadatak razine 7. razreda osnovne škole po novom, a 8. razreda po starom kurikulu, vidi [5, str. 30]), nema smisla u našem modelu vrata podijeliti na više od 6 do 7 dijelova.

S druge strane, zasigurno ste primijetili da još nismo uzeli u obzir da izvođači ponekad potpuno promaše vrata te i to treba uključiti u model. Uzmimo da se to događa u 1 od 20, dakle u 5 % slučajeva. To znači da će od 100 izvedenih jedanaesteraca odnosno kaznenih udaraca prosječno 5 biti promašeno. Od preostalih 95, uz podjelu gola na pet dijelova, 4/5 bit će uspješni. Dakle, u ovako poboljšanom modelu uspješnost izvođenja jedanaesteraca i kaznenih udaraca može se procijeniti na 76 %.

Da sažmemo: Ako je q vjerojatnost da izvođač potpuno promaši vrata i ako se vrata podijele na n dijelova za koje pretpostavljamo da vratar nasumce bira jedan i ako pogodi pravi, onda brani udarac, dobivamo da se vjerojatnost uspješno izvedenog jedanaesterca odnosno kaznenog udarca može procijeniti s

$$p = \frac{n-1}{n} \cdot (1-q) \,.$$

U tablici 1. nalaze se iznosi p za različite n i q. Lako se vidi da za većinu smislenih n i q dobivamo vjerojatnosti bliske opaženima – između 70 % i 90 %.

n	*q*	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %
4			71.25 %	70.50 %	69.00 %	68.25 %	67.50 %	66.75 %	66.00 %	65.25 %	64.50 %	63.75 %
5			76.00 %	75.20 %	73.60 %	72.80 %	72.00 %	71.20 %	70.40 %	69.60 %	68.80 %	68.00 %
6			79.17 %	78.33 %	76.67 %	75.83 %	75.00 %	74.17 %	73.33 %	72.50 %	71.67 %	70.83 %
7			81.43 %	80.57 %	78.86 %	78.00 %	77.14 %	76.29 %	75.43 %	74.57 %	73.71 %	72.86 %

Tablica 1. Procjene vjerojatnosti postizanja gola iz jedanaesteraca i kaznenih udaraca

Zaključak

Stigosmo do kraja osnovne škole. Naši učenici sad već raspolažu sasvim solidnim rasponom matematičkih znanja te bi bili u stanju razmotriti i neke primjere primjene matematike u nogometu koji nisu neposredno vezani za pojedine nastavne teme, nego kombiniraju ukupno osnovnoškolsko matematičko znanje. Takve primjere ostavljamo za neke druge članke i neka buduća vremena, a od sljedećeg razreda odlazimo u srednju školu, preciznije u gimnaziju, te ćemo u sljedeća četiri «gimnazijska" nastavka vidjeti još mnogo, sve realističnijih i ozbiljnijih, poveznica najljepše sporedne stvari na svijetu – nogometa, i nama najdraže znanosti – matematike.

Literatura:

1. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
2. Mijač F. (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
3. Fussballdaten.de. https://www.fussballdaten.de/
4. SofaScore. https://www.sofascore.com/
5. Ludwig, M. (2008.). *Mathematik + Sport*. Vieweg + Teubner.
6. Hrvatski nogometni savez, *Pravila nogometne igre* 21./22. (2021.). https://hns-cff.hr/files/documents/21824/PNI%202021-2022.pdf