

Sportsko klađenje i Kellyjev kriterij za ulaganje

DUŠAN MUNĐAR¹

Sažetak. U radu prikazujemo osnovne izračune vezane uz klađenje te Kellyjev kriterij za odluku o iznosu ulaganja u slučaju postojanja povoljne prilike za klađenje. Cilj rada je upoznavanje s matematičkom pozadinom klađenja kako bismo mogli donijeti racionalnu odluku o klađenju. Simulacijski je model korišten kako bi se dobio bolji uvid u varijaciju potencijalnih ishoda niza klađenja. Simulacije različitih scenarija pružaju nam temelj za prilagodbu očekivanja mogućim realizacijama slučajnih događaja. Na kraju rada je predložena simulacijska igra za korištenje u nastavi, koja za cilj ima poboljšanje razumijevanja slučajnosti.

Cljučne riječi – sportsko klađenje, Kellyjev kriterij, vjerojatnost, simulacije

1. Uvod

Sportsko klađenje relativno je učestala pojava, posebno među mlađom populacijom. U radu (Ricijaš, N. i drugi, 2016.) autori istražuju zastupljenost kockanja te štetne psihosocijalne posljedice kockanja (tzv. problematičnog kockanja) kod hrvatskih srednjoškolaca. Na uzorku od 2 702 učenika rezultati su pokazali da se 72.9 % srednjoškolaca barem jednom u životu kockalo ili kladilo. Klađenje na sportske rezultate najučestalija je igra na sreću. Prema njihovom istraživanju 12.9 % srednjoškolaca ispunjava kriterije za visoku razinu problema povezanih s kockanjem.

U okviru međunarodnih konferencija o poučavanju statistike (ICOTS, *International Conference on Teaching Statistics*) koje organizira Međunarodno udruženje za statističko obrazovanje (IASE, *International Association for Statistical Education*) često se prezentiraju radovi na temu matematičke pozadine klađenja. Dodatno, generalni zaključak nakon čitanja knjige *Misliti brzo i sporo* nobelovca Daniela Kahnemana (Kahnemann, 2011.) može biti da ljudi nerijetko griješe kada se radi o odlučivanju u uvjetima nesigurnosti. Stoga je poželjno upoznavanje alata koji bi svima, a posebno učenicima, pomogao u donošenju racionalnih financijskih odluka. Simulacijsko prikazivanje mogućih ishoda jedan je od načina za objašnjavanje varijacije i prilagođavanja očekivanja potencijalnim realnim ishodima.

¹Dušan Mundar, Veleučilište Hrvatsko zagorje Krapina

Ovim radom želi se prenijeti bazično znanje o načinu funkcioniranja klađenja te uputiti na osnovni kriterij isplativosti, odnosno neisplativosti klađenja. Prilagodavanje očekivanja potencijalnim realnim ishodom klađenja može zaštititi (posebno mladu populaciju koja nema dovoljno životnih iskustava) od mogućih neželjenih ishoda. Osim matematičkog (vjerojatnosno-financijskog), klađenje ima i psihosocijalni aspekt kojim se u ovome radu nećemo baviti.

Ukratko, ciljevi rada su:

1. Pokazati primjer izračuna isplata kod klađenja i odrediti kada je jednokratno klađenje po očekivanom iznosu isplativo.
2. Upoznati se s Kellyjevim kriterijem za klađenje i investiranje.
3. Simulirati primjenu Kellyjevog kriterija i nekoliko drugih strategija u slučaju klađenja na ishode niza slučajnih događaja te usporediti rezultate.
4. Predložiti poučnu igru za nastavu matematike kako bi učenici povećali razumijevanje koncepta slučajnih ishoda i potencijalnih financijskih posljedica.

Razumijevanje koncepta vjerojatnosti bitno je za donošenje odluka u životu. Učestalo donošenje odluka koje su „malo bolje” u dugom roku mogu imati značajan utjecaj na kvalitetu života. Posebno je to bitno zbog multiplikativnog efekta koji je sličniji pravilnosti eksponencijalne nego linearne funkcije.

2. Kladionice i koeficijenti

Kladionice navode moguće ishode sportskih i drugih događaja i u svojim im ponudama pridružuju koeficijente isplate. Koeficijent isplate ili tečaj iznos je koji se isplaćuje u slučaju ostvarenja događaja na koji je uplaćen jedinični iznos. Jedan raspis ishoda odigravanja nogometne utakmice je: pobjeda ekipe domaćina (oznaka: 1), neodlučeni rezultat (oznaka: 0 ili X) i pobjeda gostujuće ekipe (oznaka: 2). Za svaki od mogućih ishoda toga događaja kladionica nudi koeficijent isplate. Primjerice, ukoliko koeficijent za 1 iznosi $k_1 = 2.0$ i osoba se kladi na taj događaj te uplati $U = 10.00$ eura, u slučaju pobjede domaće ekipe dobit će isplatu iznosa $I = U \cdot k_1 = 10 \cdot 2.0 = 20.00$ eura. U slučaju da se taj događaj ne dogodi, ostaje bez uloženog iznosa pa nema isplate, tj. $I = 0$. Dakle, u slučaju uspješnog pogađanja zarada je $Z = I - U = 10.00$ eura, a u slučaju promašaja zarada tj. gubitak iznosi $Z = I - U = -10.00$ eura. U računici koju prikazujemo nećemo uključivati manipulativne troškove koje kod uplate naplaćuje kladionica radi pokrivanja vlastitih operativnih troškova, kao ni pitanja oporezivanja dobitaka u klađenju koje naravno dodatno umanjuju isplate.

2.1. Neutralne vjerojatnosti

Kako bi osobi jednokratno klađenje na događaj, koji ima poznati koeficijent k , bilo (očekivano) isplativo, potrebno je odrediti kolika bi trebala biti vjerojatnost na-

stanka tog događaja. Na primjer, za događaj s koeficijentom 2.0 uplata od 10.00 eura je (očekivano) isplativa ukoliko je vjerojatnost isplate od 20.00 eura veća od 0.5. Općenito, očekivana zarada E od klađenja na jedan događaj pozitivna je ako vrijedi

$$E = (I - U) \cdot p + (-U) \cdot (1 - p) = Ip - U > 0 \quad \text{tj.} \quad p > \frac{U}{I} = \frac{U}{Uk} = \frac{1}{k}.$$

Vjerojatnost događaja za koje je očekivana zarada nula nazvat ćemo *neutralnim vjerojatnostima* i za njih vrijedi $p_n = 1/k$.

Primjerice, koeficijenti isplate prije utakmice *Dinamo: Hajduk* koja se odigrala 26. 2. 2023. godine u Zagrebu bili su (1.44, 4.20, 5.50). *Neutralne vjerojatnosti* događaja (1, X, 2) pripadne koeficijentima isplate su $(n_1, n_x, n_2) = (0.694, 0.238, 0.182)$. Zaključak može biti da je osobi očekivano financijski isplativo kladiti se na pobjedu Dinama samo ako je prilično sigurna da je vjerojatnost pobjede veća od 69.4 %. Vjerovanje u pobjedu Dinama nikako nije dovoljno za financijski isplativu odluku.

2.2. Procjena vjerojatnosti ishoda utakmice

Ukoliko zbrojimo *neutralne vjerojatnosti*, dobivamo iznos veći od jedan, posebno u našem slučaju 1.11. Isto možemo smatrati zaštitom kladionice od krive procjene stvarne vjerojatnosti nastanka događaja. Normalizacijom neutralnih vjerojatnosti možemo doći do procjena stvarnih vjerojatnosti za navedene događaje. Za konkretan slučaj to bismo dobili množenjem s normalizacijskim faktorom $n = 1/(n_1 + n_x + n_2)$. Nakon normalizacije, procjenama vjerojatnosti ishoda spomenute utakmice na temelju koeficijenta kladionice možemo smatrati vrijednosti: (0.623, 0.214, 0.163).

U radu (Munđar, D., 2023.) autor prikazuje još dvije kvantitativne metode za procjenu vjerojatnosti ishoda nogometne utakmice. Procjene se rade na temelju Poissonovog modela te na temelju binomnog modela. Posebne situacije, kao što su ozljede ključnih igrača, važnost utakmice, vremenski uvjeti igre i slično, nisu uzeti u obzir kod takvih procjena. Osobi koja je zainteresirana za precizniju procjenu vjerojatnosti svakako bi bilo preporučljivo uzeti te i slične okolnosti kao i mišljenje eksperata u razmatranje. Nažalost, pravu vrijednost vjerojatnosti pojedinih ishoda nikako ne možemo saznati.

3. Kellyjev kriterij

Samo u situacijama kada smo prilično sigurni kako je vjerojatnost događaja veća od neutralne vjerojatnosti javlja se prilika za klađenje. Čak i u tim slučajevima klađenju treba pristupiti oprezno. Nikako nije dobro uložiti sav dostupan iznos za ulaganje u jednokratno klađenje jer je rizik od bankrota (gubitka cijelog iznosa) prevelik. Odgovor na pitanje koliki bi dio imovine bilo najudnije uložiti da dugoročno ostvarimo očekivano najpovoljniji rezultat, određuje se u ovisnosti o vjerojatnosti događaja na koji se kladimo i koeficijenta isplate (tečaja), a određen je Kellyjevim kriterijem.

John Larry Kelly Jr. (Kelly, J. L., 1956) opisao je kriterij kao strategiju klađenja koja u dugom roku (kada se broj klađenja provodi neograničeno mnogo puta) dovodi do najvećeg financijskog iznosa, odnosno dobitka. Iako je kriterij primarno demonstriran za klađenje, moguća je primjena vrlo brzo prepoznata u financijama, poglavito u investiranju. Filozofija odabira portfelja nekih poznatih investitora kao što su Warren Baffett može se povezati sa primjenom Kellyjevog kriterija. O primjeni Kellyjevog kriterija piše i jedan od poznatijih investitora nove generacije, Mohnish Pabrai, u svojoj knjizi *The Dhandho Investor* (Pabrai, M., 2007.).

U ovom će se radu prikazati rezultat strategije određivanja iznosa za uplatu primjenom Kellyjevog kriterija, tj. formule koja određuje teorijski optimalni iznos klađenja. Kellyjev iznos za klađenje dobije se traženjem argumenta za koji se ostvaruje maksimalna očekivana vrijednost iznosa bogatstva B

$$B(f) = (1 + b \cdot f)^p \cdot (1 - f)^{1-p},$$

gdje je f udio imovine koji se uloži, p vjerojatnost poželjnog ishoda (dobitka), a b je udio uloga koji se zaradi u slučaju dobitka. Na primjer, ako se uloži 1 euro i u slučaju isplate 3 eura, neto dobitak iznosi 2 eura pa b iznosi 2.0. Ukoliko b želimo iskazati pomoću koeficijenta kladionice k , onda možemo zaključiti da vrijedi $b = k - 1$.

Traženjem argumenta f za koji se ostvaruje maksimalna vrijednost funkcije B dobije se udio imovine koji je optimalno uložiti, tj. Kellyjev kriterij za f iznosi:

$$f^* = p - \frac{q}{b}.$$

Ukoliko je f^* nula ili negativan broj, klađenje nije isplativo.

3.1. Primjena Kellyjevog kriterija

Razmotrimo sada primjer primjene Kellyjevog kriterija. Radi boljeg razumijevanja objasniti ćemo ga na događajima kojima su vjerojatnosti točno odredive, tj. na ishodima slučajnog bacanja igrac kocke.

Pretpostavimo da sudionik pokusa ima imovinu za ulaganje od 100 eura te neka su za sudionika pokusa dobri ishodi 1 do 4, tj. vjerojatnost povoljnog događaja je $p = 4/6$, a nepovoljnog ishoda $q = 1 - p = 2/6$. Također, pretpostavimo da u slučaju povoljnog ishoda pripadni koeficijent isplate iznosi $k = 2.00$, a u slučaju nepovoljnog događaja (ishod 5 ili 6) ostaje se bez uloga.

Očekivana zarada za uplatu cjelokupne imovine od 100 eura tada iznosi

$$Z = 100 \cdot \frac{4}{6} + (-100) \cdot \frac{2}{6} = \frac{100}{3} = 33.33.$$

Međutim, stanje imovine nakon takvog klađenja slučajna je varijabla B

$$B \sim \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Dakle, u 1/3 slučajeva osoba bi bankrotirala. Ako bismo igru ponovili primjerice n puta i u svakom slučaju osoba bi u tu povoljnu opciju uložila sav iznos imovine, stanje bogatstava tada bi bilo

$$B \sim \begin{pmatrix} 100 \cdot 2^n & 0 \\ (2/3)^n & 1 - (2/3)^n \end{pmatrix},$$

što bi značilo da je vjerojatnost da osoba bankrotira već nakon 12 igara veća od 99 %. Dakle, potrebno je pronaći mudriju strategiju od ulaganja cjelokupne imovine, iako je ponuda bila očekivano isplativa.

Udio imovine za ulaganje, sukladno Kellyjevom kriteriju kako smo prethodno prikazali, računa se pomoću formule

$$f^* = p - \frac{q}{b}$$

i on bi nam dugoročno trebao (očekivano) donijeti najveću vrijednost imovine.

U prethodno navedenom primjeru isplate idu uz pretpostavljeni koeficijent $k = 2.0$ ($b = k - 1 = 1$) za događaje s ukupnom vjerojatnosti $p = 4/6$. Kellyjevim kriterijem dobivamo da je preporučljivo uložiti 1/3 imovine u svakom koraku

$$f^* = p - \frac{q}{k-1} = \frac{4}{6} - \frac{2/6}{2.0-1} = \frac{1}{3}.$$

Primjena Kellyjevog kriterija u financijama ipak je više načelnog pristupa. Stroga primjena kriterija zahtijevala bi određivanje distribucije vjerojatnosti budućih promjena cijena dionica. Iako je popularan pristup određivanja takve distribucije geometrijskim Brownovim gibanjem, on se također pokazao manjkavim. Nassim N. Taleb u svojem ciklusu knjiga *Incerto*, među kojima je najpoznatija knjiga *Crni labud* prvotno izdana 2007. godine, a i drugi uspješni investitori upozoravaju da strogo pridržavanje formula u investiranju nije preporučljivo.

3.2. Simulacijsko testiranje Kellyjevog kriterija

U ovom ćemo dijelu prikazati simulaciju različitih načina ulaganja. Pretpostavljamo da osoba kreće s imovinom od 100 eura. Analizira se pet različitih strategija klađenja u ishode 45 uzastopnih bacanja kocke. Povoljan događaj će biti, kao što je prije definirano, ishodi 1 do 4, a nepovoljan 5 ili 6. U slučaju povoljnog događaja vraćen nam je dvostruki iznos uplate, tj. zarada je jednaka uplati, a u slučaju nepovoljnog događaja, gubimo ulog. Dakle, radi se o koeficijentu isplate, tj. tečaju $k = 2.00$ u slučaju povoljnog događaja. Za svaku strategiju zabilježiti ćemo konačno stanje imovine nakon tih 45 bacanja kocke. Sve ćemo ponoviti 1000 puta te za svaku strategiju analizirati rezultate iskazom minimalne vrijednosti, donjeg kvartila, medijana, gornjeg kvartila te maksimalne vrijednosti. Također, izračunat ćemo prosječnu vrijednost imovine (bogatstva) na kraju igre za svaku strategiju, učestalost bankrota te učestalost konačnog gubitka, tj. učestalost situacije u kojoj nakon 45 bacanja kocke

završimo s iznosom strogo manjim nego smo imali na početku. Razmatrat ćemo sljedeće strategije ulaganja:

Strategija 1. Uložiti 1/3 imovine u svakom koraku. (Sukladno Kellyjevu kriteriju.)

Strategija 2. Uložiti 50 eura u svakom koraku ili sve ako je manje od 50 eura dostupno.

Strategija 3. Uložiti 50 % iznosa s kojim se raspolaže u tom trenutku, maksimalno 100 eura.

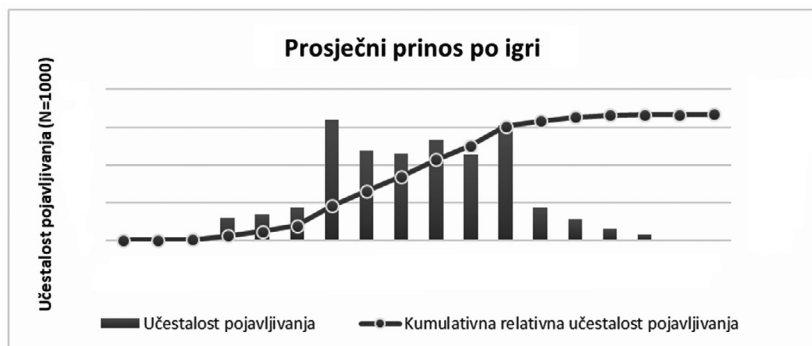
Strategija 4. Uložiti 50 % iznosa s kojim se raspolaže u tom trenutku, minimalno 20 eura ili sve ako je manje od 20 eura dostupno.

Strategija 5. Uložiti 20 % iznosa s kojim se raspolaže u tom trenutku, minimalno 50 eura ili sve ako je manje od 50 eura dostupno.

U Tablici 1. prikazani su rezultati simulacijskih ishoda. Vidljivo je da Strategija 1. koja se temelji na Kellyjevu kriteriju po većini aspekata ima najpoželjnija svojstva. U samo dvije strategije, jer se nikad nije uložio cijeli iznos, nije došlo do potpunog bankrota. Učestalost konačnog stanja imovine manjeg od početnog (učestalost konačnog gubitka) najmanja je za Strategiju 1. Kellyjev kriterij također pokazuje rela-

	Strategija 1	Strategija 2	Strategija 3	Strategija 4	Strategija 5
Minimalni iznos	0.47	-	0.01	-	-
Donji kvartil	239.77	100.00	553.13	-	-
Medijan	959.08	700.00	1 225.00	390.12	1 020.98
Gornji kvartil	3 836.32	1 000.00	1 781.25	4 519.60	2 581.00
Maksimalni iznos	982 097.11	1 700.00	3 425.00	7 678 703.00	58 065.05
Prosječni iznos	12 653.82	664.20	1 193.17	61 724.97	2 285.46
Stopa bankrota	0.0 %	24.9 %	0.0 %	30.7 %	27.4 %
Učestalost konačnog gubitka	11.9 %	24.9 %	15.7 %	38.6 %	27.8 %

Tablica 1. Prikaz simulacijski rezultata nakon odigranih 45 bacanja kocke (broj simulacija 1000)



Grafikon 1. Distribucija prosječnog relativnog prinosa po igri dobivenog temeljem Kellyjeva kriterija ulaganja

tivno dobar maksimalni iznos (982 097.11 eura), a u 50 % slučaja konačno je stanje veće od 959.08 eura, dakle dogodio se rast imovine na vrijednost gotovo deset puta veću od početne.

Grafikon 1. prikazuje distribuciju prosječnog relativnog prinosa po igri na imovinu za simulacije dobivene Kellyjevim kriterijem.

Sličan simulacijski pristup analizi različitih scenarija ulaganja na hrvatskom tržištu dionica prikazan je u radu *Utjecaj dinamike investiranja: analiza slučaja ulaganja u dionice na Zagrebačkoj burzi*. (Mundar, 2022.)

4. Predložena nastavna igra

Simulacijsko modeliranje može poučavanje vjerojatnosti učiniti zanimljivijim. Prijedlog igre bio bi sličan u ovom radu prikazanom simulacijskom modelu. Svaki učenik na listić upisuje iznos koji ulaže u pojedinom koraku. Nastavnik može po svojoj želji također sudjelovati u igri, ali tako da koristi Kellyjev kriterij te nakon igre upozna učenike s navedenim kriterijem.

Broj simulacija može biti 45, što bi predstavljalo svaku minutu u školskom satu, a za realan život možemo zamisliti kao ulaganje u svakoj godini života od 21. do 65. godine. Igru je naravno moguće skratiti na 30 ili manje koraka, ali u tom slučaju može se dogoditi da Kellyjev kriterij još ne pokaže svoja dominirajuća svojstva.

Igra se namjerno postavi s vjerojatnostima koje je lagano simulirati bacanjem kocke (ili se po želji prilagodi za novčić) i koeficijentom isplate 2.0 kako bi učenici relativno lagano mogli u svakom koraku izračunati koliko im je stanje imovine nakon svake igre. Dakako, jasno je da se pri koeficijentu isplate 2.0 imovina pri svakom koraku ili poveća za ulog ili umanja za ulog.

Radi povećanja kompleksnosti i za potrebe diskusije o rezultatima po završetku igre, može se dopustiti da osoba upiše na koji događaj ulaže. Ovo je posebno zanimljivo jer će se vjerojatno pokazati da će dio učesnika uslijed osjećaja frustriranosti u nekom trenutku odabrati klađenje na očekivano neisplative događaje, tj. na ishode

Redni broj	Stanje imovine prije igre	Odabrani događaj A (1,2,3 ili 4)/ B (5 ili 6)	Ulog	Ishod nastao bacanjem kocke	Zarada/ Gubitak	Stanje imovine nakon igre
1	100	A	20	4	20	120
2	120	B	20	3	-20	100
3	100	A	30	6	-30	70
...
45	2 530	A	500	6	-500	2 030

Tablica 2. Prikaz popunjenog igraćeg listića predložene igre

5 i 6. Također, vjerojatno će se dogoditi situacije u kojima će sudionici igre uložiti cijeli iznos s kojim raspolažu u nekom koraku, a to naravno nije mudro jer se izlažu bankrotu iz kojeg se više ne mogu aktivno vratiti u igru.

5. Zaključak

Praćenje sporta i klađenje na sportske događaje privlačna je aktivnost za velik dio mlade populacije. Klađenje je istovremeno prilično opasna aktivnost kako iz financijskog tako i iz psihosocijalnog aspekta. U ovom radu bavili smo se financijskim (matematičkim) aspektom klađenja. Kako se svijet klađenja bazira na slučajnim ishodima, gradivo iz cjeline Podatci, statistika i vjerojatnost može poslužiti učenicima srednjih škola da već sada, a kasnije i kao odrasli građani, bolje razumiju taj svijet i svijet financija općenito. Tema klađenja u ovom je radu prikazana korištenjem matematičkog modeliranja slučajnosti. Simulacijski pristup pružio je uvid u neke mogućnosti optimizacije koje nudi Kellyjev kriterij te uvid u raspon mogućih realnih ishoda pri učestaloj igri inicijalno postavljenoj da bude očekivano isplativa. Simulacijska igra za nastavu trebala bi pomoći učenicima da uvide moguće negativne ishode očekivano pozitivnih oklada, čime će negativno postavljene igre kao što je većina igara na sreću postati još manje privlačne. S druge strane, u slučaju da se nađe na povoljnu priliku za klađenje ili investiranje, ne bi bilo loše prikladno joj pristupiti.

Literatura:

1. Kahneman, D. (2013.). *Misliti brzo i sporo*. Mozaik knjiga. Zagreb.
2. Kelly, J. L. (1956.). *A New Interpretation of Information Rate*. Bell System Technical Journal. 35 (4):
3. Mundar, D. (2022.). *Utjecaj dinamike investiranja: analiza slučaja ulaganja u dinonice na Zagrebačkoj burzi*. Susreti 2022. Veleučilište Hrvatsko zagorje Krapina, 119-124. <https://www.bib.irb.hr/1191375>
4. Mundar, D. (2023.). *Prognoziranje ishoda nogometnih utakmica*, „Poučak,” 94(24), 69-76.
5. Pabrai, M. (2007.). *The Dhandho Investor: The Low-Risk Value Method to High Returns*, Wiley
6. Ricijaš, N., i dr. (2016.). *Kockanje mladih u Hrvatskoj - učestalost igranja i zastupljenost problematičnog kockanja*. Kriminologija & socijalna integracija, 24 (2), 24-47. <https://doi.org/10.31299/ksi.24.2.2>
7. Taleb, N.N. (2022.). *Crni labud: Utjecaj krajnje nevjerojatnog*. Školska knjiga.