Problemi i zablude u nastavnim materijalima financijske matematike[1]

Drago Franciśković[2]

Sažetak

U ovom originalnom radu prikazuju se zablude i problemi koji se desetljećima pojavljuju u nastavnom sadržaju financijske matematike koja se predaje u sustavu visokog obrazovanja u Hrvatskoj i drugim državama. One se uporno, bez kritike, prenose iz postojećih udžbenika u druge nove udžbenike i ostale nastavne materijale.

Uvodni odjeljak, pored definicija osnovnih pojmova, navodi i ukratko opisuje spomenute zablude. Spominje se neujednačenost značenja pojmova kamatnjaka i kamatne stope te nekorektnost općeprihvaćene formule neprekidne kapitalizacije. Nadalje, rad se bavi diskretnim modelima jednostavne i složene kapitalizacije te problematikom definicije vremenski konstantne kamatne stope koja se smatra općepoznatom i kao takva je općeprihvaćena. Postavlja se pitanje što je to kamatna stopa, broj, uređeni par ili funkcija. Prikazuju se tri definicije kamatne stope, od kojih je prva presjek ostalih dviju u slučaju kada je duljina razdoblja na koje se one odnose jedinična. Uspoređuju se jednostavna i složena kapitalizacija. Pokazuje se da su kamatne stope u jednostavnom i složenom modelu rasta različite veličine.

Definira se ekvivalentnost kamatnih stopa za diskretni jednostavni i složeni model rasta kapitala i pokazuje da je relativna kamatna stopa isključivo vezana za jednostavni, a konformna za složeni model rasta.

Ukazuje se na problem izvoda općeprihvaćene formule za neprekidno ukamaćivanje u slučaju složenog ukamaćivanja koja je dobivena matematički korektno, ali se zasniva na često prešućenoj pretpostavci. Ta pretpostavka je da se za ispodgodišnje kamatne stope uzimaju relativne kamatne stope koje nisu ekvivalentne godišnjoj kamatnoj stopi.

Obrađuje se neprekidna jednostavna i složena kapitalizacija i vrijednost kapitala u proizvoljnim trenutcima. Pokazuje se povezanost formula neprekidne s formulama diskretne kapitalizacije. Definira se ekvivalentnost kamatnih stopa u slučaju nepre-

[1]Predavanje održano na 9. kongresu nastavnika matematike 2022. u Zagrebu
[2]Drago Franciśković, Međimursko veleučilište u Čakovcu

kidne jednostavne i složene kapitalizacije. Spominje se problem čestog poistovjećivanja kamatne stope i intenziteta ukamaćivanja, iako se radi o povezanim, ali sasvim različitim veličinama.

Ključne riječi: jednostavno i složeno ukamaćivanje, ekvivalentne kamatne stope, ekvivalentni kamatnjaci, neprekidna i diskretna kapitalizacija

1. Uvod

Problemi i zablude u nastavnim materijalima financijske matematike prvenstveno se pojavljuju u materijalima koji nisu namijenjeni matematičarima. Uobičajeno se misli da je u tim materijalima sve poznato pa se njihov sadržaj olako kopira i prenosi dalje bez kritičkog promišljanja o njegovoj korektnosti i jednoznačnosti. U ovom će se radu pokazati da to nije tako pa je potreban oprez pri prijenosu sadržaja nastavnog materijala. Promatrani problemi i zablude toliko su rašireni da se u ovom radu ne navode reference na neke od brojnih spornih nastavnih materijala jer se ne želi nikoga prozvati i povrijediti. Cilj je upozoriti na problematiku i zablude kako bi se oni izbjegli u budućim izdanjima materijala.

Osnovni pojmovi financijske matematike su:

- kapital - neko dobro ili dug, odnosno vrijednost dobra ili duga koji se povećava,
- kapitalizacija - promjena (najčešće povećanje) kapitala, (sinonimi: ukamaćivanje, akumulacija),
- kamata - cijena zaduženja ili povećanje kapitala unutar nekog razdoblja duljine d,
- kamatna stopa - kamata jediničnog kapitala; $i = i(d)$, npr. i = 12,3 % = 0,123.

Kada se kaže da je kamatna stopa 4,5, to znači da je ona 450 %, a ne 4,5 %. Ponekad se npr. kaže da je ona 4,5 a misli se na 4,5 %, što je pogrešno, tako da tu treba biti oprezan. Znak posto (%) neposredno iza broja znači da se taj broj dijeli sa 100, npr. $12{,}3\ \% = \frac{12{,}3}{100} = 0{,}123$.

1.1. Problem kamatnjaka

U stručnoj literaturi i poslovnoj praksi spominje se i kamatnjak koji se uobičajeno označava s p. Što je kamatnjak? Njegova definicija, koja se pojavljuje u spomenutim spornim materijalima, nije jednoznačna.

U promatranim materijalima spominju se dva slučaja:

- kamatnjak je sinonim za kamatnu stopu, tj. $p = i$,
- kamatnjak je sto puta veći od kamatne stope, tj. $p = 100i$, odnosno $i = p \cdot \frac{1}{100} = p\ \%$.

Obje bi definicije mogle biti prihvatljive, ali ne postoji usuglašenost koja će se koristiti. Neki autori nastavnih materijala prednost daju jednoj, a neki drugoj definiciji. Najveći problem je kada se unutar istog nastavnog materijala malo koristi jedna, pa malo druga definicija. U primjerima se nerijetko kaže da je npr. kamatnjak p = 5 %, a onda se u formulama p zamijeni s 5, a ne s 5 % tj. 0,05. U mnogim se materijalima pojavljuje izraz $\frac{p}{100}$ ili $1+\frac{p}{100}$. U tom slučaju kamatnjak nikako ne može biti sinonim za kamatnu stopu, a što se zna pojavljivati u materijalima.

1.2. Problem formule neprekidne složene kapitalizacije

Jedna od uobičajenih zabluda je dobro poznata formula za neprekidnu složenu kapitalizaciju

$$C(t) = C_0 e^{it}, \tag{1}$$

pri čemu je $C(t)$ iznos kapitala u trenutku $t \geq 0$; $C_0 = C(0)$; i je prirast jediničnog kapitala unutar razdoblju jedinične duljine (jediničnog razdoblja – obično jedne godine).

Pogledajmo sljedeći primjer koji pokazuje da je sporna definicija sama sebi kontradiktorna.

Primjer 1.

Mlada šuma procijenjene drvne mase 1000 tona ima godišnji prirast 40 % (godišnja kamatna stopa).

a) Kolika je procijenjena drvna masa šume nakon pet godina?

b) Kolika je procijenjena drvna masa šume nakon jedne godine?

Rješenje:

$C_0 = 1000$, $i = 40$ % , $a = 5$, $b = 1$.

a) $C(5) = C_0 e^{ia} = 1000 e^{0,4\cdot 5} = 7\,389{,}06$,

b) $C(1) = C_0 e^{ib} = 1000 e^{0,4\cdot 1} = 1491{,}82$.

Iz rješenja pod b) slijedi da je godišnje povećanje kapitala, tj. godišnja kamata 491,82, odnosno slijedi da je godišnja kamatna stopa 0,49182 = 49,182 %. To je u kontradikciji s ključnim podatkom da je ona 40 %. Ta kontradikcija dovoljan je dokaz da je promatrana sporna formula neprekidne kapitalizacije nekorektna. U nastavnim materijalima u kojima se koristi ta sporna formula u pravilu se ne pojavljuju primjeri u kojima se traži iznos kapitala nakon jedne godine, čime se izbjegava da se uoči njena nekorektnost.

1.3. Vrste kapitala i modeli rasta kapitala

Razlikujemo dvije vrste kapitala s obzirom na njegovu sposobnost stvaranja novog kapitala:

- produktivni (onaj koji stvara novi kapital, proizvodi kamate),
- neproduktivni (onaj koji ne stvara novi kapital).

S obzirom na spomenute vrste kapitala, razlikujemo dvije vrste modela rasta kapitala.

I. Model u kojem vrijedi načelo da je produktivan samo početni kapital. Prema njemu, kamata se obračunava samo na početni kapital, tj. ne računa se „kamata na kamatu".
Radi se o modelu poznatom kao model jednostavne kapitalizacije.

II. Model u kojem vrijedi načelo da je sveukupni kapital produktivan. Prema njemu, kamata se obračunava na ukupni iznos kapitala, tj. računa se „kamata na kamatu".
Radi se o modelu poznatom kao model složene kapitalizacije.

Modeli rasta kapitala bi se, s obzirom na to kada se obračunavaju kamate, mogli podijeliti na diskretne i neprekidne. Diskretni model rasta kapitala model je rasta u kojemu se porast kapitala događa u diskretnim trenutcima. U pravilu, radi se o ekvidistantnim trenutcima, a razdoblje na kraju kojeg se obračunava porast kapitala (kamata) naziva se razdoblje obračuna. U neprekidnom modelu kapitalizacija se događa u svakom trenutku. Ovdje će se pokazati da, unatoč općoj prihvaćenosti, u biti nema razlike između diskretne i neprekidne kapitalizacije.

2. Diskretni model rasta kapitala

Uvedimo sljedeće oznake:

C_0 – iznos početnog kapitala,

d – duljina razdoblja na koje se odnosi kamatna stopa (duljina razdoblja kamatne stope),

$i = i(d)$ – kamatna stopa; stopa porasta kapitala u odnosu na jedinični produktivni kapital tijekom razdoblja duljine d,

n – broj uzastopnih razdoblja duljine d na kraju kojih se promatra iznos kapitala,

C_k – iznos kapitala na kraju k-tog od promatranih uzastopnih razdoblja duljine d,

$k = 1,\ldots,n,\ldots$, (Uočimo da C_k ovisi o duljini razdoblja kamatne stope d.),

$C_{P,k-1}$ – iznos produktivnog kapitala na početku k-tog razdoblja duljine d.

2.1. Što je kamatna stopa? Definicije kamatne stope

Unatoč uobičajenom vjerovanju, definicija kamatne stope nije jedinstvena. Postoje dvije različite definicije i treća koja u specijalnom slučaju (d = 1) zadovoljava obje od tih definicija. Možemo se pitati „Što je kamatna stopa? Broj, uređeni par ili funkcija?” Uobičajeno se uzima da je ona broj koji se odnosi na vremensku jedinicu (osnovno razdoblje), no može se odnositi na razdoblje bilo koje duljine.

Promatrajmo sljedeće definicije kamatne stope.

A	$i=\dfrac{C_k-C_{k-1}}{C_{P,k-1}}$	Porast kapitala po jediničnom produktivnom kapitalu tijekom razdoblja jedinične duljine (d = 1). Kamatna stopa je broj i, odnosno uređeni par (1, i).
B	$i_d=\dfrac{C_k-C_{k-1}}{C_{P,k-1}}\dfrac{1}{d}$	*Srednja brzina* promjene (prosječni linearni porast) kapitala po jediničnom produktivnom kapitalu u razdoblju duljine d. Naziva se i *nominalna kamatna stopa* i odnosi se na jedinično razdoblje. Kamatna stopa je uređeni par (d, i_d).
C	$i(d)=\dfrac{C_k-C_{k-1}}{C_{P,k-1}}$	Porast, *stopa rasta* kapitala po jediničnom produktivnom kapitalu u razdoblju duljine d. Kamatna stopa je uređeni par (d, i), odnosno funkcija $i(d)$.

Produktivni kapital $C_{P,\,k-1}$ u definicijama ovisi o tome radi li se o modelu I ili modelu II.

$C_{P,k-1}=C_0$ u slučaju modela I, odnosno u slučaju jednostavne kapitalizacije.

$C_{P,k-1}=C_{k-1}$ u slučaju modela II, odnosno u slučaju složene kapitalizacije.

Očito je da su kamatne stope različitih modela različite veličine jer se dobiju iz različitih formula. Dakle, za svaku kamatnu stopu treba jasno reći je li ona jednostavna kamatna stopa (za model I) ili složena (za model II). U slučaju jednostavne treba je koristiti samo u jednostavnom kamatnom računu, a u slučaju složene samo u složenom kamatnom računu. Uobičajeno se postupa suprotno; spomene se iznos kamatne stope te se onda ona ponekad primjenjuje i u jednostavnom i u složenom kamatnom računu.

Definicije B i C su različite, pa su odgovarajuće kamatne stope različite veličine. One imaju različitu dimenziju[3] tj. pripadaju im različite mjerne jedinice. Kamatna stopa iz B, i_d, ima dimenziju $\left[T^{-1}\right]$, a $i(d)$ iz C nema dimenziju, odnosno kaže se da ima dimenziju $[1]$. Definicija A podrazumijeva da je d = 1 i uz taj uvjet zadovoljava obje preostale definicije. Posljedično tome, dimenzija definicije A je dvojbena.

Kamatna stopa A odnosi se na jedinično razdoblje i na njega se primjenjuje. Kamatna stopa C odnosi se na razdoblje duljine d i primjenjuje se na to razdoblje. Kod kamatne stope B situacija je drugačija, ona se odnosi na jedinično razdoblje, ali se primjenjuje na razdoblje duljine d. Kamatna stopa definirana u B uglavnom se spominje u znanstvenoj literaturi i naziva se *nominalna kamatna stopa* (vidi [4]).

[3]Dimenzija neke veličine je, pojednostavljeno rečeno, skup svih mogućih mjernih jedinica te veličine.

Uočimo vezu između definicije kamatne stope B i C, tj. da vrijedi $\boldsymbol{i(d) = d\, i_d}$.

Nadalje, ukoliko drugačije nije rečeno, koristi se definicija C, a kamatna stopa je funkcija duljine razdoblja na koje se odnosi, odnosno vrijednost funkcije za određenu duljinu.

2.2. Usporedba jednostavnog i složenog modela rasta kapitala

Istaknimo da aritmetički niz modelira diskretnu jednostavnu, a geometrijski niz diskretnu složenu kapitalizaciju. Očito je da je kamatna stopa $i(d)$ u modelu I različita veličina od kamatne stope $i(d)$ u modelu II. Bilo bi poželjno da se za njih koriste i različite oznake kao što je to uobičajeno u slučaju dekurzivne i anticipativne kapitalizacije. Nadalje ćemo kamatnu stopu u slučaju jednostavne kapitalizacije označiti s $\hat{i}$, a u slučaju složene s i.

Slijedi usporedba modela jednostavne i modela složene kapitalizacije s prikazom formula za izračun iznosa kapitala u diskretnim ekvidistantnim trenucima *kd*, te formule za izračun vremenski konstantne kamatne stope.

Model I - jednostavna kapitalizacija	**Model II** - složena kapitalizacija
$C_1 = C_0 + C_0\,\hat{i}$	$C_1 = C_0 + C_0\, i$
$C_k = C_{k-1} + C_0\,\hat{i}$	$C_k = C_{k-1} + C_{k-1}\, i = C_{k-1}\left(1+i\right)$
$C_k = C_0\left(1+k\hat{i}\right) = C_0 + C_0\, k\hat{i}$	$C_k = C_0\left(1+i\right)^k$
$\left\{C_k\right\}_0^n$ - **aritmetički niz** (razlika niza je $C_0\,\hat{i}$)	$\left\{C_k\right\}_0^n$ - **geometrijski niz** (kvocijent niza je 1 + *i*)
$C_k = C_l + C_0\left(k-l\right)\hat{i}$	$C_k = C_l\left(1+i\right)^{k-l} = C_l\, r^{k-l}$
$\hat{i}$ je *stopa rasta* jediničnog početnog kapitala na razdoblju duljine *d*.	$r = 1+i$ je *faktor rasta* jediničnog kapitala na razdoblju duljine *d*.
	$r(d) = r = 1+i = \dfrac{C_k}{C_{k-1}} = \sqrt[k-l]{\dfrac{C_k}{C_l}}$
$\hat{i}(d) = \hat{i} = \dfrac{C_k - C_{k-1}}{C_0}$	$i(d) = i = \dfrac{C_k - C_{k-1}}{C_{k-1}} = \dfrac{C_k}{C_{k-1}} - 1$
$\hat{i}(d) = \hat{i} = \dfrac{C_k - C_l}{C_0}\dfrac{1}{k-l}$	$i(d) = i = \sqrt[k-l]{\dfrac{C_k}{C_l}} - 1$

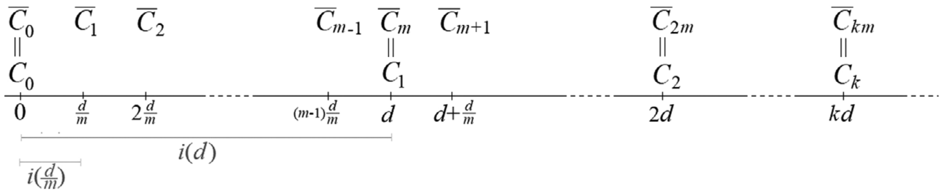
Primijetimo da je prirodno rast kapitala u slučaju jednostavne kapitalizacije povezivati sa stopom rasta jediničnog početnog kapitala, $\hat{i}$, a u slučaju složene s faktorom rasta jediničnog kapitala, *r*. Međutim, i u slučaju složene kapitalizacije tradicionalno se forsira korištenje stope rasta, *i*, pri čemu se u pravilu ne pravi razlika te stope od one kod jednostavne kapitalizacije, iako se radi o različitim veličinama.

Funkcija $C(k) = C_k = C_0\left(1 + k\,\hat{i}(d)\right)$ je *funkcija diskretne jednostavne kapitalizacije*, a funkcija $C(k) = C_k = C_0\left(1 + i(d)\right)^k$ je *funkcija diskretne složene kapitalizacije*.

2.3. Kamatna stopa za razdoblje duljine manje od *d*

Za razdoblje obračuna, tj. razdoblja na kraju kojeg se obračunavaju kamate i pridodaju iznosu kapitala s početka tog razdoblja, uzimamo da je jednako razdoblju kamatne stope. Ukoliko se obračun želi raditi češće, npr. *m* puta tijekom razdoblja kamatne stope u jednakim razmacima, potrebno je naći odgovarajuće kamatne stopu $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$, odnosno $i\left(\frac{d}{m}\right)$, čijom će se primjenom dobiti ista konačna vrijednost kapitala kao primjenom kamatne stope $\hat{i}(d)$, odnosno $i(d)$.

Podijelimo razdoblje kamatne stope duljine d na $m \in \mathbb{N}$ jednakih dijelova, kako je to prikazano na slici ispod. Proširimo niz $\left\{C_k\right\}_0^n$ dodavanjem između svaka dva susjedna člana *m* – 1 novih članova. Novi niz $\left\{\overline{C}\right\}_0^{nm}$ generiran je kamatnom stopom koja se odnosi na razdoblje obračuna duljine $\frac{d}{m}$.



Cilj je naći iznos kamatne stope na razdoblju duljine $\frac{d}{m}$, tj. $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$, odnosno $i\left(\frac{d}{m}\right)$, uz uvjet da se njenom primjenom dobiju, u trenucima *kd*, iste vrijednosti kapitala kao pri primjeni poznatog iznosa kamatne stope $\hat{i}(d)$, odnosno $i(d)$, uz poštivanje načela jednostavne, odnosno složene kapitalizacije.

Primjenom $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$, odnosno $i\left(\frac{d}{m}\right)$, generira se niz $\left\{\overline{C}\right\}_0^{nm}$, tj. niz $\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_m, \ldots, \overline{C}_{km}, \ldots, \overline{C}_{nm}$. Treba biti zadovoljen uvjet $\overline{C}_{km} = C_k$, za $k = 0, \ldots, n$. Za iznose kamatnih stopa $\hat{i}(d)$ i $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$, odnosno $i(d)$ i $i\left(\frac{d}{m}\right)$, kažemo da su u relaciji ako za njih vrijedi spomenuti uvjet. Ta relacija je relacija ekvivalencije. U slučaju modela jednostavne kapitalizacije govorimo o *jednostavnoj ekvivalentnosti*, a u slučaju složene o *složenoj ekvivalentnosti* kamatnih stopa.

Razmotrimo paralelno slučajeve jednostavne i složene kapitalizacije.

Model I - jednostavna kapitalizacija	**Model II** - složena kapitalizacija
$C_k = C_0 + k C_0 \hat{i}(d)$	$C_k = C_0 \left(1 + i(d)\right)^k$
$\overline{C}_{km} = \overline{C}_0 + km \overline{C}_0 \hat{i}\left(\frac{d}{m}\right) = C_0 + km C_0 \hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$	$\overline{C}_{km} = \overline{C}_0 \left(1 + i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^{km} = C_0 \left(1 + i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^{km}$
$\overline{C}_{km} = C_k \quad \Rightarrow \quad \hat{i}(d) = m\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$	$\overline{C}_{km} = C_k \quad \Rightarrow \quad 1 + i(d) = \left(1 + i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^m$
$\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right) = \frac{\hat{i}(d)}{m}$	$i\left(\frac{d}{m}\right) = \sqrt[m]{1 + i(d)} - 1$
Relativna kamatna stopa	**Konformna kamatna stopa**
Sve kamatne stope $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right), m \in \mathbb{N}$, relativne su danoj kamatnoj stopi $\hat{i}(d)$ i međusobno su jednostavno ekvivalentne.	Sve kamatne stope $i\left(\frac{d}{m}\right), m \in \mathbb{N}$, konformne su danoj kamatnoj stopi $i(d)$ i međusobno su složeno ekvivalentne.

Model diskretne jednostavne kapitalizacije vezan je uz ono što nazivamo relativna kamatna stopa. Za danu stopu $\hat{i}(d)$ sve njoj relativne kamatne stope međusobno su jednostavno ekvivalentne, tj. one čine klasu jednostavne ekvivalencije.

Model diskretne složene kapitalizacije vezan je uz ono što nazivamo konformna kamatna stopa. Za danu stopu $i(d)$ sve njoj konformne kamatne stope međusobno su složeno ekvivalentne, tj. one čine klasu složene ekvivalencije.

Jednostavna i složena ekvivalentnost kamatnih stopa, i njihovo jasno razlikovanje, imaju važnu ulogu u suvremenom pristupu financijskoj matematici.

Članove promatranih nizova $\{C_k\}_0^n$ i $\{\overline{C}\}_0^{nm}$ mogu se izračunati prema formulama u sljedećoj tablici:

Model I - jednostavna kapitalizacija	**Model II** - složena kapitalizacija
$C_k = C_0\left(1 + k\hat{i}(d)\right) = C_0\left(1 + km\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)\right)$,	$C_k = C_0\left(1 + i(d)\right)^k = C_0\left(1 + i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^{mk}$,
$\overline{C}_{km+j} = C_0\left(1 + (km+j)\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)\right)$,	$\overline{C}_{km+j} = C_0\left(1 + i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^{km+j}$,
$k = 0,\ldots,n\,; \quad j = 0,\ldots,m-1 \ (\text{za}\, k \neq n)$	$k = 0,\ldots,n\,; \quad j = 0,\ldots,m-1 \ (\text{za}\, k \neq n)$

Model diskretne jednostavne kapitalizacije je aritmetički niz, a model diskretne složene kapitalizacije geometrijski niz. Svaki od ta dva modela, odnosno dva niza, ima svoja svojstva i formule, tako da oni nemaju veze jedan s drugim. Nitko tko imalo poznaje te nizove neće ni pomisliti pri radu s jednim nizom koristiti formule i svojstva drugog. Međutim, gotovo je uobičajeno da se pri radu s modelom složene kapitalizacije koriste formule i svojstva svojstvena modelu jednostavne kapitalizacije. U složenoj kapitalizaciji često se koristi relativna kamatna stopa iako ona s njom nema nikakve veze! Radi se o neusklađenosti u korištenju modela složene kapitalizacije.

Nažalost, u praksi financijskih institucija usklađenost modela se ne poštuje. Uobičajeno je za banke da pri izračunu mjesečnog anuiteta zajma koriste mjesečnu relativnu kamatnu stopu ugovorene godišnje kamatne stope. Takva praksa i sadržaji u nastavnim materijalima koji je opisuju dovodi do problema i zabluda u primjeni složene kapitalizacije (složenog kamatnog računa) i njenog razumijevanja. Posljedično tome, složeni kamatni račun nepotrebno se komplicira. Upravo zbog takve prakse potrebno je u nastavnim materijalima financijske matematike, nakon što se obradi korektan način, obraditi i način na koji se financijska matematika primjenjuje u praksi, ali uz nužnost naglašavanja da se radi o neusklađenosti. Naravno, dok se eventualno u nekoj budućnosti ne promijeni praksa financijskih ustanova i one ne počnu poštivati usklađenost modela.

2.4. Diskretni složeni model rasta i problem u praksi

Kao što je spomenuto, uobičajeno je da banke umjesto konformne koriste relativnu mjesečnu kamatnu stopu. Pogledajmo što se događa s geometrijskim nizom $\{C_k\}_0^n$ kada se, kako se to obično kaže, umjesto konformne kamatne stope koristi relativna, tj. kada se za danu složenu kamatnu stopu $i(d)$ umjesto formule za njoj konformnu kamatnu stopu, $i\left(\frac{d}{m}\right)=\sqrt[m]{1+i(d)}-1$, koristi ona za njoj relativnu kamatnu stopu, $i\left(\frac{d}{m}\right)=\frac{i(d)}{m}$.

$$C_k=C_0\left[1+i(d)\right]^k=C_0\left[\left(1+i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^m\right]^k=\left|\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ i\left(\frac{d}{m}\right)\ \ s\ \ \frac{i(d)}{m}\end{array}\right|\neq C_0\left[\left(1+\frac{\boldsymbol{i(d)}}{m}\right)^m\right]^k=D_k.\ (2)$$

Dobije se jedan sasvim drugi niz, $\{D_k\}_0^n$, koji ne opisuje promatrani proces nego neki drugi proces.

Npr. uz $d=1$, niz $\{C_k\}_0^n$ mogao bi predstavljati iznos drvne mase krajem godine u jednoj, a $\{D_k\}_0^n$ u nekoj drugoj šumi. Dakle, spomenutom zamjenom dolazi do zablude; umjesto promatranja procesa rasta prve, promatra se proces rasta druge šume misleći da se radi o onoj prvoj.

Problem „krive šume” riješen je na vrlo neobičan način. Umjesto da se za razdoblje duljine $\frac{d}{m}$ koristi kamatna stopa koja je složeno ekvivalentna onoj koja generira niz $\{C_k\}_0^n$ (konformna kamatna stopa), iz nejasnog razloga uporno se zadržava izraz desno od znaka nejednakosti u (2), $C_0\left[\left(1+\frac{\boldsymbol{i(d)}}{m}\right)^m\right]^k$, tako da se korigira brojnik, a zadržava m u nazivniku. Uz $d = 1$, u tom izrazu, kamatna stopa $i(d)$ u brojniku zamijeni se nominalnom kamatnom stopom $i_{nom} = i_{nom}\left(\frac{1}{m}\right) = i_{\frac{1}{m}} = i^{(m)}$ (definicija B uz $d = \frac{1}{m}$), tako da jednakost vrijedi, tj.

$$i_{nom} = mi\left(\frac{1}{m}\right) = m\left(\left[1+i(1)\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right). \tag{3}$$

Nakon te korekcije imamo

$$C_k = C_0\left[\left(1+\frac{\boldsymbol{i_{nom}}}{m}\right)^m\right]^k. \tag{4}$$

Kamatna stopa $i\left(\frac{1}{m}\right)$ ona je koja generira niz $\{\overline{C}\}_0^{nm}$; ona je konformna kamatnoj stopi $i(1)$, tj. $i\left(\frac{1}{m}\right) = \left[1+i(1)\right]^{\frac{1}{m}} - 1$, a relativna je spomenutoj nominalnoj kamatnoj stopi i_{nom} , tj. $i\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{i_{nom}}{m}$.

Kamatna stopa

$$i_{ef} = i(1) = \left(1+\frac{\boldsymbol{i_{nom}}}{m}\right)^m - 1. \tag{5}$$

se, u odnosu na nominalnu, tada naziva *efektivna* (učinkovita, djelotvorna) *kamatna stopa*. Ona se odnosi na jedinično razdoblje. Razdoblje obračuna duljine $\frac{1}{m}$ posebno se ističe, i to je razdoblje za koje je nominalna kamatna stopa, $i_{nom} = i_{\frac{1}{m}}$, određena i na koje se primjenjuje.

U slučaju primjene nominalne kamatne stope nužno je navesti i razdoblje obračuna. Kada je jedinično razdoblje jedna godina za nominalnu kamatnu stopu i_{nom} kaže se da je ona primjenjiva m puta godišnje, tj. za kamate se kaže da se obračunavaju (plaćaju) m puta godišnje.

U slučaju kada je $d = 1$, sve je matematički korektno i jednakost (4) vrijedi. Postavlja se pitanje: „Koja je svrha takvog pristupa koji je ograničen samo na slučaj $d = 1$ i neophodno je spominjanje i korištenje nominalne i efektivne kamatne stope?”. Ima li to kompliciranje smisla?

Zar nije jednostavnije i smislenije reći „mjesečna kamatna stopa 1 %" nego „godišnja nominalna kamatna stopa 12 % koja se primjenjuje mjesečno" ili „1 % mjesečnih kamata" umjesto „12 % godišnjih kamata obračunatih mjesečno"? Odgovarajuća efektivna kamatna stopa u slučaju spomenutog primjera izračunata na 4 decimalna mjesta je 12,6825.

Gotovo u pravilu, u nastavnim i stručnim materijalima i praksi, svaka zadana kamatna stopa, i_z, naziva se nominalnom i takvom se smatra. To je zbog utjecaja bankarske prakse u kojoj je dana kamatna stopa doista uglavnom nominalna i uglavnom se primjenjuje na razdoblje od jednog mjeseca. Drugim riječima, za takvu zadanu godišnju kamatnu stopu u izračunu se koristi njoj relativna mjesečna kamatna stopa koja se u izračunu uzima kao mjesečna složena kamatna stopa. Tako se npr. to radi pri izračunu mjesečnog anuiteta zajma. Stvarno korištena godišnja kamatna stopa tada je efektivna kamatna stopa i ona je veća od zadane nominalne. Nema potrebe da se zadaje nominalna (dakle godišnja) kamatna stopa ukoliko se u izračunu koristi mjesečna složena. Može se zadati složena mjesečna ili njoj složeno ekvivalentna godišnja.

Općenito, zadati se može i kamatna stopa koja se primjenjuje na isto razdoblje na koji se odnosi. Npr. može se zadati polugodišnja složena kamatna stopa. To bi moglo biti prihvatljivo u teoriji, ali ne i u praksi pri kontaktu s klijentima, jer se u praksi, s dobrim razlogom, spominju isključivo zadane godišnje kamatne stope. Tako se različite vrijednosti kamatne stope mogu uspoređivati. Ona veća će prouzročiti i veće, a manja manje kamate. Ali to nije slučaj s nominalnim kamatnim stopama ukoliko su razdoblja na koja se one primjenjuju različite duljine.

Tako će npr. nominalna kamatna stopa od 9,9 %, koja se primjenjuje polugodišnje, prouzročiti manju kamatu od nominalne od 9,8 % koja se primjenjuje kvartalno.

Nema potrebe zadavati nominalnu kamatnu stopu koja daje različite kamate ovisno o duljini razdoblja na koje se primjenjuje. Zar nije jednostavnije zadati godišnju kamatnu stopu koja bi bila jednaka efektivnoj?

Za potrebe izračuna na razdobljima različitim od jediničnog razdoblja mogu se koristiti njoj složeno ekvivalentne kamatne stope koje se odnose na razdoblja različite duljine kako je to prikazano ranije u ovom radu.

Tako da se uopće ne treba koristiti niti spominjati nominalna kamatna stopa i njoj pridružena efektivna kamatna stopa.

Napomenimo da i_{nom} ovisi o m, što se olako zaboravlja, a što dovodi do nekorektnosti i velike zablude u izvodu formule za neprekidnu kapitalizaciju. Uz nominalnu kamatnu stopu veže se i razdoblje obračuna duljine $\frac{1}{m}$ koje je uvijek potrebno spomenuti. Pri korištenju efektivne kamatne stope $i(1)$ spominjanje razdoblja obračuna nije potrebno jer je ono jednako razdoblju kamatne stope, 1 ili d.

3. Neprekidna kapitalizacija i vrijednosti kapitala u diskretnim trenutcima

U neprekidnom modelu kapitalizacija se događa u svakom trenutku. Za sada nas zanima vrijednost kapitala u diskretnim trenucima *kd*, za $k = 1,...,n$ u slučaju neprekidne kapitalizacije. Poslije će se obraditi neprekidna kapitalizacija kojom se dobiva vrijednost kapitala u proizvoljnim trenutcima.

3.1. Nekorektna formula neprekidne složene kapitalizacije

Nekorektna formula neprekidne složene kapitalizacije izvodi se tako da se krene od ranije spomenute jednakosti $C_k = C_0\left[\left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m\right]^k$ u kojoj se ignorira činjenica da zadana nominalna kamatna stopa, $i_z = i_{nom}$, ovisi o m ili se i_{nom} olako zamijeni nenominalnom zadanom kamatnom stopom, $i_z = i_z(1)$, koja se odnosi na jedinično razdoblje (uglavnom se radi o jednoj godini) i koja kao takva ne ovisi o *m*. Zatim se gleda što se događa s C_k kada $m \to \infty$. Graničnu vrijednost za C_k označimo s $C_{k,\infty}$.

$$C_{k,\infty} = \lim_{m\to\infty} C_0\left[\left(1+\frac{i_z}{m}\right)^m\right]^k = C_0\, e^{i_z k} \quad . \tag{6}$$

Matematički korektno, ali ona ne opisuje promatrani proces, odnosno promatrani model rasta, jer se zasniva na nekorektnim pretpostavkama. Iako je uvodni primjer dovoljan da se pokaže nekorektnost te formule, pokažimo to i općenitije. Nađimo kamatnu stopu procesa složene kapitalizacije koji generira niz $\left\{C_{k,\infty}\right\}_0^n$.

$$i = i(1) = \frac{C_k - C_{k-1}}{C_{k-1}} = \frac{C_0 e^{i_z k} - C_0 e^{i_z (k-1)}}{C_0 e^{i_z (k-1)}} = \frac{C_0 e^{i_z (k-1)}\left(e^{i_z} - 1\right)}{C_0 e^{i_z (k-1)}} = e^{i_z} - 1 \, . \tag{7}$$

Dakle, kamatna stopa na jediničnom razdoblju nije i_z kako se smatralo. To spornu formulu čini kontradiktornom; sama je sebi kontradiktorna.

Uočimo da je $i_z = \ln(1+i)$, a to je *intenzitet kapitalizacije* (*brzina kapitalizacije*) koji označavamo s δ. Uvrstimo li tu jednakost u izraz za $C_{k,\infty}$, imamo da je $C_{k,\infty} = C_0\left(1+i\right)^k = C_k$.

3.2. Korektna formula neprekidne jednostavne i složene kapitalizacije

Promatrajmo situaciju u kojoj se razdoblje obračuna duljine $\frac{d}{m}$ smanjuje, tj. *m* se povećava i teži u beskonačnost. Odnosno, promatrajmo vrijednost članova niza $\left\{C_k\right\}_0^n$ u slučaju neprekidnog obračunavanja, tj. u slučaju neprekidne kapitalizacije.

Koristeći ekvivalentnost kamatnih stopa $\hat{i}\left(d\right)$ i $\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)$, odnosno $i(d)$ i $i\left(\frac{d}{m}\right)$, dobivaju se korektne formule za neprekidnu jednostavnu i složenu kapitalizaciju:

$$C_{k,\infty} = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+km\hat{i}\left(\frac{d}{m}\right)\right) = \left|\begin{array}{c}\text{jednostavna ekvivalentnost}\\ \text{kamatnih stopa} \quad \hat{i}\left(\frac{d}{m}\right) \quad \text{i} \quad \hat{i}\left(d\right)\end{array}\right| = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+k\hat{i}\left(d\right)\right) = C_k,$$

$$C_{k,\infty} = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+i\left(\frac{d}{m}\right)\right)^{mk} = \left|\begin{array}{c}\text{složena ekvivalentnost}\\ \text{kamatnih stopa} \quad i\left(\frac{d}{m}\right) \quad \text{i} \quad i\left(d\right)\end{array}\right| = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+i\left(d\right)\right)^k = C_k.$$

Vidi se da su formule za izračun iznosa kapitala C_k u diskretnim trenucima *kd*, za $k=1,\dots,n$ iste i u slučaju diskretne i u slučaju neprekidne kapitalizacije.

Kao rezultat primjene ekvivalentnih kamatnih stopa, slijedi da je za izračun iznosa kapitala u trenutku *kd*, C_k, duljina razdoblja obračuna, $\frac{d}{m}$, nebitna. (Duljina razdoblja obračuna bitna je jedino ukoliko je zadana kamatna stopa nominalna i tada je razdoblje na koje se ona primjenjuje razdoblje obračuna.) Osim početnog iznosa C_0, bitan je iznos kamatne stope $\hat{i}\left(d\right)$, odnosno $i(d)$, i duljina razdoblja na koje se ona odnosi *d*.

Ovime je pokazano da iznosi C_k ostaju isti neovisno od toga je li kapitalizacija diskretna ili neprekidna. Može se smatrati da je sama kapitalizacija neprekidan proces. To što nas zanima iznos kapitala u tom procesu u diskretnim trenutcima i što ga izračunavamo i tim diskretnim trenutcima ne znači da je i kapitalizacija diskretna.

4. Neprekidna kapitalizacija i vrijednosti kapitala u proizvoljnim trenutcima

4.1. Funkcije neprekidne kapitalizacije

Promatrajmo funkciju jednostavne kapitalizacije definiranu na skupu nenegativnih cijelih brojeva $k = 0, 1, \dots, n$

$$C\left(k\right) = C_k = C_0\left(1+k\hat{i}\left(d\right)\right). \tag{8}$$

Skup svih njenih vrijednosti čini aritmetički niz $\left\{C_k\right\}_0^n$. Drugim riječima, aritmetički niz modelira diskretnu jednostavnu kapitalizaciju. Funkcija diskretne jednostavne kapitalizacije prirodno se može proširiti na realne brojeve $t\in\left[0,nd\right]$ tako da se u prethodnoj jednakosti stavi da je $k=\frac{t}{d}$, odnosno da je $t = kd$. Tako dobivamo funkciju neprekidne jednostavne kapitalizacije:

$$\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{t}\right) = \boldsymbol{C}_0\left(1+\boldsymbol{t}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{d}\right)}{\boldsymbol{d}}\right]\right). \tag{9}$$

Radi se o linearnoj funkciji, tj. linearna funkcija modelira neprekidnu jednostavnu kapitalizaciju.

Promatrajmo funkciju složene kapitalizacije definiranu na skupu nenegativnih cijelih brojeva $k = 0, 1, ..., n$

$$C(k)=C_k=C_0\left(1+i(d)\right)^k \quad . \tag{10}$$

Skup svih njenih vrijednosti čini geometrijski niz $\{C_k\}_0^n$. Drugim riječima, geometrijski niz modelira diskretnu složenu kapitalizaciju. Funkcija diskretne složene kapitalizacije prirodno se može proširiti na realne brojeve $t\in[0,nd]$ tako da se u prethodnoj jednakosti stavi da je $k=\frac{t}{d}$, odnosno da je $t=kd$. Tako dobivamo funkciju neprekidne složene kapitalizacije:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}_0\left(\left[1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{d})\right]^{\frac{1}{\boldsymbol{d}}}\right)^{\boldsymbol{t}} \quad . \tag{11}$$

Radi se o eksponencijalnoj funkciji, tj. eksponencijalna funkcija modelira neprekidnu složenu kapitalizaciju.

Napomena:

Dovoljno je znati izraze za neprekidnu kapitalizaciju jer se iz nje, uz supstituciju $t=kd$, dobiju izrazi za diskretnu kapitalizaciju kada je *k* prirodan broj, tj. kada je *t* višekratnik od *d*. Slijedi da je dovoljno razmatrati neprekidnu kapitalizaciju, a diskretna je samo njena restrikcija na realne brojeve *t* koji su višekratnici duljine razdoblja kamatne stope *d*.

Sve u svemu, dovoljno je promatrati neprekidnu kapitalizaciju kako je ovdje izvedena, a ukoliko nas zanima diskretna, samo se načini restrikcija funkcije $t\mapsto C(t)$ na diskretan skup $0,d,2d, ...,kd, ...,nd$, tj. za $t=kd$ gdje je $k=0,1,...,n$.

4.2. Ekvivalentne kamatne stope

Kamatne stope $\hat{i}(d_1)$ i $\hat{i}(d_2)$, odnosno $i(d_1)$ i $i(d_2)$, ekvivalentne su ako se njenom primjenom, za svaki *t*, dobije ista vrijednost kapitala $C(t)$.

Jednostavne kamatne stope $\hat{i}(d_1)$ i $\hat{i}(d_2)$ jednostavno su ekvivalentne ako vrijedi

$$\frac{\hat{i}(d_1)}{d_1}=\frac{\hat{i}(d_2)}{d_2} \quad . \tag{12}$$

Prema tome, za poznatu (zadanu) kamatnu stopu $\hat{i}(d_1)$ njoj *jednostavno ekvivalentna kamatna stopa* $\hat{i}(d)$, koja se odnosi na razdoblje duljine *d*, je $\hat{i}(d)=\hat{i}(d_1)\frac{d}{d_1}$.

Radi se o kamatnoj stopi koja je relativna zadanoj. Posljedično vrijedi da je $\hat{i}(1)=\hat{i}(d)\frac{1}{d}$.

Složene kamatne stope $i(d_1)$ i $i(d_2)$ složeno su ekvivalentne ako vrijedi

$$\left[1+i(d_1)\right]^{\frac{1}{d_1}}=\left[1+i(d_2)\right]^{\frac{1}{d_2}} \quad . \tag{13}$$

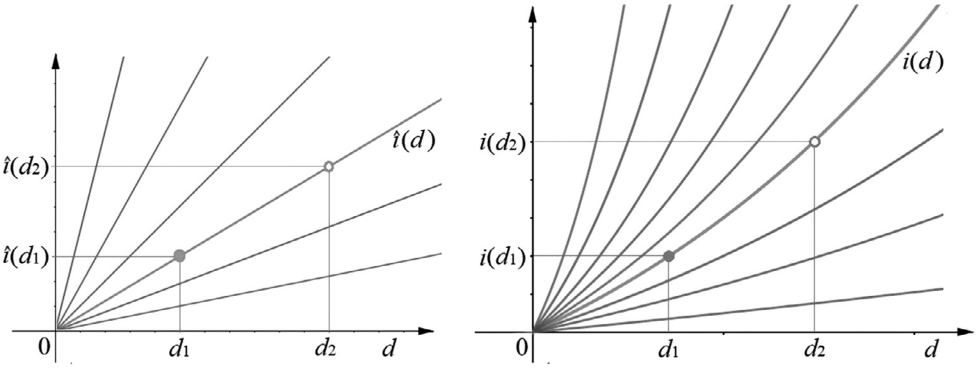
Prema tome, za poznatu (zadanu) kamatnu stopu $i(d_1)$ njoj *složeno ekvivalentna kamatna stopa* $i(d)$, koja se odnosi na razdoblje duljine *d*, je $i(d)=\left[1+i(d_1)\right]^{\frac{d}{d_1}}-1$. Radi se o kamatnoj stopi koja je konformna zadanoj. Posljedično vrijedi $i(1)=\left[1+i(d)\right]^{\frac{1}{d}}-1$.

Na opisani način, u slučaju definicije C, definirane su sljedeće funkcije:

$d\mapsto\left[\frac{\hat{i}(d_1)}{d_1}\right]d$ - *funkcija jednostavno ekvivalentnih kamatnih stopa* (Slika 1., lijevo),

$d\mapsto\left[\left(1+i(d_1)\right)^{\frac{1}{d_1}}\right]^{d}-1$ - *funkcija složeno ekvivalentnih kamatnih stopa* (Slika 1., desno).

Slika 1. prikazuje grafove funkcija jednostavno ekvivalentnih kamatnih stopa (lijevo) i složeno ekvivalentnih kamatnih stopa (desno) pri definiciji kamatne stope C. Svaka točka $\left(d,\hat{i}(d)\right)$ na lijevoj i svaka točka $\left(d,i(d)\right)$ na desnoj krivulji predstavlja kamatnu stopu. Sve točke na nekoj krivulji predstavljaju međusobno ekvivalentne kamatne stope. Svaka krivulja predstavlja klasu ekvivalencije kamatnih stopa definiranih definicijom C. Sada se kamatna stopa može smatrati i funkcijom $\hat{i}(d)$, odnosno funkcijom $i(d)$.



Slika 1. Grafovi funkcija jednostavno i složeno ekvivalentnih kamatnih stopa definiranih definicijom C

Derivacija funkcije ekvivalentnih kamatnih stopa za $d = 0$ naziva se brzina (intenzitet) kapitalizacije i označava s δ. Ona se pojavljuje u opisu procesa kapitalizacije diferencijalnom jednadžbom.

4.3. Diferencijalni modeli rasta

Model I - jednostavna kapitalizacija	**Model II** - složena kapitalizacija
$C'(t) = \delta C_0 \ , \quad C_0 = C(0)$	$C'(t) = \delta C_0 \ , \quad C_0 = C(0)$
$\mathbf{C(t) = C_0(1 + \delta_t)}$	$\mathbf{C(t) = C_0 e^{\delta t}}$
$\hat{i}(d) = \dfrac{C(t+d) - C(t)}{C_0} = \delta d$	$i(d) = \dfrac{C(t+d) - C(t)}{C(t)} = e^{\delta d} - 1$
$\delta = \hat{i}_d = \dfrac{\hat{i}(d)}{d} = \hat{i}(1)$	$\delta = \ln(1 + i(d))^{\frac{1}{d}} = \ln(1 + i(1))$

U slučaju modela II, tj. u slučaju složene kapitalizacije, često se intenzitet kapitalizacije δ poistovjećuje s efektivnom kamatnom stopom $i(1)$ ili nominalnom kamatnom stopom $i_{nom} = i_d$. Budući da je $\delta = \hat{i}_d = \hat{i}(1)$, u slučaju jednostavne kapitalizacije to je u redu. Međutim, u slučaju složene kapitalizacije, to je pogrešno ($\delta \neq i_d$ i $\delta \neq i(1)$).

Rješenje diferencijalne jednadžbe modela II je $C(t) = C_0 e^{\delta t}$, a ne $C(t) = C_0 e^{i(1) t}$ niti $C(t) = C_0 e^{i_d t}$. I ovdje se vidi da je prvo potrebno odrediti radi li se o jednostavnoj ili o složenoj kapitalizaciji, te onda primijeniti svojstva i jednakosti koje su svojstvene odabranom modelu kapitalizacije.

4.4. Definicija kamatnih stopa i odgovarajući izrazi konačne vrijednosti $C(t)$

Dovoljno je kamatnu stopu definirati za neprekidnu kapitalizaciju, kako je dano ispod, a uz transformaciju $t = kd$, $C(t) = C(kd) = C_k$, $k = 0, \ldots, n$ dobiju se definicije za slučaj diskretne kapitalizacije. Isto vrijedi i za vrijednost kapitala.

	Model I - **jednostavna kapitalizacija**		
	Kamatna stopa	Opis kamatne stope	Vrijednost kapitala $C(t)$
A	$\hat{i} = \dfrac{C(t+1) - C(t)}{C_0}$	Porast kapitala po jediničnom početnom kapitalu tijekom razdoblja jedinične duljine ($d = 1$). Kamatna stopa je broj $\hat{i}$, odnosno uređeni par $(1, \hat{i})$.	$C_0(1 + \hat{i}\, t)$

B	$\hat{i}_d = \dfrac{C(t+d)-C(t)}{C_0}\dfrac{1}{d}$	*Srednja brzina* promjene (prosječni linearni porast) kapitala po jediničnom početnom kapitalu u razdoblju duljine *d*. Naziva se i *nominalna kamatna stopa* i odnosi se na jedinično razdoblje. Kamatna stopa je uređeni par $(d, \hat{i}_d)$.	$C_0\left(1+\hat{i}_d\, t\right)$
C	$\hat{i}(d) = \dfrac{C(t+d)-C(t)}{C_0}$	Porast, *stopa rasta* kapitala po jediničnom početnom kapitalu u razdoblju duljine *d*. Kamatna stopa je uređeni par $(d, \hat{i})$, odnosno funkcija $\hat{i}(d)$.	$C_0\left(1+\left[\dfrac{\hat{i}(d)}{d}\right]t\right)$

Model II - **složena kapitalizacija**			
	Kamatna stopa	Opis kamatne stope	Vrijednost kapitala $C(t)$
A	$i = \dfrac{C(t+1)-C(t)}{C(t)}$	Porast jediničnog kapitala tijekom razdoblja jedinične duljine (d = 1). Kamatna stopa je broj *i*, odnosno uređeni par $(1, i)$.	$C_0(1+i)^t$
B	$i_d = \dfrac{C(t+d)-C(t)}{C(t)}\dfrac{1}{d}$	*Srednja brzina* promjene (prosječni linearni porast) jediničnog kapitala u razdoblju duljine *d*. Naziva se i *nominalna kamatna stopa* i odnosi se na jedinično razdoblje. Kamatna stopa je uređeni par (d, i_d).	$C_0\left[(1+d\, i_d)^{\frac{1}{d}}\right]^t$
C	$i(d) = \dfrac{C(t+d)-C(t)}{C(t)}$	Porast, *stopa rasta* jediničnog kapitala u razdoblju duljine *d*. Kamatna stopa uređeni je par (d, i), odnosno funkcija $i(d)$.	$C_0\left[(1+i(d))^{\frac{1}{d}}\right]^t$

5. Zaključak

Budući da su kamatna stopa i iznos kapitala u slučaju složene kapitalizacije različite veličine od onih za slučaj jednostavne kapitalizacije, prvo treba jasno odrediti promatra li se proces složene ili jednostavne kapitalizacije. Kamatna stopa definirana definicijom B očito je različita veličina od one definirane definicijom C. Tada se treba jasno odrediti koristi li se definicija kamatne stope B ili C. Kada se koristi definicija A, treba biti jasno radi li se u biti o definiciji B ili C u specijalnom slučaju kada je d = 1.

Relativna kamatna stopa isključivo je vezana uz jednostavnu, a konformna uz složenu kapitalizaciju. U praksi i stručnoj literaturu relativna se kamatna stopa koristi u složenom kamatnom računu, čime se račun nepotrebno komplicira, izvode se krive formule, izvlače krivi zaključci i gubi njegova jasnoća i jednostavnost. Primjer je općeprihvaćena, ali pogrešna formula neprekidne kapitalizacije. Primjenom ekvivalentnih kamatnih stopa pojednostavljuju se izračuni kamatnog računa i nestaje potreba za posebno isticanje i korištenje relativne, konformne, nominalne i efektivne kamatne stope, te sva složenost i upitnost njihovih primjena.

Nominalna kamatna stopa odnosi se na jedinično razdoblje. Ona nije konstanta i ovisi o duljini razdoblja na koje se primjenjuje. Nažalost, često se uzima da je ona konstanta, što dovodi do pogrešnog izvoda formule za neprekidnu kapitalizaciju koja se masovno koristi.

Diskretna i neprekidna kapitalizacija predstavljaju isti proces kapitalizacije. U prvoj je domena ekvidistantan diskretan, a u drugoj neprekidan skup realnih brojeva. Formula za neprekidnu kapitalizaciju identična je onoj za diskretnu, uz konverziju nezavisne varijable n u t, gdje je $t = nd$. Dakle, dovoljno je razmatrati i proučavati neprekidnu kapitalizaciju, pri čemu treba biti oprezan, i parametar δ, tj. brzinu neprekidne kapitalizacije, odnosno intenzitet kapitalizacije, u složenom diferencijalnom modelu ne poistovjetiti s kamatnom stopom i.

Literatura:

1. Benšić M., Benšić G. (2011.): Kamatni račun, Osječki matematički list, vol.11, br. 2, str. 113-126., 2011. (https://hrcak.srce.hr/80524)
2. Francišković D. (2020.): Dimensionless Characteristic of the Interest Rate, Proceedings of 4th Biennial International Conference „Contemporary Issues in Economy & Technology" CIET, May 29. - 30., 2020. Tonko Kovačević, Ivan Akrap (ur.), Split, Croatia: University of Split, Department of Professional Studies, 2020. p. 50-54.
3. Francišković D. (2020.): Gospodarska i financijska matematika, vlastito izdanje, Koprivnica (https://webknjizara.hr/?s=Gospodarska+i+financijska+matematika)
4. McCutcheon J.J., Scott W.F. (1994.): An Introduction to the Mathematics of Finance, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland, 1986, reprint 1994.
5. Muškardin V. (1985.): Suvremeni pristup financijskoj matematici, Ekonomska analiza 19 (1985.) 1, 75-99. (https://www.library.ien.bg.ac.rs/index.php/ea/article/view/884/728)