STUDENTSKI RADOVI

Fermat-Torricellijeva točka

LANA CRNOBRNJA[1]

U ovome radu bavimo se Fermat-Torricellijevom točkom. Navodimo tri zadatka i primjenjujemo svojstva točke u praksi, fizici i natjecateljskoj geometriji.

Uvod

Kada u redovnoj nastavi proučavamo trokut, ortocentar, središte upisane i opisane kružnice te težište – nezaobilazni su pojmovi. Međutim, četiri karakteristične točke trokuta nisu jedini alat koji koristimo u rješavanju zadataka. Ovdje se upoznajemo s Fermat-Torricellijevom točkom, točkom za koju vrijedi da je zbroj udaljenosti od svih vrhova trokuta do nje same – najmanja moguća. Počinjemo s posebnim slučajem jednakostraničnog trokuta, gdje uočavamo da se u ovom slučaju Fermat-Torricellijeva točka (ili kraće, Fermatova točka) podudara sa sve četiri karakteristične točke danog trokuta. Zatim primjenjujemo svojstva Fermatove točke u fizici, gdje promatramo gravitacijsku potencijalnu energiju utega koji vise sa stola. Na kraju rješavamo nimalo jednostavan zadatak s IMO Shortlista iz 2002. godine.

Motivacijski zadatak

Zadatak 1. U selu Stipanići gradonačelnik je odlučio sagraditi novi restoran. Vlasnici triju kuća, koje su takve da je svaka od preostalih dviju udaljena pet kilometara, oduševljeni su idejom. Vlasnik restorana dogovara se s mjesnim odborom gdje će izgraditi restoran, a želio bi da udaljenost restorana od svake od kuća bude što manja kako bi ukupna cijena dostave za klijente bila najniža. Mjesni odbor ustvrdio je da se kao najpovoljnije mjesto za izgradnju treba izabrati ono za koje vrijedi da je zbroj udaljenosti toga mjesta do sve tri kuće najmanja. Gdje će se graditi restoran?

Rješenje. Uočimo da su kuće vrhovi jednakostraničnog trokuta. Prva je od druge i treće kuće udaljena pet kilometara, kao i druga od prve i treće, te treća od prve i druge.

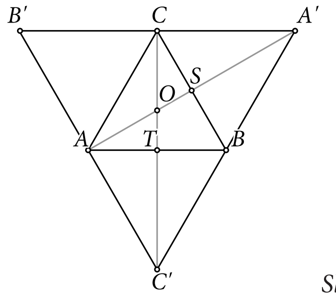
Označimo točke koje predstavljaju kuće redom s A, B i C. Sada se problem mjesta gradnje restorana svodi na sljedeći: za jednakostranični trokut ΔABC treba odrediti točku F takvu da zbroj njezinih udaljenosti od vrhova trokuta

$$|AF|+|BF|+|CF|$$

bude minimalan.

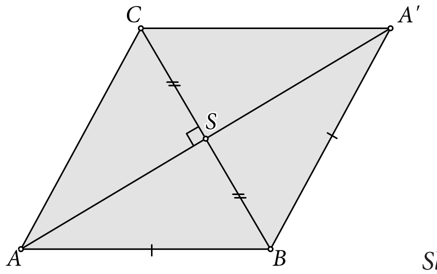
[1]Lana Crnobrnja, studentica Matematičkog odsjeka PMF-a, Sveučilište u Zagrebu

U rješavanju problema poslužit će nam sljedeći algoritam. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ konstruiramo tri jednakostranična trokuta prema van. Vrhove dobivenog trokuta označimo s *A'*, *B'* i *C'*, kao na Slici 1.



Slika 1.

Sva su četiri trokuta sa slike sukladna jer su im sve odgovarajuće stranice jednake duljine. Promotrimo četverokut *ABA'C* (Slika 2.). Sve su mu stranice sukladne, pa slijedi da je *ABA'C* romb. Tada zaključujemo da mu se dijagonale raspolavljaju, pa je kut između dijagonala pravi.



Slika 2.

Neka je točka *S* sjecište dijagonala. Budući da je $|BS| = |SC|$, *S* je polovište stranice $\overline{BC}$, odnosno $\overline{AS}$ je istovremeno težišnica, visina i simetrala kuta pri vrhu *A*, te simetrala stranice $\overline{BC}$.

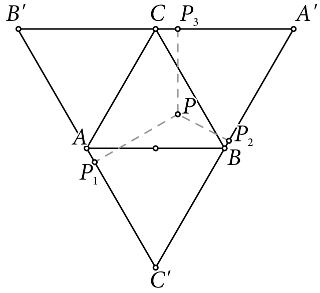
Neka je *T* sjecište dijagonala četverokuta *CAC'B*. Analogno slijedi da je *T* polovište stranice $\overline{AB}$. Označimo s *O* točku presjeka $\overline{AS}$ i $\overline{CT}$. Kako je trokut ΔABC jednakostraničan, *O* je istovremeno težište trokuta, ortocentar trokuta, te središte opisane i upisane kružnice trokutu ΔABC.

Pokazat ćemo da je upravo $O = F$, to jest da se među svim točkama *P*, minimum zbroja

$$|AP| + |BP| + |CP|$$

postiže za $P = O$.

Najprije uočimo da je trokut $\Delta A'B'C'$ jednakostraničan (sve duljine stranica jednake su dvostrukoj duljini stranica početnog trokuta) te da je *O* također i težište i ortocentar trokuta $\Delta A'B'C'$. Nadalje, $\overline{BC}$ je paralelno $\overline{B'C'}$ te analogno za ostale parove stranica. Označimo s a duljinu stranica trokuta $\Delta A'B'C'$ i s v duljinu njegovih visina. Neka je P proizvoljno odabrana točka unutar trokuta $\Delta A'B'C'$ te neka su P_1, P_2 i P_3 redom nožišta visina iz točke P na stranice $\overline{B'C'}$, $\overline{A'C'}$ i $\overline{A'B'}$ kao na Slici 3.



Slika 3.

Tada vrijedi da je

$$\begin{aligned} P(A'B'C') &= P(PB'C') + P(PA'C') + P(PA'B') \\ &= \frac{1}{2}a\,|PP_1| + \frac{1}{2}a\,|PP_2| + \frac{1}{2}a\,|PP_3| \\ &= \frac{1}{2}a\left(|PP_1| + |PP_2| + |PP_3|\right). \end{aligned}$$

Sada iz prethodne jednakosti i

$$P(A'B'C') = \frac{av}{2}$$

dobivamo

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| = v\,.$$

Drugim riječima, pokazali smo da za svaku točku P unutar trokuta $\Delta A'B'C'$ vrijedi da je zbroj njezinih udaljenosti do stranica trokuta konstantan i jednak visini trokuta.

Posebno to vrijedi i za točke P i O, odnosno

$$d(O,\overline{B'C'}) + d(O,\overline{A'C'}) + d(O,\overline{A'B'}) = |PP_1| + |PP_2| + |PP_3|\,.$$

S druge strane, pokazali smo da je $\overline{OA}$ okomito na $\overline{B'C'}$, zbog čega vrijedi $d(O,\overline{B'C'}) = |OA|$ i, analogno, $d(O,\overline{A'C'}) = |OB|$ i $d(O,\overline{A'B'}) = |OC|$.

Dakle,

$$|OA| + |OB| + |OC| = |PP_1| + |PP_2| + |PP_3|.$$

Kako je $\overline{PP_1}$ okomito na $\overline{B'C'}$, slijedi $|PP_1| \le |PA|$, i analogno, $|PP_2| \le |PB|$ i $|PP_3| \le |PC|$.

Konačno dobivamo

$$|OA| + |OB| + |OC| \le |PA| + |PB| + |PC|.$$

Kako je P bila proizvoljno odabrana točka, pokazali smo da mjesto izgradnje restorana treba biti upravo u točki O.

Fermat-Torricellijeva točka

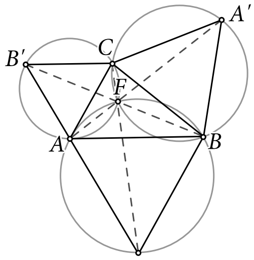
Rezimirajmo rezultat koji smo dobili u motivacijskom primjeru.

1. Za jednakostranični trokut cilj je bio naći točku za koju je zbroj udaljenosti od svih vrhova minimalan. Pokazali smo da se u ovom slučaju točka poklapa sa središtem jednakostraničnog trokuta.
2. U dokazu smo koristili sljedeću konstrukciju točke – nad stranicama trokuta konstruirali smo jednakostranične trokute. Dobiveni trokut bio je jednakostraničan, a tražena točka istovremeno je i središte tog novog jednakostraničnog trokuta.

U ovom ćemo poglavlju generalizirati problem na proizvoljni trokut. Dokaze tvrdnji nećemo navoditi. Mogu se naći u literaturi, a ideje dokaza dosta su slične onima koje smo ilustrirali za jednakostranični trokut.

Teorem 1. Neka je ΔABC proizvoljni trokut. Nad svakom njegovom stranicom konstruirajmo izvana jednakostranične trokute $\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ i $\Delta ACB'$. Tada pravci *AA'*, *BB'* i *CC'* prolaze istom točkom *F* i ta se točka naziva Fermat-Torricellijeva točka trokuta ΔABC.

Napomena 1. Opisana konstrukcija pripisuje se Fermatu. Torricelli je točku konstruirao na drukčiji način: može se pokazati da se kružnice opisane trokutima $\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ i $\Delta ACB'$ sijeku u jednoj točki koja je upravo *F*, kao što je i prikazano na Slici 4. Nadalje, središta tih kružnica čine jednakostranični trokut.



Slika 4.

Pitanje pronalaženja točke koja je najmanje udaljena od svih vrhova trokuta rješava sljedeći teorem.

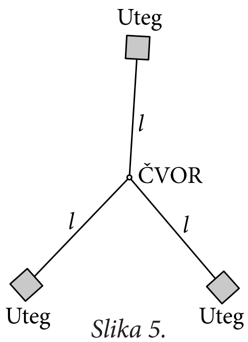
Teorem 2. *Neka je F Fermat-Torricellijeva točka trokuta ΔABC. Tada vrijedi:*

1. *Ako su svi kutovi trokuta ΔABC manji od* 120°, *onda se minimum zbroja udaljenosti točke od vrhova trokuta ΔABC postiže u F (i samo u F).*

2. *Ako je neki kut trokuta ΔABC veći ili jednak* 120°, *onda se minimum zbroja udaljenosti točke od vrhova trokuta ΔABC postiže u pripadnom vrhu.*

Zadatci

Zadatak 2. Tri utega mase povezana su konopima duljine *l* kao na Slici 5. Postavimo utege na trokutasti stol tako da utezi slobodno vise s rubova stola i tako da svakim vrhom stola prolazi po jedan konop. Nađite i opišite položaj utega u kojem je zbroj njihovih gravitacijskih potencijalnih energija najmanji.



Slika 5.

Rješenje. Za početak, promotrimo kako smo povezali utege. Uzmimo tri konopa i tri utega. Jedan kraj konopa svezat ćemo na uteg, a drugi ostaviti slobodnim. Nakon što smo svezali konope na sva tri utega, slobodne krajeve svakoga od tri konopa svezat ćemo u čvor.

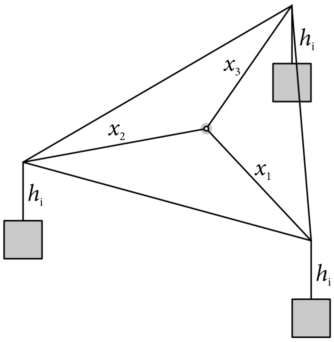
Postavimo utege na stol u bilo kojem položaju. Uočimo da je pitanje izbora položaja u potpunosti određeno izborom točke u koju ćemo staviti čvor. Duljinu dijela konopa koji visi sa stola označimo s h_i te s x_i dio konopa koji leži na stolu. Naravno, vrijedi

$$h_i + x_i = l\,.$$

Gravitacijska potencijalna energija jednoga utega računa se prema formuli

$$E_i = mg(H - h_i)\,,$$

gdje je E_i energija, m masa, g gravitacijska konstanta i H visina stola, odnosno udaljenost površine stola od zemlje.



Slika 6.

Sada je

$$\begin{aligned} E_{ukupna} &= \sum_{i=1}^{3} E_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} mg(H - h_i) \\ &= mg\sum_{i=1}^{3}(H - h_i) \\ &= mg\left(3H - \sum_{i=1}^{3} h_i\right) \\ &= mg\left(3H - \left(\sum_{i=1}^{3}(l - x_i)\right)\right) \\ &= mg\left(3H - \left(3l - \sum_{i=1}^{3} x_i\right)\right) \\ &= mg\left(3H - 3l + \sum_{i=1}^{3} x_i\right) \end{aligned}$$

Budući da su duljina konopa l i visina stola H konstantne, jedina veličina koja se mijenja upravo je zbroj dijelova konopa koji leže na stolu (o čemu ovise i duljine dijelova konopa koji vise sa stola).

Očito vrijedi

$$0 < \sum_{i=1}^{3} x_i < 3l ,$$

pa, iz posljednje jednakosti, za ukupnu potencijalnu energiju dobivamo

$$3mg(H-l) < E_{ukupna} < 3mgH ,$$

što su podosta grube ocjene.

Svakako je ukupna potencijalna energija najmanja točno onda kad je zbroj

$$\sum_{i=1}^{3} x_i$$

najmanji.

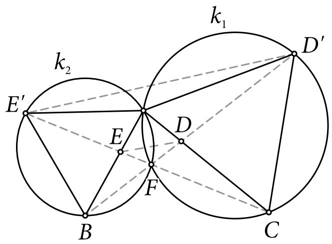
Taj je izraz upravo zbroj udaljenosti od vrhova trokuta do neke njegove unutarnje točke, te će poprimiti najmanju vrijednost kada se čvor, nastao vezanjem triju konopa, nalazi na onome mjestu na trokutastom stolu gdje je Fermatova točka toga trokuta.

Zadatak 3. (IMO Shortlist, 2002.). Neka je ΔABC šiljastokutan trokut, tako da u njegovoj unutrašnjosti leži Fermatova točka F. Neka pravci BF i CF redom sijeku dužine $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u točkama D i E. Dokažite da je

$$|AB| + |AC| \geq 4|DE| .$$

Rješenje. Promotrimo trokut ΔABC.

Neka su D' i E' točke izvan trokuta trokuta ΔABC takve da su trokuti $\Delta ABE'$ i $\Delta ACD'$ jednakostranični. Podsjetimo se da Fermatova točka F leži na presjeku pravaca BD' i CE'. Dakle, točke B, F, D i D' su kolinearne, te isto tako i točke C, F, E i E'.



Slika 7.

Nadalje, točka F leži na kružnicama k_1 i k_2 opisanima redom jednakostraničnim trokutima $\Delta ACD'$ i $\Delta ABE'$ (Slika 7.).

Nejednakost trokuta povlači

$$|E'A| + |AD'| \geq |D'E'| ,$$

pa je dovoljno dokazati

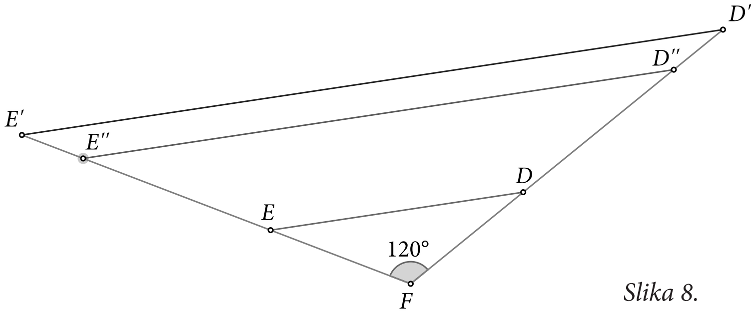
$$|D'E'| \geq 4|DE| .$$

Promotrimo homotetiju sa središtem u točki F i koeficijentom homotetije 4. Označimo s D'' točku u koju će se preslikati točka D, te s E'' točku u koju će se preslikati točka E.

Sada dokazujemo da vrijedi

$$|D'E'| \geq |D''E''| = 4|DE|.$$

Kako bi tvrdnja vrijedila, točka D'' mora se nalaziti na dužini $\overline{DD'}$ (Slika 8.), a E'' na dužini $\overline{EE'}$, pa se problem svodi na dokazivanje ovih dviju tvrdnji.



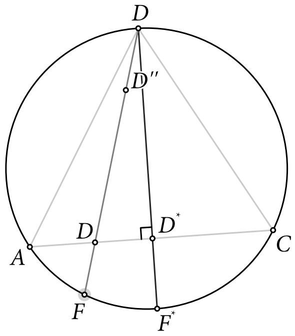
Slika 8.

Krenimo s prvom tvrdnjom. Ona će biti dokazana ako pokažemo da vrijedi

$$|DD'| \geq |DD''| = 3|DF|.$$

Neka je $\overline{D'D^*}$ visina na $\overline{AC}$ iz točke *D*. Produljimo pravac na kojemu leži visina do kružnice k_1, te sjecište označimo s F^*. Na tom pravcu leži i promjer kružnice k_1.

Naime, na pravcu sigurno leži visina trokuta $\Delta ACD'$ koji je jednakostraničan. Pravac na kojemu leži visina podudara se s pravcima na kojima leže i simetrala kuta, simetrala stranice i težišnica. Onda se na tom pravcu nalazi i središte opisane kružnice. Dakle, $\overline{D'F^*}$ je tetiva koja sadrži središte kružnice, što je po definiciji upravo promjer.



Slika 9.

Jasno je da vrijedi $|DD'| \geq |D'D^*|$ jer je visina najkraća udaljenost od vrha do njemu nasuprotne stranice. Budući da je $|D'F^*| \geq |D'F|$ i $|DD'| \geq |D'D^*|$, slijedi $|D^*F^*| \geq |DF|$, odnosno

$$3|D^*F^*| \geq 3|DF|.$$

Sada nam nedostaje veza između duljina visine $|D'D^*|$ i $|D'F^*|$, promjera jednakostraničnom trokutu $\Delta ACD'$ opisane kružnice. Označimo s *a* duljine stranica trokuta $\Delta ACD'$ i s *h* duljinu visina. Znamo da vrijedi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa je

$$a = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

Također, duljina polumjera opisane kružnice trokuta $\Delta ACD'$ jednaka je $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, pa je duljina promjera $D = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Sada uvrstimo a izražen preko h u formulu za promjer, pa dobivamo

$$D = \frac{4h}{3}.$$

Slijedi da je

$$|D^*F^*| = |D'F^*| - |D'D^*| = \frac{|D'D^*|}{3},$$

odnosno

$$|D'D^*| = 3|D^*F^*|.$$

Sada vrijedi da je

$$|DD'| \geq |D'D^*| = 3|D^*F^*| \geq 3|DF| = |DD''|.$$

Drugim riječima, pokazali smo da se točka D'' nalazi između točaka D i D' , na pravcu FD'.

Analogno se pokaže da se točka E'' nalazi između E i E' na pravcu FE'.

Tada je

$$|E''D''| < |E'D'|,$$

odnosno

$$|AB| + |AC| = |AE'| + |AD'| \geq |D'E'| \geq 4|DE|,$$

što je i trebalo dokazati.

Literatura

1. Bombardelli, M., Ilišević, D., Elementarna geometrija, PMF, Zagreb, 2007.
2. Kolić, M., Točke ekstrema nekih geometrijskih izraza vezanih uz trokut, PMF, Zagreb, 2020.
3. Michael de Villiers, *A generalization of the Fermat-Torricelli point*, The Mathematical Gazette, 79(485), 374-378, July 1995.
4. Fermatova točka, Matematika i škola 21, 2009.
5. Fermat point, https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point, (7. listopada 2021.)
6. Fermat Point - Physics Approach, https://www.youtube.com/watch?v=-hekdwoJWZm8, (6. listopada 2021.)
7. Fermat point, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Fermat_point, (6. listopada 2021.)
8. Inequality with Fermat Point, https://www.youtube.com/watch?v=y4xbbPPb5Ig, (7. listopada 2021.)
9. The Fermat Point and Generalizations, https://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml, (8. listopada 2021.)