

Matematika vezanja kravate

ALEKSANDAR HATZIVELKOS¹, IVA GOLUBIĆ²
I ŠIMUN ZLOPAŠA³

1. Uvod

U hrvatskom javnom prostoru dobro je poznata priča o nastanku kravate: vrpčasti ukrasni predmet koji su hrvatski vojnici nosili tijekom Tridesetogodišnjeg rata u 17. stoljeću raširio se prvo po Europi, a potom i u cijelom svijetu te postao jedan od najprepoznatljivijih odjevnih predmeta/dodataka. Tu priču potvrđuju i znanstveni radovi, poput knjige *La grande histoire de la cravate* Francois Chaillea [1] ili pak članka *Pokušaj otkrivanja nastanka i razvoja kravate kao riječi i odjevnoga predmeta* Vladimira Huzjana [7].

No vrpčasti ukrasni predmet koji se nosi oko vrata treba nekako i vezati. Jedan od prvih čvorova u upotrebi bio je *Four-in-hand* čvor⁴ čija se upotreba raširila u 19. stoljeću. Početkom 20. stoljeća u upotrebu su ušli i tzv. *Windsorski čvor*, pa potom *Poluwindsorski čvor* i *čvor Pratt*. To su ujedno čvorovi koji se i danas najviše koriste.

No, jesu li to svi čvorovi? Odgovor na to pitanje daje – matematika.

2. Čvor kao šetnja po trokutastoj mreži

Prvi matematički opis čvora na kravati dali su Thomas Fink i Yong Mao u kraćem tekstu *Designing tie knots by random walks* objavljenom 1999. godine u časopisu *Nature* [3]. Ubrzo je uslijedila knjiga *The 85 ways to tie a tie* [5], te članak *Tie Knots, Random Walks and Topology* [4]. Tu Fink i Mao opisuju sljedeću strukturu:

Za početak, razlikujemo „aktivni” (širi) i „pasivni” (uži) kraj kravate. Vezanje čvora na kravati započinje tako da aktivni kraj kravate prebacimo na lijevu stranu, prelazeći iznad ili ispod pasivnog kraja kravate (vidi Sliku 1.). Tim potezom dijelimo prostor na tri područja: L, C i R.⁵

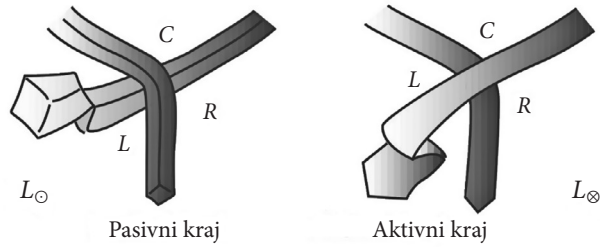
¹Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica

²Iva Golubić, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica

³Šimun Zlopaša, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica

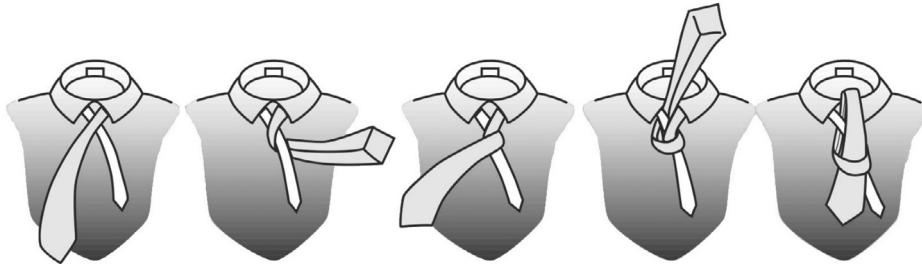
⁴Four-in-hand čvor nema prikladan prijevod na hrvatski jezik. Ponekad ga se naziva „jednostavnim čvorom”.

⁵Nazivi područja L, C i R, kao i kasnije definirani potezi koje označavamo istim oznakama, potječu od engleskih naziva područja Left, Right i Center. U ovom smo članku, iako je pisan na hrvatskom jeziku, odlučili zadržati te nazive kako bismo koristili iste oznake kao i u svim člancima u kojima se obrađuje ta tema. Time pratimo i praksu autora Denne i ostalih [2] koji su zadržali korištenje oznaka \ominus i \otimes radi usporedne čitljivosti članka, iako su te oznake, formalno gledano, nepotrebne.



Slika 1. Dva načina za započinjanje čvora: L_{\odot} i L_{\otimes} .
Za započinjanje čvora L_{\odot} kravata mora biti izokrenuta.⁶

Čvor nastavljamo raditi uzastopnim preklopima (nadalje: *potezima*) aktivnog kraja iz jednog područja u drugo, sa smjerom aktivnog kraja prema košulji (smjer \odot) ili od košulje (smjer \otimes). Ti su potezi prikazani na Slici 2.



Slika 2. Potezi preklapanja kravate u slijedu $L_{\otimes} R_{\odot} L_{\odot} C_{\odot} T$.⁷

Kako bismo završili čvor, aktivni kraj treba biti preklopljen preko centra i provučen kroz postojeću petlju. Taj završni potez označavat ćemo s T , no nećemo ga smatrati dijelom skupa poteza koji iterativno generiraju čvor. Metaforički, ako ostale poteze gledamo kao riječi pomoću kojih slažemo rečenicu, potez T predstavljao bi točku na kraju te rečenice.

Na Slici 2. tako je prikazan sljedeći niz poteza: $L_{\otimes} R_{\odot} L_{\odot} C_{\odot} T$. Tim nizom veže se *Four-in-hand* čvor na kravati. Na sličan način možemo prikazati i konstrukciju ostalih poznatih čvorova.

No, treba istaknuti kako potezi koje nižemo moraju zadovoljavati određena pravila:

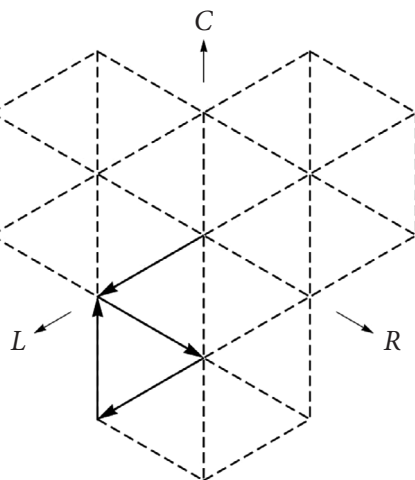
1. Skup poteza od kojih gradimo niz u konstrukciji čvorova je $\{R_{\odot}, R_{\otimes}, L_{\odot}, L_{\otimes}, C_{\odot}, C_{\otimes}\}$.
2. Svaki niz počinje potezom L_{\odot} ili L_{\otimes} .
3. Nikoja dva susjedna poteza ne smiju ići u isto područje niti na istu stranu.
4. Čvor završava pod-nizom $R_{\odot} L_{\otimes} C_{\odot} T$ ili $L_{\odot} R_{\otimes} C_{\otimes} T$.

⁶Slika je preuzeta iz [4] te potom obrađena i prilagođena hrvatskom jeziku.

⁷Slika je preuzeta iz [4] te potom obrađena.

Pokazuje se kako se svaki takav niz može prikazati pomoću šetnje po trokutastoj mreži prikazanoj na Slici 3.

Također, prilikom šetnji (vezanja čvora) podrazumijevamo da povlačimo samo pozitivne poteze u smjeru osi mreže, C , L i R . No, to ne umanjuje mogućnosti, jer se negativni potezi, kao i dvostruki potezi u istom smjeru (koji narušavaju pravilo 3), mogu prikazati i pomoću pozitivnih poteza koji zadovoljavaju pravila. Na primjer: $-C = R + L$, te $2C = C + L + C + R + C$.⁸ Pokazuje se kako je takav zapis čvora kao šetnje jedinstven.



Slika 3. Prikaz šetnje $L \otimes R \circ L \otimes C \circ T$ u trokutastoj LRC-rešetki

Sljedeći korak koju su Fink i Mao napravili jest prebrajanje mogućih čvorova kravate. U tu svrhu uvode funkciju $K(h)$ koja za broj poteza (preklapanja) h daje broj mogućih šetnji po trokutastoj mreži koje zadovoljavaju pravila 1-4:

$$K(h) = \frac{1}{3} \left(2^{h-2} - (-1)^{h-2} \right).$$

Navedena jednadžba izvodi se postavljanjem rekurzije koju mora zadovoljavati funkcija K , no izvod zbog složenosti nećemo predstavljati na ovom mjestu. Zainteresirane čitatelje upućujemo na [4].

Zbog uvjeta (1) i (4) o tome kako čvor mora izgledati, minimalni broj poteza za kreiranje čvora je $h = 3$. S druge strane, s obzirom na veličinu (debljinu) čvora koja raste sa svakim novim potezom, odnosno preklapanjem kravate, Fink i Mao su broj poteza u formiranju čvora ograničili na $h = 9$. Potom se zbrajanjem vrijednosti funkcije K dobiva ukupan broj mogućih čvorova uz dana pravila konstrukcije:

$$\sum_{h=3}^9 K(h) = 85.$$

⁸Na ovome mjestu ispuštamo notaciju smjera, \circ i \otimes jer su smjerovi određeni prvim potezom u nizu, nakon čega se moraju izmjenjivati.

Dakle, na opisani način moguće je kreirati ukupno 85 različitih čvorova na kravati. U Tablici 1 dani su nizovi poteza za neke od najpoznatijih čvorova na kravati:

h	ime čvora	niz poteza
4	Four-in-hand	$L_{\otimes}R_{\circ}L_{\otimes}C_{\circ}T$
5	Pratt	$L_{\circ}C_{\otimes}R_{\circ}L_{\otimes}C_{\circ}T$
6	Poluwindsor	$L_{\otimes}R_{\circ}C_{\otimes}L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$
8	Windsor	$L_{\otimes}C_{\circ}R_{\otimes}L_{\circ}C_{\otimes}R_{\circ}L_{\otimes}C_{\circ}T$

Tablica 1. Niz poteza za kreaciju najraširenijih čvorova

Treba istaknuti kako zbog pravila (3) i (4) u nizu poteza zapravo niti ne treba pisati kako je kravata okrenuta, odnosno oznake \odot i \otimes . Naime, zadnji potez mora biti preklapanje nakon kojeg se ravna površina kravate nalazi s gornje strane, odnosno \odot – što se vidi u svojstvu (4). Kako se, prema svojstvu (3), strana kravate mora mijenjati pri svakom novom potezu, u nizu s poznatim brojem poteza time je jedinstveno određena strana na koju se kravata mora okrenuti u prvom potezu. No zbog čitljivosti poteza (čime je provođenje vezanja stvarnog čvora na kravati jednostavnije), kao i prijašnji autori, zadržat ćemo tu vrstu zapisa.

3. Estetika čvora kravate

Nakon što su matematički opisali proces kreiranja čvora kravate, Fink i Mao taj su model iskoristili za opisivanje estetskih svojstava čvora. Prva „estetska” funkcija koju su definirali je funkcija simetrije. Za svaki niz poteza $\xi = (p_i)$ koji zadovoljava svojstva (1) – (4) definiramo

$$s(\xi) = \sum_{i=1}^h x_i, \text{ gdje je } x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p_i = R \\ -1, & \text{ako je } p_i = L \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija s svakom čvoru pridružuje brojčanu vrijednost kojom mjerimo *simetriju čvora*. Naime, ako je $s(\xi) = 0$, tada se za kreiranje čvora koristio jednak broj lijevih i desnih poteza, pa je čvor simetričan. Što je odstupanje vrijednosti funkcije s (po apsolutnoj vrijednosti) veće od nule, to je veća asimetričnost čvora. Prirodno, estetskim čvorom smatra se onaj čvor koji minimizira (po apsolutnoj vrijednosti) funkciju s .

Osim simetrije, Fink i Mao uvode i način za numerički opis oblika čvora. Simetrija je određena brojem lijevih i desnih poteza, dok oblik čvora određuje broj centralnih poteza u nizu. Za tu ćemo veličinu uvesti sljedeću oznaku:

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^h y_i, \quad \text{gdje je } y_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p_i = C \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Pomoću funkcije γ uvodimo klasifikaciju čvorova: čvorovi s istim vrijednostima h i γ (dakle čvorovi u čijoj se konstrukciji koristi jednak broj poteza i jednak broj centralnih poteza) pripadaju istoj klasi čvorova.

Za svaku takvu klasu čvorova razlomak $\frac{\gamma}{h}$ opisuje *širinu čvora*: velika vrijednost tog razlomka opisuje široke čvorove (poput Windsor čvora), dok mala vrijednost govori kako se radi o užem čvoru (poput Four-in-hand čvora). Čvorovi koji imaju izrazito malu vrijednost razlomka $\frac{\gamma}{h}$ (dakle, „preuski” čvorovi), kao i čvorovi s velikom vrijednošću tog razlomka (tj. „preširoki” čvorovi) ne smatraju se estetski privlačnima. Prema Finku i Mao, optimalne vrijednosti za razlomak $\frac{\gamma}{h}$ kreću se u intervalu $[0.25, 0.5]$.

Broj čvorova koji pripadaju istoj klasi može se kombinatorno (analizom šetnji po trokutastoj rešetki koju niz opisuje) iskazati na sljedeći način:

$$K(h, \gamma) = 2^{\gamma-1} \cdot \binom{h-\gamma-2}{\gamma-1}.$$

Posljednja funkcija koja opisuje estetiku čvora je funkcija $b(\xi)$, koja opisuje *balans čvora* ξ . Vrijednosti funkcija $s(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ govore nam koliko je lijevih i desnih, odnosno centralnih poteza u konstrukciji čvora. Funkcija $b(\xi)$ govori kojim su redom ti potezi slagani u čvor. Balansirani čvor je čvrsto vezan i održava svoj oblik. Spomenuta funkcija ima oblik

$$b(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{h-1} |\omega_i - \omega_{i-1}|,$$

gdje $\omega_i = \omega_i(p_i, p_{i+1})$ predstavlja *zakretanje* prilikom konstrukcije čvora: ako nakon poteza p_i prelaskom na potez p_{i+1} u šetnji na trokutastoj mreži zakrećemo u smjeru kazaljke na satu $\omega_i(p_i, p_{i+1}) = 1$, a ako zakrećemo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu $\omega_i(p_i, p_{i+1}) = -1$. Balans čvora ξ je to veći što je vrijednost funkcije $b(\xi)$ manja.

Pokažimo na primjeru *Four-in-hand* čvora kako bismo izračunali vrijednosti navedenih funkcija. *Four-in-hand* čvor dan je nizom $\xi = (L_{\otimes} R_{\circ} L_{\otimes} C_{\circ} T)$ i prikazan šetnjom u trokutastoj mreži na Slici 3.

Pripadni niz vrijednosti pomoću kojeg računamo vrijednost funkcije $s(\xi)$ glasi: $x = (-1 \ 1 \ -1 \ 0)$, pa je $s(\xi) = -1$. Dakle, čvor ima blagu asimetriju ulijevo.

Niz vrijednosti pomoću kojeg računamo vrijednost funkcije $s(\xi)$ glasi $y = (0 \ 00 \ 1)$, pa je $\gamma(\xi) = 1$, odnosno vrijednost centralnog razlomka iznosi $\frac{\gamma}{h} = \frac{1}{4}$. Odavde zaključujemo kako se radi o uskom čvoru.

Konačno, niz zakretanja pomoću kojeg računamo vrijednost funkcije $b(\xi)$ glasi $\omega = (-1 \ 1 \ 1)$, pa je $b(\xi) = \frac{1}{2} \cdot (|1+1| + |1-1|) = 1$.

U Tablici 2. navedene su vrijednosti estetskih funkcija za četiri osnovna čvora, ali su prikazane i vrijednosti za još neke čvorove koji minimiziraju definirane funkcije.

h	ime čvora	niz poteza	s	$\frac{\gamma}{h}$	b
3		$L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$	0	0.33	0
4	Four-in-hand	$L_{\otimes}R_{\circ}L_{\otimes}C_{\circ}T$	-1	0.25	1
5	Pratt	$L_{\circ}C_{\otimes}R_{\otimes}L_{\otimes}C_{\circ}T$	-1	0.40	0
6	Poluwindsor	$L_{\otimes}R_{\circ}C_{\otimes}L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$	0	0.33	0
7		$L_{\circ}C_{\otimes}R_{\circ}C_{\otimes}L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$	0	0.43	1
8	Windsor	$L_{\otimes}C_{\circ}R_{\otimes}L_{\circ}C_{\otimes}R_{\circ}L_{\otimes}C_{\circ}T$	-1	0.38	0
9		$L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}L_{\otimes}R_{\circ}C_{\otimes}L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$	0	0.33	0

Tablica 2. Vrijednosti estetskih funkcija za odabrane čvorove

4. Još više čvorova

Priča o matematičkoj analizi čvorova kravate nije na ovome stala. Kao što smo vidjeli u prvom poglavlju, Fink i Mao uveli su određena ograničenja prilikom kreiranja čvora za kravatu.



Slika 4. Prikaz dodatnih čvorova.⁹

⁹Slika je preuzeta s mrežne stranice <https://www.ties.com/how-to-tie-a-tie>

Jedno od tih ograničenja je da je prednja strana čvora ravna, kao na primjer kod čvora *Four-in-hand* prikazanog na Slici 4. slijeva. To ograničenje posljedica je pravila (4). Na taj su način iz matematičkog opisa izostavljeni mnogi čvorovi koji nemaju ravnu prednju stranu, poput čvorova *Van Wijk* (čvor u sredini) i *Trinity* (čvor s desne strane) također prikazanih na Slici 4.

Treba istaknuti kako su mnogi od tih čvorova formirani relativno nedavno, pa njihov izostanak iz prve matematičke analize čvorova ne treba zamjeriti autorima. Primjerice, smatra se da čvor *Trinity*, kao i *Ediety* čvor, svoj nastanak duguju filmu *Matrix Reloaded* koji se počeo prikazivati u svibnju 2003. godine. [6]

Hirsch i ostali u svom članku *More ties than we thought* pokazuju kako je i te čvorove moguće formirati relaksacijom uvjeta na pravila preklapanja koja definiraju Fink i Mao. U tu svrhu Hirsch i ostali formiraju jezik i formalnu gramatiku kojim se bitno pojednostavljaju ta pravila. Tri bitne relaksacije su:

- mogućnost drugačijih završetaka niza poteza (čime se omogućava konstrukcija čvorova koji nemaju ravnu prednju površinu)
- mogućnost korištenja tanjeg dijela kravate kao aktivnog dijela, odnosno dijela kravate koji vrši preklapanje. Ta opcija kod Finka i Maoa nije bila moguća jer je u njihovu modelu isključivo šira strana kravate bila aktivna strana.
- mogućnost korištenja poteza T (potez provlačenja aktivnog kraja kroz petlju koju formira prethodni potez) i unutar niza poteza, a ne samo kao završni potez. Potez T Hirsch i ostali nazivaju *uvlačenjem* (eng. *tuck*).

Na taj način došli su do brojke od 266 682 različita čvora, pri čemu su u obzir uzeli čvorove koji nastaju korištenjem tri do trinaest preklapanja (poteza). Pri tome ističu i kolekciju od 24 882 čvora koji sadrže samo jedan potez *uvlačenja* (potez T). (vidi [10])

Od prethodno spomenutih čvorova, za konstrukciju Trinity čvora potreban je niz od deset poteza:

$$L_{\otimes} C_{\circ} L_{\otimes} R_{\circ} C_{\otimes} R_{\circ} L_{\otimes} C_{\circ} TR_{\otimes} L_{\circ} T.$$

Što se tiče estetskih funkcija simetrije, centralnog razlomka i balansa, za Trinity čvor ξ vrijedi:

$$s(\xi) = -1, \quad \frac{\gamma(\xi)}{h} = 0.3, \quad b(\xi) = 2.$$

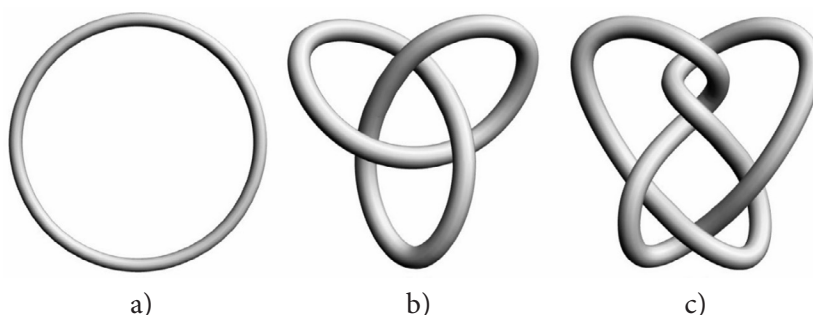
Treba istaknuti kako čak ni ova formalizacija čvorova na kravati ne opisuje sve čvorove koji su u upotrebi. Denne i ostali iznose pretpostavku da se čvorovi poput *The Atomic knot*, *Danski čvor* i čvor *Lady Slipper* ne mogu prikazati pomoću jezika Hirscha i ostalih (vidi [2]). Na žalost, web stranica s popisom čvorova na koju se pri tome pozivaju više nije dostupna (vidi [8]), tako da ta analiza i eventualno proširenje formalnog jezika ostaju (djelomično) otvorena pitanja.

5. Kravata i matematička teorija uzlova

U radu *The Mathematics of Tie Knots* iz 2021. godine, Denne i ostali rade korak dalje prema matematičkoj formalizaciji opisanog problema.[2] Naime, u matematici postoji teorija uzlova kao grane topologije, no pristup pojmu uzla unutar te teorije malo se razlikuje od čvorova kravate koji su do sada opisivani.¹⁰ Stoga ćemo u ovom poglavlju dati kratak pregled osnova teorije uzlova, a potom i opisati rezultate Denne i ostalih vezane uz čvorove na kravati.

5.1. Osnove teorije uzlova

U matematici, uzao je jednostavna *zatvorena* krivulja u trodimenzijskome prostoru (koja ne presijeca samu sebe). Na Slici 5. imamo prikaz tri različita uzla. Uzao prikazan pod (a) trivijalni je uzao kod kojeg ne postoji križanje niti. Takav uzao nazivamo *prstenom*, dok je u literaturi na engleskom jeziku uobičajen naziv *unknot*. Pod (b) nalazimo prikaz uzla s tri presijecanja, naziva *trolist*, odnosno *trefoil*, dok u slučaju (c) nalazimo prikaz uzla s pet presijecanja. Taj uzao nema široko korišteno ime, no u literaturi se označava imenom 5_2 .¹¹

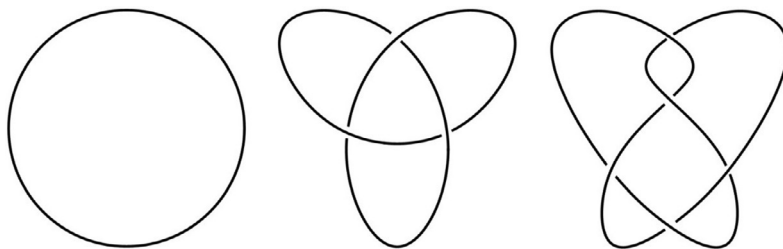


Slika 5. Primjer tri uzla: (a) trivijalni uzao koji nazivamo Prsten (eng. *Unknot*); (b) uzao s tri križanja, *Trolist* (eng. *Trefoil*); (c) uzao s pet križanja, naziva 5_2 .

Za rad s uzlovima u pravilu se koristi dvodimenzijски prikaz uzla koji nazivamo dijagramom. Kao dijagram za prikaz uzla može poslužiti bilo koja projekcija uzla na dvodimenzijску ravninu u kojoj se sjecišta niti ne projiciraju u istu točku. Pri tome na dijagramu označavamo da nit prelazi iznad (odnosno ispod) duge niti. Uzlovi sa Slike 5. prikazani su dijagramima na Slici 6.

¹⁰Iako su riječi „čvor“ i „uzao“ istoznačnice, kao pojam koji se koristi u topologiji na hrvatskom jeziku prihvaćen je naziv „uzao“. Stoga se u dijelu rada koji obrađuje navedeni topološki pojam koristimo tim nazivom.

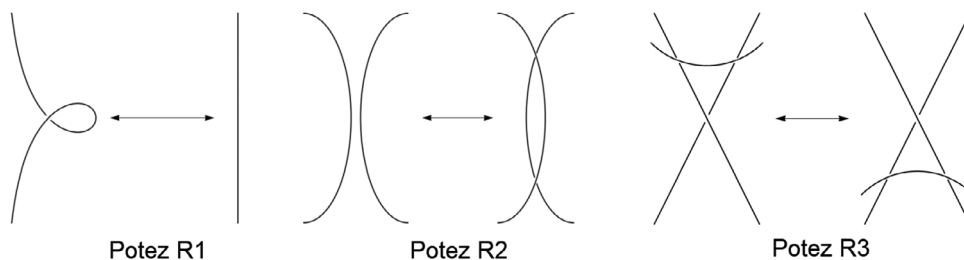
¹¹Za izgled ostalih čvorova, do osam križanja preporučamo [9], gdje se može naći i kod za kreiranje čvorova u programskom paketu Wolfram Mathematica.



Slika 6. Dijagrami uzlova iz Slike 5: (a) dijagram Prstena; (b) dijagram Trolista; (c) dijagram čvora_{5,2}.

Jedan od temeljnih postupaka u teoriji uzlova je dokazivanje ekvivalentnosti pojedinih uzlova. Za jedan uzao kažemo da je ekvivalentan drugom uzlu ako se prvi uzao može preoblikovati u drugi, pri čemu nit ne smije prijeći kroz drugi dio niti.

Svi ekvivalentni uzlovi tada čine klase ekvivalencije koje nazivamo *tipovima uzlova*. Tako najjednostavniji tip uzla čine uzlovi koji se mogu preoblikovati u *prsten (unknot)*, drugi tip uzla čine uzlovi koji se mogu preoblikovati u *trolist (trefoil)* itd.

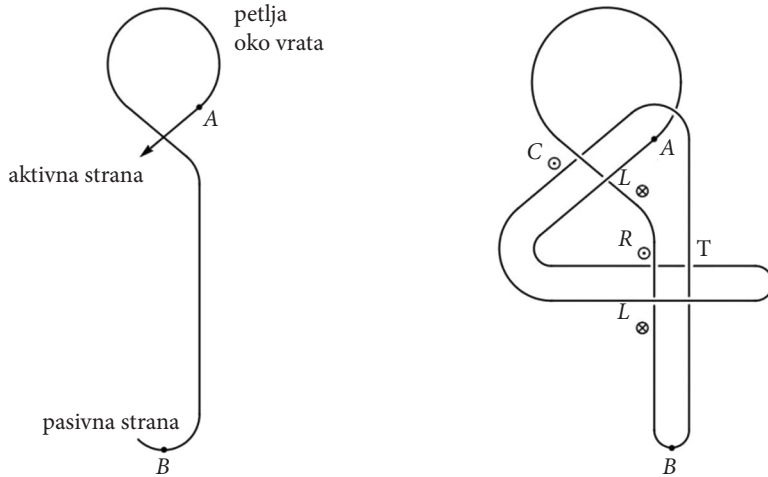


Slika 7. Reidemeisterovi potezi: R_1 , R_2 i R_3 .

Ekvivalentnost pojedinih uzlova najlakše se dokazuje korištenjem tzv. *Reidemeisterovih poteza*. Radi se o tri poteza na uzlovima, nazvanim R_1 , R_2 i R_3 , za koje je nje-mački matematičar Kurt Reidemeister 1926. godine dokazao da su nužni i dovoljni za sva preoblikovanja iz jedne reprezentacije uzla u drugu.

5.2. Čvor na kravati kao matematički uzao

Čvor na kravati prirodno vežemo s matematičkom definicijom uzla: spajanjem „aktivnog” (šireg) i „pasivnog” (užeg) dijela kravate dobivamo zatvorenu krivulju u prostoru – pri čemu ignoriramo razliku u debljini na spoju rubnih dijelova kravate. Također, niz poteza koje su definirali Fink i Mao opisuju nastanak dijagrama matematičkog uzla koji pri tome konstruiramo.



Slika 8. Postupak konstrukcije dijagrama uzla

Konstrukcija dijagrama uzla počinje od niti koja ima napravljenu petlju oko vrata, te istaknute točke A (mjesto aktivnog kraja kravate na početku postupka) i B (mjesto pasivnog kraja kravate na početku postupka), kao što je prikazano na Slici 8. slijeva. Po definiciji čvor započinje potezima L_{\odot} ili L_{\otimes} , dakle, prelaskom aktivnog dijela kravate na lijevu stranu dijagrama (ispod ili iznad niti). Potom u dijagramu pratimo ostale poteze niza. Na taj način je iz niza poteza za *Four-in-hand* čvor, $L_{\otimes}R_{\odot}L_{\otimes}C_{\odot}T$, konstruiran dijagram na desnoj strani Slike 8. Vidimo kako se nakon završnog poteza T aktivna strana spaja s pasivnom stranom u točki B.

Denne i ostali u svom radu pokazuju kako se na način sličan Reidermeisterovim potezima dijagram uzla kravate može mijenjati bez promjene tipa uzla. Na taj način pristupaju pojedinačnoj analizi 85 čvorova koje su definirali Finke i Mao, te za njih daju klasifikaciju na tipove uzlova.

Tri najčešća tipa uzlova kravate pripadaju tipovima čiji su predstavnici uzlovi sa Slike 5: jedanaest uzlova kravate pripadaju tipu *prsten* (*unknot*), daljnjih trinaest tipu *trolist* (*trefoil*) te deset uzlova kravate koji pripadaju tipu 5_2 . Zanimljivo je i da se uzao koji pripada tipu *prsten* nalazi u svakoj grupi uzlova obzirom na broj poteza: *prstene* nalazimo među uzlovima s tri, pet, šest, sedam, osam i devet poteza. Jedini izuzetak su uzlovi koji se vežu u četiri poteza – takvi uzlovi isključivo su tipa *trolist*.

Nadalje, Denne i ostali daju i kriterije za prepoznavanje tipa uzla iz njihovog niza poteza:

Ako je niz poteza za vezanje uzla jedan od sljedećih oblika:

- $L_{\odot}R_{\otimes}C_{\odot}T$
- $f(L,R)C_{\otimes}R_{\odot}L_{\otimes}C_{\odot}T$

- $f(L, R)C_{\otimes}L_{\circ}R_{\otimes}C_{\circ}T$

tada je taj uzao tipa *prsten* (*unknot*). Na malo drugačiji način dane su i složenije karakterizacije za neke od tipova koje smo već spomenuli (poput *trolista*), ali i za tipove koje nismo opisivali (poput *twist* i *torus* tipova). Te karakterizacije na ovom mjestu nećemo formulirati zbog potrebe mnogo detaljnijeg poznavanja materije, no zainteresirane čitatelje upućujemo na [2].

6. Zaključak

Prve matematičke principe za opis vezanja kravate uz određene uvjete na pravila preklapanja šireg i užeg dijela kravate oformili su Fink i Mao. Izvode funkciju pomoću koje dobivaju formulu za broj različitih načina na koje se kravata može vezati, tj. za broj različitih čvorova kravate. Uzevši u obzir 3 do 9 preklapanja došli su do brojke 85 različitih čvorova kravate. Također objavljuju i knjigu za širu javnost koja laičkim jezikom pojašnjava sve te načine. [5] Nadalje, Fink i Mao koriste taj jezik za opis estetskih svojstava čvora kravate poput simetrije i širine čvora kravate te njegov balans. No, njihov pristup vrijedi samo za čvorove kravata s ravnom prednjom stranom.

Fink i Maove uvjete vezanja kravate relaksirali su Hirsch i ostali te su time obuhvatili i drugačije vrste čvorova. Također, prebrojali su 266 682 različita čvora s 3 do 13 preklapanja.

Topološki gledano, matematički uzao jednostavna je zatvorena krivulja u trodimenzijskom prostoru. Čvor kravate postaje matematičkim uzlom kad se spoje njezin širi i uži kraj.

Denne i ostali nadalje klasificiraju svaki od prvotnih 85 čvorova kravate u 27 tipova, tj. opisuju koji čvor kravate spada pod koji matematički uzao poput prstena, trolista, čvora 5_2 , twist i torus uzlova. Opisuju, nadalje, kako se neki čvorovi mogu prepoznati iz njihovih nizova pokreta.

Oni također ukazuju na to da ima još čvorova kravate koji se ne mogu prikazati pomoću formalizacije Hirscha i ostalih. Tu pak pronalazimo prostor za daljnje istraživanje i nadopunu dosad oformljenog matematičkog jezika kravata jer popis tih čvorova više nije dostupan.

Također, bilo bi zanimljivo istražiti i matematički opisati postupak vezanja leptir-mašne. Kod nekih načina vezanja početak je sličan vezanju kravate, ali se kasnije krajevi vrpce presavijaju pa bi tu trebalo razmisliti i uvesti neke nove oznake za takve poteze, te utvrditi kakvu strukturu gradi takav novi skup pravila.

Literatura

1. Chaille, F. *La grande histoire de la cravate*. Pariz: Flammarion. (1994.)
2. Denne, E., Joireman, C., i Young, A. *The Mathematics of Tie Knots*. *Involve - a journal of Mathematics*, Vol. 14, No. 2, 241–270 (2021.)
3. Fink, T.M. i Mao, Y. *Designing tie knots by random walks*. *Nature* 398; 6722: 31–32, (1999.)
4. Fink, T.M. i Mao, Y. *Tie Knots, Random Walks and Topology*. *Physica A*. 276:109–121 (2000.)
5. Fink, T.M. i Mao, Y. *The 85 ways to tie a tie*, Fourth Estate, London, (1999.)
6. Hirsch, D. i ostali *More ties than we thought*, *PeerJ Computer Science* 1:e2 DOI:10.7717/peerj-cs.2
7. Huzjan, V. *Pokušaj otkrivanja nastanka i razvoja kravate kao riječi i odjevnoga predmeta*. *Povijesni prilozi*, 27 (34), 103-120, (2008.). Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/27804>
8. Scoville, N. *Not Knot Theory*.
9. Stanković, V. *Teorija čvorova*, *Matematika i informatika* 3(2), 1-16, (2016.)
10. Vejdemo-Johansson M. *Random tie knots* webpage. Available at <http://dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.1300138> (2015.). Pristupljeno: lipanj 2023.