

Vizualizacija teorema maksimalne snage pomoću *Geogebra*

VATROSLAV ZUPPA BAKŠA¹ I ANDREA BEDNJANEC²

1. Uvod

Geogebra je interaktivna matematička aplikacija namijenjena učenju, ali i poučavanju matematike. Često se percipira kao alat koji se uglavnom primjenjuje u matematičkom obrazovanju. Međutim, *Geogebra* se može koristiti kao pomoćni alat i prilikom poučavanja tehničkih znanosti koje primjenjuju teorijske temelje prirodnih znanosti [1]. U ovom članku dan je konkretan primjer kako primijeniti *Geogebra* prilikom poučavanja **teorema maksimalne snage** koji nalazi primjenu u nekim područjima elektrotehnike.

Teorem maksimalne snage opisuje kako je snaga na trošilu spojenom na realni naponski ili realni strujni izvor maksimalna kad je iznos otpora trošila jednak iznosu unutarnjeg otpora izvora. U tom trenutku na trošilu se razvija točno polovica snage koju izvor daje u krug pa je stupanj korisnosti 50 % [2]. Primjere primjene ovog teorema nalazimo u telekomunikacijama, radiotehnici, elektronici i automatici [3] kad, na primjer, od signala male snage želimo izvući maksimalnu korisnu snagu kako bi prenesena informacija bila što bolje registrirana [4]. U području elektroenergetike kad proučavamo prijenos električne energije korisnost izvora od 50 % nije prihvatljiva [5] zato što korisnost treba biti što veća kako bi se električna energija prenosila uz što manje gubitke [6]. Analizom teorema maksimalne snage dolazimo da zaključka da maksimalna snaga na trošilu ne odgovara maksimalnoj korisnosti izvora te ovisno o tome trebamo voditi računa kad ćemo primjenjivati navedeni teorem. Kako bismo lakše sve navedene tvrdnje objasnili studentima, u *Geogebri* je moguće pomoću virtualnog istosmjernog strujnog kruga provesti određena mjerenja pomoću kojih možemo doći do svih navedenih zaključaka te rezultate mjerenja prikazati grafički.

Pomoću simulacije izrađene u *Geogebri*, a koja je opisana u nastavku ovog članka, studenti bi trebali intuitivno doći do odgovora na pitanje:

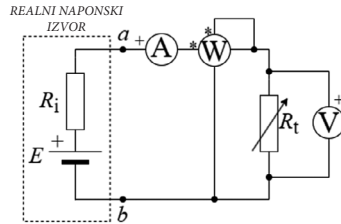
Za koju će vrijednost promjenjivog otpora trošila R_t snaga koju prima trošilo biti maksimalna te kolika će u tom slučaju biti korisnost izvora?

¹Vatroslav Zuppa Bakša, Tehničko veleučilište u Zagrebu

²Andrea Bednjaneć, Tehničko veleučilište u Zagrebu

2. Opis strujnog kruga

Za potrebe vizualizacije navedenog teorema virtualni strujni krug u *Geogebri* sastavljen je od realnog naponskog izvora koji se modelira parametrima E i R_i , pri čemu je E napon praznog hoda, a R_i unutarnji otpor realnog naponskog izvora koji stvara gubitke. Na priključnice a i b realnog naponskog izvora priključeno je trošilo promjenjiva otpora R_t te idealni mjerni instrumenti, ampermetar, voltmetar i vatmetar. Ampermetar služi za mjerenje jakosti električne struje kroz trošilo, voltmetar za određivanje pada napona na trošilu te vatmetar za mjerenje radne snage trošila. Shema opisanog strujnog kruga prikazana je Slikom 1.



Slika 1. Realni naponski izvor na čije je priključnice spojeno trošilo primjenjiva otpora R_t te idealni mjerni instrumenti

3. Modeliranje problema

Problem započinjemo modelirati pomoću definicije električne snage. Električna snaga jednaka je umnošku trenutne vrijednosti napona i struje, $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Kod istosmjernih strujnih krugova u stacionarnom stanju vrijednosti struje i napona su konstante pa se snaga na pojedinom aktivnom i pasivnom elementu određuje izrazom $P = U \cdot I$ ([2]). Na pasivnim elementima izraz za snagu moguće je pomoću Ohmovog zakona formulirati i kao $P = I^2 \cdot R$, te $P = \frac{U^2}{R}$.

Prema zakonu očuvanja energije vrijedi da je snaga koju izvor daje u krug jednaka iznosu snage koja se troši u krugu. Za strujni krug prikazan slikom 1. stoga vrijedi

$$P_{izvor} = P_i + P_t,$$

pri čemu je:

P_{izvor} – iznos snage koju izvor daje u krug,

P_i – iznos snage koja se troši na unutarnjem otporu realnog naponskog izvora,

P_t – snaga koja se troši na trošilu.

Ohmov zakon za strujni krug prikazan Slikom 1. definira se kao

$$I = \frac{E}{R_i + R_t}.$$

Pomoću Ohmovog zakona za strujni krug prikazan Slikom 1. te definicije električne snage možemo formulirati izraze za snage P_{izvor} , P_i i P_t :

$$P_{izvor} = \frac{E^2}{R_i + R_t}$$

$$P_i = \left(\frac{E}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_i$$

$$P_t = \left(\frac{E}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_t$$

Za vizualizaciju teorema maksimalne snage promatrat ćemo grafički prikaz funkcije $P_t(R_t)$ koja opisuje kako se mijenja ovisnost snage P_t koja se razvija na trošilu u ovisnosti o promjeni otpora R_t . S obzirom da se parametri realnog naponskog izvora ne mijenjaju, govorimo o funkciji jedne varijable:

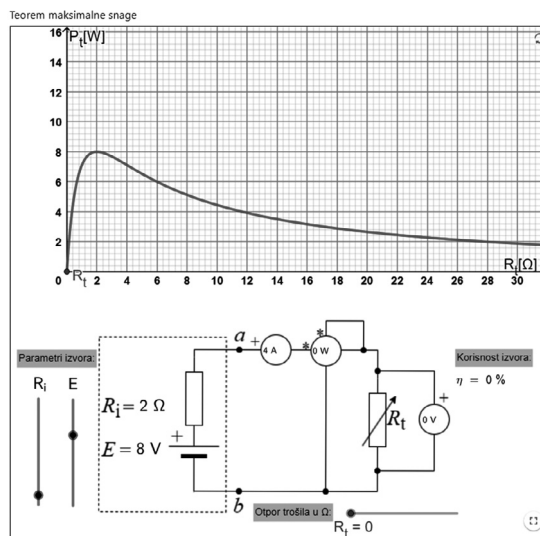
$$P_t(R_t) = \left(\frac{E}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_t$$

Korisnost realnog naponskog izvora određena je omjerom snage koja se razvija na trošilu i snage koju izvor daje u krug:

$$\eta = \frac{P_t}{P_{izvor}} = \frac{\left(\frac{E}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_t}{\frac{E^2}{R_i + R_t}} = \frac{R_t}{R_i + R_t}$$

4. Grafički prikaz funkcije $P_t(R_t)$ i izgled sučelja

Grafički prikaz funkcije $P_t(R_t)$ u *Geogebri* te izgled sučelja pomoću kojeg navodimo studente na zaključke o teoremu maksimalne snage dan je Slikom 2.



Slika 2. Grafički prikaz funkcije $P_t(R_t)$ i izgled sučelja

Simulaciji je moguće pristupiti putem linka <https://www.geogebra.org/m/c8cbrj2q> i pomoću QR koda prikazanog Slikom 3.



Slika 3. QR kod za pristup simulaciji

Parametre realnog naponskog izvora moguće je mijenjati pomoću crnih klizača u sljedećim intervalima:

- napon praznog hoda E može biti u intervalu od 0 do 12 V (s korakom 1),
- unutarnji otpor izvora R_i može biti u intervalu od 1 do 12 Ω (s korakom 1).

Otpor trošila R_t moguće je mijenjati pomoću crvenog klizača u intervalu od 0 do 30 Ω (s korakom 1).

Simulaciju koristimo tako da prvo postavimo željene parametre realnog naponskog izvora (E i R_i) koje potom više ne mijenjamo. Promjenom vrijednosti otpora trošila R_t pratimo na grafu funkcije $P_t(R_t)$ plavu točku koja nam pokazuje kako se mijenja iznos snage P_t u ovisnosti o odabranom R_t . Vrijednost snage P_t možemo očitati iz grafa ili pomoću mjernih instrumenata. Na vatmetru dobivamo direktno očitavanje snage. Do iznosa te snage možemo doći i ako očitamo vrijednosti koje pokazuju ampermetar i voltmetar te ih pomnožimo.

5. Analiza teorema maksimalne snage pomoću simulacije

Fiksiramo parametre realnog naponskog izvora primjerice na vrijednosti: $E = 8$ V i $R_i = 4$ Ω . Potrebno je zaključiti na koju vrijednost treba pomoću crvenog klizača namjestiti otpor trošila R_t tako da trošilo prima maksimalnu snagu te odrediti koliki je iznos te snage i kolika je u tom slučaju korisnost izvora.

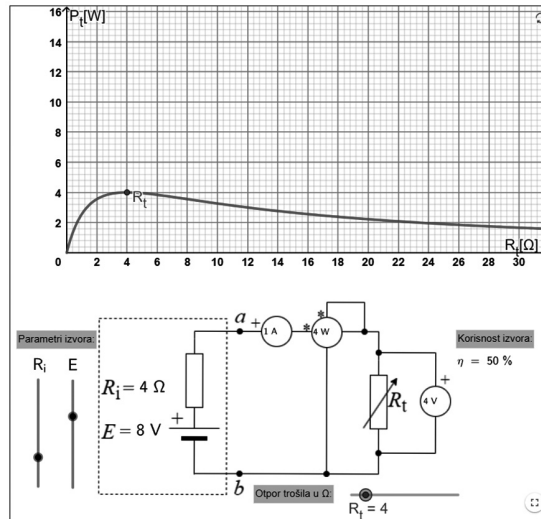
Vrijednosti otpora trošila R_t mijenjamo kako je prikazano Tablicom 1. te paralelno očitavamo vrijednosti na idealnim mjernim instrumentima.

Tablica 1. Promjena vrijednosti struje kroz trošilo, napona i snage na trošilu u ovisnosti o promjeni otpora trošila

| R_t / Ω | ampermetar | voltmetar | vatometar |
|----------------|-------------|-------------|-------------|
| | I / A | U / V | P_t / W |
| 0 | 2,00 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | 1,60 | 1,60 | 2,56 |
| 2 | 1,33 | 2,67 | 3,56 |
| 3 | 1,14 | 3,43 | 3,92 |
| 4 | 1,00 | 4,00 | 4,00 |

| | | | |
|----|------|------|------|
| 5 | 0,89 | 4,44 | 3,95 |
| 6 | 0,80 | 4,80 | 3,84 |
| 7 | 0,73 | 5,09 | 3,70 |
| 8 | 0,67 | 5,33 | 3,56 |
| 9 | 0,62 | 5,54 | 3,41 |
| 10 | 0,57 | 5,71 | 3,27 |
| 11 | 0,53 | 5,87 | 3,13 |
| 12 | 0,50 | 6,00 | 3,00 |
| 18 | 0,36 | 6,55 | 2,38 |
| 30 | 0,24 | 7,06 | 1,66 |

Iz tabličnog prikaza uočavamo kako se povećanjem vrijednosti promjenjivog otpora R_t vrijednost struje kroz trošilo smanjuje, a napon na trošilu povećava. Iznos snage povećava se sve dok vrijednost promjenjivog otpora ne postane jednaka unutarnjem otporu izvora ($R_t = R_i$). U tom slučaju trošilo prima maksimalnu snagu, tj. na grafu uočavamo da funkcija postiže maksimum (Slika 4.).



Slika 4. Za slučaj $R_t = R_i$ funkcija $P(R_t)$ poprima maksimalnu vrijednost

Prema izrazu za korisnost, u slučaju kad su otpor trošila i unutarnji otpor izvora jednaki $R_t = R_i$ vrijedi da je korisnost izvora 50 %, tj. snaga koju izvor predaje jednako se rasporedila na trošilo i na unutarnji otpor izvora koji predstavlja gubitke:

$$\eta = \frac{R_t}{R_i + R_t} = \frac{R_t}{R_t + R_t} = 0,5 = 50 \% .$$

Povećanjem otpora trošila nakon što su otpor trošila i unutarnji otpor izvora bili jednaki, iznos predane snaga trošilu se smanjuje, a korisnost izvora postaje sve veća i veća, što je i prikazano Tablicom 2.

Tablica 2. Tablični prikaz promjene snage P_t i korisnosti η izvora u ovisnosti o promjeni otpora R_t

| R_t / Ω | P_t / W | $\eta / \%$ |
|----------------|-------------|--------------|
| 0 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | 2,56 | 20,00 |
| 2 | 3,56 | 33,33 |
| 3 | 3,92 | 42,86 |
| 4 | 4,00 | 50,00 |
| 5 | 3,95 | 55,56 |
| 6 | 3,84 | 60,00 |
| 7 | 3,70 | 63,64 |
| 8 | 3,56 | 66,67 |
| 9 | 3,41 | 69,23 |
| 10 | 3,27 | 71,43 |
| 11 | 3,13 | 73,33 |
| 12 | 3,00 | 75,00 |
| 18 | 2,38 | 81,82 |
| 30 | 1,66 | 88,24 |

Na temelju podataka u Tablici 1. i Tablici 2. u *Geogebri* je moguće prikazati i grafove $U - R_t$, $I - R_t$ te $\eta - R_t$. S obzirom na to da je snaga definirana kao $P_t(R_t) = U(R_t) \cdot I(R_t)$, graf funkcije $P_t(R_t)$ moguće je dobiti i na temelju grafičkog prikaza funkcija $U(R_t)$ i $I(R_t)$ u istom koordinatnom sustavu.

6. Određivanje ekstrema funkcije $P_t(R_t)$

Dokazat ćemo da je snaga na trošilu spojenom na realni naponski izvor maksimalna u slučaju kad je iznos otpora trošila jednak iznosu unutarnjeg otpora izvora tako da odredimo ekstreme funkcije $P_t(R_t) = \left(\frac{E}{R_i + R_t}\right)^2 \cdot R_t$. Funkcija $P_t(R_t)$ definirana je na intervalu $R_t \in [0, +\infty >$.

Prva derivacija funkcije $P_t(R_t)$ je $P_t'(R_t) = \frac{E^2 \cdot (R_i - R_t)}{(R_i + R_t)^3}$.

Iz uvjeta $P_t'(R_t) = 0$ određujemo stacionarne točke. Rješenje jednadžbe

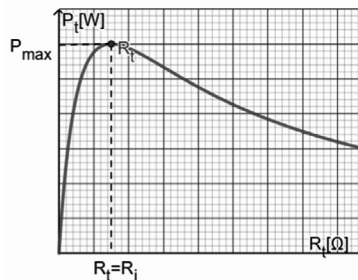
$$P_t'(R_t) = 0 \text{ je } R_t = R_i.$$

Određenom stacionarnom točkom $R_t = R_i$ područje definicije podijelimo na intervale monotonosti kao što je prikazano Tablicom 3. Provjerom predznaka prve derivacije određujemo jesu li oni intervali rasta ili intervali pada funkcije.

Tablica 3. Intervali monotonosti

| | 0 | R_i | $+\infty$ |
|----------------------|---|-------|-----------|
| predznak $P_t'(R_t)$ | | + | - |
| funkcija $P_t(R_t)$ | | ↗ | ↘ |

Funkcija na intervalu $R_t \in [0, R_i >$ raste. Funkcija na intervalu $R_t \in \langle R_i, +\infty \rangle$ pada. Kako funkcija lijevo od točke $R_t = R_i$ raste a desno pada, zaključujemo kako funkcija za $R_t = R_i$ postiže maksimum. Maksimum funkcije $P_t(R_t)$ je $P_{max} = \frac{E^2}{4 \cdot R_t}$. Funkcija $P_t(R_t)$ općenito je prikazana Slikom 5.

Slika 5. Grafički prikaz funkcije $P_t(R_t)$

7. Zaključak

U elektrotehnici često prilikom analiziranja različitih pojava u strujnim krugovima koristimo grafičke prikaze. U ovom je članku prikazano kako pomoću simulacije virtualnog pokusa u *Geogebra* i grafičkog prikaza dobivenog na temelju pokazivanja rezultata mjerenja idealnih mjernih instrumenata možemo navesti studente da zaključe kako je snaga na trošilu spojenom na realni naponski izvor maksimalna kad je iznos otpora trošila jednak iznosu unutarnjeg otpora izvora. Za taj je slučaj pokazano kako je korisnost izvora 50 %. Nakon što su studenti usvojili teorem maksimalne snage putem virtualnog pokusa, mogu ga ponoviti u elektrotehničkom laboratoriju te mjerenjima na stvarnoj opremi doći do istih zaključaka.

Literatura

1. Freiman V., Tassel J. L.: *Creativity and Technology in Mathematics Education*, Springer, Cham, 2018.
2. Blašković B., Dadić M., Pintar D., Randić M., Trkulja B., Vranić M.: *Osnove elektrotehnike*, Element, Zagreb, 2022.
3. B. Kuzmanović, *Osnove Elektrotehnike II*, Element, Zagreb, 2011.
4. Malešević Lj.: *Osnove elektrotehnike 2*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.
5. Tewari K. K.: *Electricity and Magnetism with Electronics*, S. Chand & Company Ltd., New Delhi, 2007.
6. Mohan N.: *Electric Power Systems: A First Course*, 1st Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2012.