Kosi hitac uvis i uvjeti gibanja, alternativno (2)

Ljiljana Sudar[1]

Pod povećalom

U [1] je pokazano da je putanja kosog hitca uvis parabola ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. da je gravitacijsko ubrzanje konstantno po intenzitetu, $g = \text{const.}$,

2. da se hitac giba kroz homogeno gravitacijsko polje i

3. da se hitac giba u jednoj ravnini.

Pritom *nisu* korištene formule za jednoliko i jednoliko usporeno/ubrzano gibanje već *samo graf brzine kosog hitca*. Ovi uvjeti su, zapravo, ograničenja pod kojima je putanja kosog hitca parabola. Pitanja koja se onda sama nameću (ali se ne razmatraju) su:

- Do koje se udaljenosti od površine Zemlje može smatrati da je $g = \text{const.}$?
- Ako je $g = \text{const.}$ unutar nekog područja, znači li to da je gravitacijsko polje Zemlje unutar njega homogeno? A obrnuto?
- Kako odrediti ravninu u kojoj se giba kosi hitac?
- Kako izgleda područje (naravno, iznad površine Zemlje) unutar kojeg se može smatrati da je gravitacijsko polje Zemlje homogeno i koje su njegove granice?

Činjenica je da je gravitacijsko polje Zemlje, zapravo, nehomogeno. U [2] je pokazano da se na gibanje kosog hitca mogu primijeniti Keplerovi zakoni koji su prilagođeni gibanju tijela oko Zemlje pa je stoga putanja kosog hitca uvis, dio *elipse* u čijem se jednom žarištu nalazi središte Zemlje. Zatim je na primjeru pokazano da se, ako se uzme da je putanja hitca najprije dio parabole, a potom i dio elipse, mogu izračunati vrijednosti za domet, vrijeme leta i maksimalnu visinu hitca za *male početne brzine* (znatno manje od brzina orbitiranja) koje se vrlo malo razlikuju, dok je za *velike početne brzine* (usporedive s brzinama orbitiranja) razlika velika. Otuda i pitanje:

- Kada se može putanja kosog hitca u gravitacijskom polju Zemlje promatrati i kao dio elipse i kao dio parabole, a kada se *mora* promatrati kao dio elipse?

I na kraju, ali ne manje važno:

- Ako se putanja hitca *mora* promatrati kao dio elipse, kada se smije koristiti $g = \text{const.}$, a kada se *mora* uzeti u obzir promjena intenziteta gravitacijskog ubrzanja s visinom tj. $g = g(H)$?

Da bi se našli odgovori na navedena pitanja, uvjeti gibanja kosog hitca su ovdje stavljeni *pod povećalo*.

Pođimo redom!

Znamo da je gravitacijska sila kojom Zemlja i tijelo uzajamno djeluju dana Newtonovim zakonom gravitacije: $F = \chi \dfrac{M \cdot m}{(R+H)^2}$, gdje su M, m, R, H i χ masa Zemlje, masa tijela, radijus Zemlje, udaljenost tijela od površine Zemlje i univerzalna gravitacijska konstanta, redom. Poznato je da je masa Zemlje $M = 5.9722 \cdot 10^{24}$ kg i da je njen srednji radijus $R = 6371$ km.

[1] Autorica je profesorica fizike u Leskovcu; e-pošta: `ljsudar@gmail.com`

Ta gravitacijska sila po II. Newtonovom zakonu daje tijelu mase m ubrzanje, tzv. gravitacijsko ubrzanje g:

$$F=\chi\frac{M\cdot m}{(R+H)^2}=mg \implies g=\chi\frac{M}{(R+H)^2}. \tag{1}$$

Da bi gravitacijsko ubrzanje bilo konstantno po intenzitetu, H mora biti zanemarivo u odnosu na R. Ali kada je to moguće?

Uobičajeno je da se jedna veličina može zanemariti u odnosu na drugu ako je ona bar dva reda veličine manja od nje. U ovom slučaju to je moguće ako je

$$H\leqslant\frac{R}{100}=\frac{6371\ \text{km}}{100}=63.71\ \text{km}=63\,710\ \text{m}.$$

Dakle, do visine $H_{\max}=63.71$ km može se uzeti da je intenzitet gravitacijskog ubrzanja g konstantan tj. $g=\text{const.}$

Nađimo brojčanu vrijednost za g do visine $H_{\max}$:

$$g=\chi\frac{M}{R^2}=6.67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5.9722\cdot10^{24}\ \text{kg}}{(6371\cdot10^3\ \text{m})^2}=9.81\ \text{m/s}^2.$$

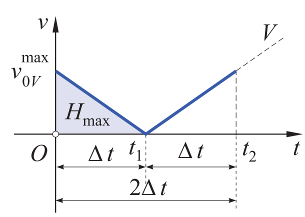
Pogledajmo sada što znači da je gravitacijsko polje homogeno i što to dalje povlači?

Znamo da je polje homogeno kada je vektor jačine polja u svim točkama prostora istog intenziteta, pravca i smjera pa su silnice polja međusobno paralelne. Vektor jačine gravitacijskog polja $\vec{G}$ u danoj točki prostora definira se preko gravitacijske sile $\vec{F}$, koja djeluje na tijelo mase m u danoj točki prostora, na sljedeći način: $\vec{G}=\dfrac{\vec{F}}{m}$. Omjer sile i mase tijela je po II. Newtonovom zakonu ubrzanje. U ovom slučaju nazivamo ga *gravitacijsko ubrzanje* i označavamo s $\vec{g}$. Očito je $\vec{G}=\dfrac{\vec{F}}{m}=\vec{g}$, pa će do visine $H_{\max}$ biti

$$g=G=\text{const.} \tag{2}$$

Da bi gravitacijsko polje Zemlje do visine $H_{\max}$ bilo homogeno, vektor jačine polja $\vec{G}$ u svim točkama prostora do visine $H_{\max}$ pored intenziteta mora imati isti pravac i smjer. Zato su silnice gravitacijskog polja Zemlje u onom dijelu prostora do visine $H_{\max}$, gdje je ono homogeno, ne samo okomite na površinu Zemlje (ona je ekvipotencijalna površina!) već su i međusobno *paralelne* što povlači da je odgovarajući dio površine Zemlje *ravan*. Obrnuto ne vrijedi. Gravitacijsko polje iznad *ravnog* dijela površine Zemlje može, ali i ne mora biti homogeno. Uzevši u obzir (2) bit će homogeno do visine $H\leqslant H_{\max}$, a nehomogeno za visine $H>H_{\max}$ jer je tada $g\neq\text{const.}\implies G\neq\text{const.}$

Pretpostavimo sada da se tijelo, izbačeno s površine Zemlje početnom brzinom $\vec{v}_0$ koso uvis u odnosu na površinu Zemlje, kreće u gravitacijskom polju Zemlje koje smatramo homogenim. To da je $g=\text{const.}$ do visine $H_{\max}=63.71$ km postavlja ograničenje na vertikalnu komponentu početne brzine hitca, $\vec{v}_{0V}$, jer tu komponentu brzine tijelo mora "potrošiti" do visine $H_{\max}$ da ne bi napustilo područje u kojem je polje homogeno. Da bismo odredili intenzitet te granične tj. maksimalne vertikalne komponente početne brzine hitca, $v_{0V}^{\max}$, crtamo graf brzine hitca u V-pravcu (slika 1).



Slika 1.

Nulti trenutak vremena na t-osi je trenutak izbačaja hitca, t_1, t_2, Δt i $2\Delta t$ su, redom, trenutak kada je tijelo "potrošilo" vertikalnu komponentu maksimalne početne brzine i našlo se na visini $H_{\max}$, trenutak pada hitca na površinu Zemlje, vrijeme penjanja/padanja i vrijeme leta hitca.

Iz nagiba pravca dobiva se intenzitet gravitacijskog ubrzanja

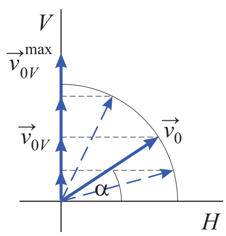
$$g = \frac{v_{0V}^{\max}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Prijeđeni put $H_{\max}$ je osjenčana površina trokuta ispod grafa brzine

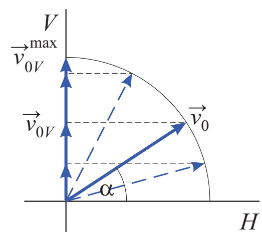
$$H_{\max} = \frac{v_{0V}^{\max} \cdot \Delta t}{2}. \tag{4}$$

Eliminacijom vremena penjanja, Δt, iz (3) i (4) dobiva se maksimalna vrijednost komponente početne brzine tijela u V-pravcu, $v_{0V}^{\max}$, koju tijelo može imati, a da pri gibanju ne izađe iz područja gdje je $g = \text{const.}$:

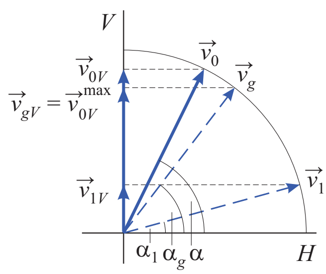
$$\begin{aligned} H_{\max} = \frac{(v_{0V}^{\max})^2}{2g} \implies v_{0V}^{\max} &= \sqrt{2gH_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 9.81\ \text{m/s}^2 \cdot 63\,710\ \text{m}} \\ &= 1118.029606\ \text{m/s} = 1.118029606\ \text{km/s}. \end{aligned}$$



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Na slikama 2 – 4 su $\vec{v}_0$, $\vec{v}_{0V}$ i $\vec{v}_{0V}^{\max}$, redom, početna brzina hitca, koji je izbačen pod kutom α s površine Zemlje, komponenta te početne brzine u V-pravcu i maksimalna komponenta početne brzine u V-pravcu koju hitac može imati, a da ne napusti homogeno gravitacijsko polje Zemlje. Sa slika se vidi da se s promjenom kuta izbacivanja mijenja intenzitet komponente početne brzine hitca u V-pravcu, v_{0V}.

Na slici 2 je $v_0 < v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s i $v_{0V} < v_{0V}^{\max}$ za sve vrijednosti kuta $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pa hitac ima konstantno ubrzanje $(g = \text{const.})$ sve vrijeme leta jer će "potrošiti" svoju brzinu u V-pravcu *prije* nego što dođe do granice područja, $H_{\max}$.

Na slici 3 je $v_0 = v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s i $v_{0V} < v_{0V}^{\max}$ za sve vrijednosti kuta $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, pa hitac ima konstantno ubrzanje $(g = \text{const.})$ sve vrijeme leta *bez obzira na kut pod kojim je izbačen s površine Zemlje* jer će hitac i u ovom slučaju "potrošiti" svoju brzinu u V-pravcu *prije* nego što dođe do granice područja, $H_{\max}$.

Na slici 4 su $\vec{v}_0$, $\vec{v}_g$ i $\vec{v}_1$ početne brzine hitca izbačenog s površine Zemlje pod kutom α, α_g i α_1, redom, pri čemu je

$$v_0 = v_g = v_1 \quad \text{i} \quad v_0 > v_{0V}^{\max} = 1.118029606\ \text{km/s}. \tag{5}$$

Kut α_g je najveći kut pod kojim se može izbaciti hitac s površine Zemlje početnom brzinom (na slici 4 je ona označena s $\vec{v}_g$), pri čemu ima *konstantno ubrzanje čitavo vrijeme leta*, jer je intenzitet njegove komponente početne brzine u V-pravcu $v_{gV} = v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s pa zato postaje nula na visini $H_{\max}$.

Odredimo sada najveći kut izbacivanja, α_g.

Uzevši u obzir relaciju (5) sa slike 4 se dobiva:

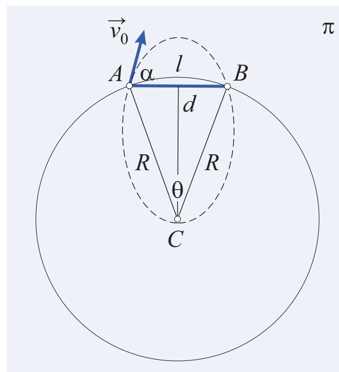
$$\sin\alpha_g = \frac{v_{gV}}{v_g} = \frac{v_{0V}^{\max}}{v_0} \implies \alpha_g = \arcsin\frac{1.118029606\ \text{km/s}}{v_0}. \tag{6}$$

Očito najveći kut izbacivanja ovisi od intenziteta početne brzine hitca tj. njene brojčane vrijednosti v_0.

Za kutove manje od α_g i za početnu brzinu npr. $\vec{v}_1$ (slika 4) hitac će do visine manje od $H_{\max}$ "potrošiti" svoju brzinu u V-pravcu, v_{1V}, jer je $v_{1V} < v_{0V}^{\max} = 1.118029606\ \text{km/s}$ i čitavo vrijeme leta će imati konstantno gravitacijsko ubrzanje po intenzitetu $(g = \text{const.})$. A za kutove veće od α_g i za danu početnu brzinu $\vec{v}_0$ (slika 4) hitac će, kada se nađe na visini $H_{\max}$, imati komponentu brzine u V-pravcu različitu od nule pa će se nastaviti udaljavati od Zemlje i ući u područje u kojem se intenzitet gravitacijskog ubrzanja mijenja s visinom hitca tj. u kojem je $g = g(H)$.

Što određuje ravninu kosog hitca? Kada možemo dio površine Zemlje smatrati ravnim?

Uzevši u obzir da je Zemlja spljoštena na polovima aproksimiramo je sferom *srednjeg* radijusa $R = 6371$ km. Neka je tijelo izbačeno s površine Zemlje iz točke A brzinom $\vec{v}_0$ i neka je poslije leta palo na nju u točki B (slika 5). Ravnina u kojoj se odvija gibanje tijela određena je pravcem vektora početne brzine tijela $\vec{v}_0$ i radijusom Zemlje koji odgovara točki A (dva pravca koji se sijeku definiraju ravninu!). Presjek te ravnine koju možemo označiti npr. s π i površine Zemlje, koja ima oblik sfere, je kružnica kojoj pripadaju točke A i B. Sve točke presjeka sferne površine Zemlje i ravnine π između točaka A i B nalaze se na luku $\overset{\frown}{AB}$. Ako je dio površine Zemlje ravan njen presjek s ravninom π je pravac (njega smo, pretpostavljajući to implicitno, ranije nazvali H-pravac) na kojoj su A (točka izbacivanja tijela) i B (točka pada tijela na površinu Zemlje) pa bi domet tijela, d, bila dužina $\overline{AB}$ tj. $d = |AB|$. Tako da pitanje kada se gravitacijsko polje Zemlje iznad dijela njene površine do visine $H_{\max}$ može smatrati homogenim $(\vec{g} = \vec{G} = \text{const.})$ svodi na pitanje kada se dio te površine Zemlje može smatrati ravnim što ima za posljedicu da se luk može aproksimirati tetivom? Da bismo našli odgovor na to pitanje koristit ćemo sliku 5.



Slika 5.

Središnji kut θ definira se relacijom

$$\theta = \frac{l}{R}. \tag{7}$$

Ako je on *mali* tj. ako je $\theta \leqslant 5^\circ$, tim prije je mali i kut $\frac{\theta}{2}$. Kako je za male kutove sinus blizak vrijednosti samog kuta, za θ i $\frac{\theta}{2}$ vrijedi:

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

Sa slike 5 je očito

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{R} = \frac{d}{2R}. \tag{9}$$

Uzevši u obzir (8) i (9) dobivamo:

$$\frac{\theta}{2} \approx \frac{d}{2R} \implies \theta \approx \frac{d}{R}. \tag{10}$$

Sada se iz (7) i (10) dobiva: $\frac{l}{R} \approx \frac{d}{R} \implies l \approx d \implies l - d \approx 0$, što znači da se luk i tetiva vrlo malo razlikuju kada je središnji kut θ mali, pa se *luk može aproksimirati tetivom.*

Dakle, kod malih kutova gubi se razlika između luka i tetive, pa se površina Zemlje može smatrati ravnom. Silnice gravitacijskog polja Zemlje su tada međusobno paralelne i, naravno, okomite na površinu Zemlje. Do visine $H_{\max}$ gravitacijsko polje Zemlje je tada homogeno, a putanja hitca u homogenom gravitacinom polju je *dio parabole.*

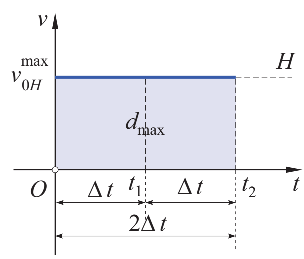
Uzevši u obzir (9), maksimalni domet kosog hitca u homogenom gravitacijskom polju je:

$$d_{\max} = 2R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6371 \text{ km} \cdot \sin\frac{5^\circ}{2} = 555.7982338 \text{ km}. \tag{11}$$

Ako je brojčana vrijednost komponente brzine u V-pravcu najveća moguća (hitac se kreće kroz područje u kojem je g konstantno) tj. $v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s, vrijeme "penjanja" dobiva se iz (3)

$$\Delta t = \frac{v_{0V}^{\max}}{g} = 113.9683594 \text{ s}. \tag{12}$$

Odredimo maksimalni iznos početne brzine hitca u H-pravcu kojom stižemo do granica područja u kojem silnice gravitacijskog polja možemo smatrati paralelnim. Njen iznos je konstantan jer gravitacijska sila nema komponentu u H-pravcu. Nacrtajmo graf brzine u H-pravcu (slika 6). Nulti trenutak vremena na t-osi je trenutak izbačaja hitca, t_1, t_2, Δt, $2\Delta t$ su, redom, trenutak kada je hitac dostigao visinu $H_{\max}$, trenutak pada, vrijeme penjanja/padanja i vrijeme leta hitca. Prijeđeni put u H-pravcu do granice područja u kojoj se silnice gravitacijskog polja još mogu smatrati međusobno paralelnim, $d_{\max}$, je $d_{\max}=2\Delta t \cdot v_{0H}^{\max}$.



Slika 6.

Uzevši u obzir relacije (11) i (12) intenzitet maksimalne komponente brzine u H-pravcu, $v_{0H}^{\max}$, je $v_{0H}^{\max} = \frac{d_{\max}}{2\Delta t} = \frac{555.7982338 \text{ km}}{2 \cdot 113.9683594 \text{ s}} = 2.438388324$ km/s.

Zaključak. *Gravitacijsko polje Zemlje može se smatrati homogenim do visine $H_{\max} = 63.71$ km i udaljenosti $d_{\max} = 555.7982338$ km od točke izbacivanja hitca. Ako su intenziteti komponenti početne brzine u H- i V-pravcu, $v_{0H} \leqslant 2.438388324$ km/s i $v_{0V} \leqslant v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s, redom, tada se hitac kreće kroz područje u kojem se gravitacijsko polje može smatrati homogenim pa se za putanju hitca može uzeti i* dio parabole, *ali i* dio elipse *(sjetimo se da je gravitacijsko polje Zemlje, zapravo, radijalno i vrijede modificirani Keplerovi zakoni za gibanje hitca, [2]), pri čemu je $g = 9.81$ m/s^2.*

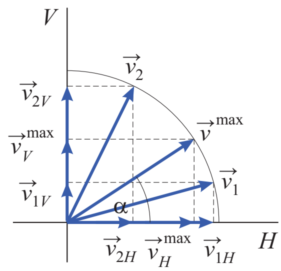
Domet, vrijeme leta, vrijeme penjanja i spuštanja hitca i maksimalna dostignuta visina tokom leta izračunati u oba slučaja neće se međusobno mnogo razlikovati.

Nađimo sada brojčanu vrijednost brzine, $v^{\max}$, s maksimalnim komponentama u H- i V-pravcu, redom tj.

$$v_H^{\max} = v_{0H}^{\max} = 2.438388324 \text{ km/s} \quad \text{i} \quad v_V^{\max} = v_{0V}^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}$$

$$v^{\max} = \sqrt{(v_{0H}^{\max})^2 + (v_{0V}^{\max})^2} = \sqrt{2.438388324^2 + 1.118029606^2} = 2.682485381 \text{ km/s}.$$

Kako se kreće hitac ako mu je početna brzina baš $v \equiv v^{\max} = 2.682485381$ km/s? Odgovor na to pitanje dobit ćemo sa slike 7, uzevši zaključak u obzir.



Slika 7.

Na slici 7 su $\vec{v}_2$, $\vec{v}^{\max}$ i $\vec{v}_1$ početne brzine tijela izbačenog pod različitim kutovima s površine Zemlje pri čemu je $v \equiv v_2 = v^{\max} = 2.682485381$ km/s $= v_1$, $v_H^{\max} = 2.438388324$ km/s i $v_V^{\max} = 1.118029606$ km/s. Hitac se kreće kroz homogeno gravitacijsko polje samo ako je izbačen pod kutom:

$$\alpha = \arcsin \frac{v_V^{\max}}{v^{\max}} = 24.63201032^\circ.$$

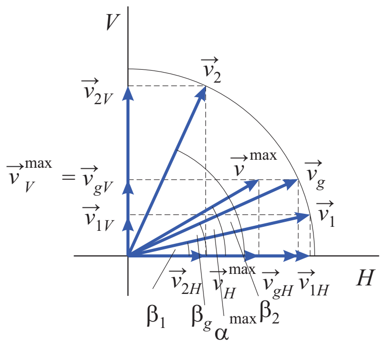
U tom slučaju se za putanju hitca može uzeti i dio parabole i dio elipse.

Za kutove manje od α $g = 9.81$ m/s^2 (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_1$). Sa slike 7 se vidi da je $v_{1H} > v_H^{\max}$ i hitac zalazi u područje gdje se silnice polja ne mogu više smatrati paralelnim, pa je gravitacijsko polje nehomogeno, ali je sve vrijeme leta hitac u području u kojem je $g = \text{const.}$ jer je $v_{1V} < v_V^{\max}$. Zato se *mora* uzeti da je putanja hitca dio elipse i da je $g = 9.81$ m/s^2

Za veće kutove α (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_2$) sa slike 7 se vidi da je $v_{1H} < v_H^{\max}$ pa će hitac sve vrijeme leta biti u području u kojem su silnice polja međusobno paralelne. Međutim, kako je $v_{2V} > v_V^{\max}$ hitac tokom leta zalazi u područje u kojem je $g \neq \text{const.}$ pa je polje nehomogeno i za putanju hitca se *mora* uzeti da je dio elipse i da je $g = g(H)$.

A ako je intenzitet početne brzine $v > v^{\max} = 2.682485381$ km/s?

Odgovor na to pitanje dobit ćemo sa slike 8 uzevši u obzir zaključak.



Slika 8.

Na toj slici su $\vec{v}_2$, $\vec{v}_g$ i $\vec{v}_1$ početne brzine tijela izbačenog s površine Zemlje pod kutom β_2, β_g i β_1 redom, pri čemu je $v_2 = v_g = v_1 \equiv v$, $v > v^{\max} = 2.682485381$ km/s što je sa slike 8 očito. Komponente brzina $\vec{v}_2$, $\vec{v}_g$ i $\vec{v}_1$ u H- i V-pravcu su, redom, $\vec{v}_{2H}$, $\vec{v}_{gH}$, $\vec{v}_{1H}$, $\vec{v}_{2V}$, $\vec{v}_{gV}$ i $\vec{v}_{1V}$ pri čemu je $v_{gV} = v_V^{\max} = v_{0V}^{\max} = 1.118029606$ km/s. Sa slike 8 se vidi:

$$\beta_g = \arcsin \frac{v_V^{\max}}{v_g} = \arcsin \frac{1.118029606 \text{ km/s}}{v},$$

$$v_{gH} > v_H^{\max} = 2.438388324 \text{ km/s} \qquad (13)$$

$$v_{gV} = v_V^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}. \qquad (14)$$

Ako je hitac izbačen pod kutom β_g, uzevši u obzir (13), (14) i zaključak, on se kreće kroz područje u kojem gravitacijsko polje Zemlje nije homogeno i zbog toga putanja hitca *ne može biti dio parabole već mora biti dio elipse pri čemu je* $g = 9.81$ m/s^2.

Ako je kut β pod kojim je tijelo izbačeno s površine Zemlje, $\beta < \beta_g$ (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_1$) sa slike 8 je, očito,

$$v_{1H} > v_H^{\max} = 2.438388324 \text{ km/s}, \qquad (15)$$

$$v_{1V} < v_V^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}. \qquad (16)$$

Uzevši u obzir zaključak, iz (15) slijedi da su silnice gravitacijskog polja Zemlje radijalne pa gravitacijsko polje nije homogeno u području gibanja tijela, a iz (16), da je $g = G = \text{const.}$ Zato putanja hitca *mora biti dio elipse pri čemu je* $g = 9.81$ m/s^2.

A ako je kut β pod kojim je tijelo izbačeno s površine Zemlje, $\beta > \beta_g$ (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_2$) sa slike 8 je, očito,

$$v_{2H} < v_H^{\max} = 2.415336507 \text{ km/s}, \tag{17}$$

$$v_{2V} > v_V^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}. \tag{18}$$

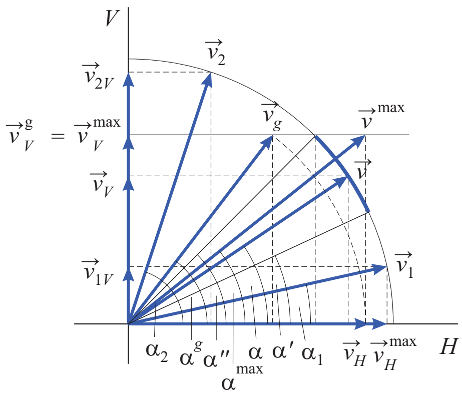
Uzevši u obzir zaključak, iz (17) slijedi da su silnice gravitacijskog polja Zemlje, u područja kroz koja se hitac kreće, približno paralelne. Da bi gravitacijsko polje bilo homogeno *mora* biti i intenzitet jačine gravitacijskog polja konstantan tj. $G = \text{const.}$ Iz (18) imamo da ono to nije jer tijelo zalazi u područje gdje je $g \neq \text{const.}$ pa kako je $g = G$ bit će $G \neq \text{const.}$ pa je u području gibanja tijela gravitacijsko polje Zemlje *nehomogeno*. Zato putanja hitca *mora biti dio elipse pri čemu je* $g = g(H)$.

Kakva je putanja hitca ako je intenzitet početne brzine v u intervalu

$(2.438388324 \text{ km/s}, 2.682485381 \text{ km/s})$?

Odgovor ćemo dobiti sa slike 9.

Na njoj su $\vec{v}_2$, $\vec{v}_g$, $\vec{v}^{\max}$, $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$ početne brzine tijela izbačenog s površine Zemlje pod kutom α_2, α^g, $\alpha^{\max}$, α i α_1 redom. S $\vec{v}_H$ i $\vec{v}_H^{\max}$ označene su komponente brzina $\vec{v}$ i $\vec{v}^{\max}$ u H-pravcu, redom, dok su komponente ostalih brzina samo naznačene točkicama, a s $\vec{v}_{2V}$, $\vec{v}_V^g$, $\vec{v}_V^{\max}$, $\vec{v}_V$ i $\vec{v}_{1V}$ označene su komponente brzina $\vec{v}_2$, $\vec{v}^g$, $\vec{v}^{\max}$, $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$ u V-pravcu, redom. Sa slike 9 je, očito, $v^g = v_H^{\max}$ $(= 2.438388324 \text{ km/s})$ i $v_V^g = v_V^{\max}$ $(= 1.118029606 \text{ km/s})$. Intenzitet brzine je $\vec{v}^{\max}$ je $v^{\max} = 2.682485381 \text{ km/s}$.



Slika 9.

Ako je tijelo izbačeno s površine Zemlje početnom brzinom $\vec{v}$ intenziteta v pod kutom manjim od α'' i većim od α', gibat će se kroz područje u kojem je gravitacijsko polje homogeno, jer je H-komponenta brzine tada manja ili jednaka $v_H^{\max}$ (pa će domet hitca biti manji od maksimalnog dometa za koji se silnice gravitacijskog polja još mogu smatrati paralelnima) i V-komponenta brzine manja ili jednaka $v_{0V}^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}$ (pa se hitac čitavo vrijeme leta kreće kroz područje u kojoj je $G = g = \text{const.}$) *i zato se za putanju hitca može uzeti da je i dio parabole i dio elipse* pa izračunati domet, maksimalnu visinu hitca i vrijeme leta u oba slučaja i usporediti dobivene vrijednosti. Razlike će postojati, ali neće biti velike.

Kutovi α' i α'' ovise o početnoj brzini hitca v. Sa slike 9 očito je da se mogu naći iz relacija:

$$\cos\alpha' = \frac{v_H^{\max}}{v} = \frac{2.438388324 \text{ km/s}}{v} \implies \alpha' = \arccos\frac{2.438388324 \text{ km/s}}{v},$$

$$\sin\alpha'' = \frac{v_V^{\max}}{v} = \frac{1.118029606 \text{ km/s}}{v} \implies \alpha'' = \arcsin\frac{1.118029606 \text{ km/s}}{v}.$$

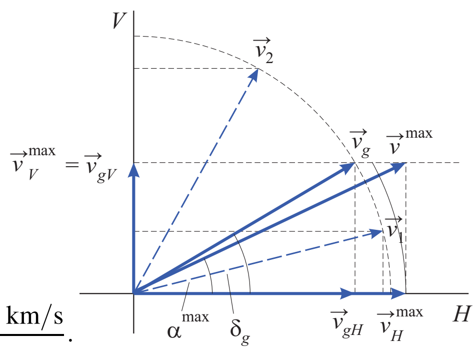
Ako je kut izbacivanja manji od α' (npr. kao kod brzine $\vec{v}_1$ na slici 9) tada je $v_{1H} > v_H^{\max} = 2.438388324 \text{ km/s}$ pa se gubi sličnost između luka i tetive i silnice gravitacijskog polja nisu međusobno paralelne. Samim tim otpada mogućnost da je gravitacijsko polje homogeno u području gibanja hitca. Zato se *ne smije* za putanju hitca koristi dio parabole, već se *mora* koristiti dio elipse. Dobra vijest je da se sve vrijeme hitac kreće kroz područje u kojem je intenzitet gravitacijskog ubrzanja $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ (jer je $v_{1V} < v_V^{\max} = 1.118029606 \text{ km/s}$).

Ako je kut izbacivanja veći od α'' H-komponenta brzine (npr. brzine $\vec{v}_2$ na slici 9) manja je od $v_H^{\max} = 2.438388324$ km/s, tetiva se neće razlikovati mnogo od luka, površina Zemlje se može smatrati ravnom i silnice gravitacijskog polja međusobno paralelnim. Kako je komponenta brzine u V-pravcu veća od $v_V^{\max} = 1.118029606$ km/s hitac će tokom leta napustiti područje u kojem je $g = \text{const.}$ i ući u područje u kojem se intenzitet gravitacijskog ubrzanja mijenja s visinom (kao i intenzitet jačine gravitacijskog polja, G, jer je $G = g$), pa gravitacijsko polje Zemlje ipak *nije* homogeno u području gibanja hitca pa se za njegovu putanju *ne smije* koristiti dio parabole već *isključivo* dio elipse pri čemu je $g = g(H)$. To dodatno komplicira računanje dometa, vremena leta i maksimalne visine hitca. Ako je hitac izbačen s površine Zemlje početnom brzinom intenziteta $v^g = 2.438388324$ km/s, pod kutom $\alpha \leqslant \alpha^g = \arcsin \dfrac{1.118029606}{2.438388324} = 27.29111265°$ (vidi sliku 9) gibat će se kroz *homogeno* gravitacijsko polje s ubrzanjem $g = 9.81$ m/s^2, pa se za putanju hitca može uzeti i dio parabole i dio elipse.

Ali, ako je hitac izbačen početnom brzinom intenziteta $v^g = 2.438388324$ km/s, s površine Zemlje pod kutom $\alpha > \alpha^g = \arcsin \dfrac{1.118029606}{v^g} = 27.29111265°$ (vidi sliku 9) gibat će se kroz gravitacijsko polje Zemlje čije su silnice, doduše, međusobno paralelne, ali je intenzitet gravitacijskog ubrzanja ovisan o visini tj. $g = g(H) \implies G = G(H)$ pa je polje nehomogeno i za putanju hitca se *mora* uzeti dio elipse.

Još preostaje vidjeti kakva je putanja hitca ako je intenzitet v njegove početne brzine, $\vec{v}$, u intervalu $(1.118029606 \text{ km/s}, 2.438388324 \text{ km/s})$.

Za to ćemo koristiti sliku 10. Na njoj su $\vec{v}_2$, $\vec{v}_g$ i $\vec{v}_1$ početne brzine hitca izbačenog s površine Zemlje pod različitim kutovima pri čemu je $v \equiv v_2 = v_g = v_1$, $v < v^{\max} = 2.682485381$ km/s. S $\vec{v}_{gH}$ i $\vec{v}_H^{\max}$ označene su komponente brzina $\vec{v}_g$ i $\vec{v}^{\max}$ u H-pravcu, redom, a s $\vec{v}_{gV}$ i $\vec{v}_V^{\max}$ komponente brzina $\vec{v}_g$ i $\vec{v}^{\max}$ u V-pravcu, redom, pri čemu je $v_H^{\max} = 2.438388324$ km/s i $v_V^{\max} = 1.118029606$ km/s. Sa slike 10 se vidi da za početnu brzinu intenziteta v *postoji* granični kut $\delta_g = \arcsin \dfrac{v_V^{\max}}{v_g} = \arcsin \dfrac{1.118029606 \text{ km/s}}{v}$.



Slika 10.

Uzevši u obzir zaključak, sa slike 10 je očito da se za granični kut δ_g i kutove *manje* od njega hitac kreće kroz područje u kojem je gravitacijsko polje *homogeno* (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_1$ na slici 10) pa se za putanju hitca *može* uzeti i dio parabole i dio elipse pri čemu je $g = 9.81$ m/s^2.

Za kutove *veće* od graničnog (npr. kao u slučaju brzine $\vec{v}_2$ na slici 10) hitac se kreće kroz područje u kojoj je gravitacijsko polje *nehomogeno* pa se za putanju hitca *mora* uzeti dio elipse pri čemu je $g = g(H)$.

Ostaje još definirati koje su početne brzine hitca *male*, a koje *velike*.

U [1] je pokazano da je putanja hitca parabola kada se hitac kreće kroz homogeno gravitacijsko polje Zemlje, a u [2] da se za male početne brzine izračunate vrijednosti za domet, vrijeme leta i maksimalnu dostignutu visinu hitca malo razlikuju kada se uzme da je putanja hitca najprije dio *parabole*, a potom dio *elipse*. To povlači da se za ***male početne brzine*** *hitac kreće samo kroz područje u kojem je gravitacijsko polje Zemlje homogeno pa se njegova putanja* ***može*** *promatrati i kao dio parabole i kao dio elipse.*

Za ***velike početne brzine*** *hitac tokom gibanja napušta homogeno gravitacijsko polje. Zato se njegova putanja* ***mora*** *promatrati kao dio elipse.*

Da bi sve bilo jednostavnije za primjenu, dana je tablica koja sadrži intenzitet početne brzine, kut izbacivanja hitca, α, granični kut, putanju hitca (parabola, elipsa) i intenzitet gravitacijskog ubrzanja, g.

Tablica.

početna brzina $\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$	**kut izbacivanja** $\alpha[°]$	**granični kut** $[°]$	**putanja**	g $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
$v_0 \leqslant 1.118029606$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	–	parabola i elipsa	9.81
$1.118029606 < v < 2.438388324$	$\alpha \in (0, \delta_g]$ $\alpha \in \left(\delta_g, \frac{\pi}{2}\right)$	$\delta_g = \arcsin \frac{1.118029606}{v}$	parbola i elipsa elipsa	9.81 $g(H)$
$v^g = 2.438388324$	$\alpha \in (0, \alpha^g]$ $\alpha \in \left(\alpha^g, \frac{\pi}{2}\right)$	$\alpha^g = \arcsin \frac{1.118029606}{v^g} = 27.29111265°$	parbola i elipsa elipsa	9.81 $g(H)$
$2.438388324 < v < 2.682485381$	$\alpha \in (0, \alpha')$ $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$ $\alpha \in \left(\alpha'', \frac{\pi}{2}\right)$	$\alpha' = \arccos \frac{2.438388324}{v}$ $\alpha'' = \arcsin \frac{1.118029606}{v}$	elipsa parabola i elipsa elipsa	9.81 9.81 $g(H)$
$v = 2.682485381$	$\alpha \in (0, \alpha_g)$ $\alpha = \alpha_g$ $\alpha \in \left(\alpha_g, \frac{\pi}{2}\right)$	$\alpha_g = \arcsin \frac{1.118029606}{v} = 24.63201032°$	elipsa parabola i elipsa elipsa	9.81 9.81 $g(H)$
$v > 2.682485381$	$\alpha \in (0, \beta_g]$ $\alpha \in \left(\beta_g, \frac{\pi}{2}\right)$	$\beta_g = \arcsin \frac{1.118029606}{v}$	elipsa elipsa	9.81 $g(H)$

Uzevši u obzir tablicu, početna brzina intenziteta $v_0 \leqslant 1.118029606$ km/s je *mala* i to bez obzira na kut izbacivanja hitca s površine Zemlje, dakle bezuvjetno. Početna brzina intenziteta $v_0 \in (1.118029606$ km/s, 2.438388324 km/s$]$ je *mala* samo ako se hitac izbaci s površine Zemlje pod kutom koji je manji ili jednak graničnom, δ_g, i definiran je početnom brzinom. Početna brzina intenziteta $v_0 \in (2.438388324$ km/s, 2.682485381 km/s$)$ je *mala* ako se tijelo izbaci s površine Zemlje pod kutom iz intervala čije granice definira ona sama (vidi tablicu), dok je početna brzina intenziteta $v_0 = 2.682485381$ km/s *mala*, samo ako se hitac izbaci s površine Zemlje pod kutom $24.63201032°$. Početna brzina $v_0 > 2.682485381$ km/s je *uvijek velika* bez obzira na kut izbacivanja hitca s površine Zemlje, dakle bezuvjetno. Putanja hitca s *velikom* početnom brzinom je isključivo dio elipse.

I na kraju, područje u kojem se gravitacijsko polje Zemlje (iznad njene površine) može smatrati *homogenim*, ima *oblik cilindra* (visine $H_{\max} = 63.71$ km, polumjera baze $r = d_{\max} = 555.7982338$ km) u čijem se *središtu donje baze nalazi točka izbacivanja hitca*.

Literatura

[1] LJ. SUDAR, *Kosi hitac i uvjeti gibanja, alternativno (1)*, Matematičko-fizički list, 295, 2024.

[2] M. UROIĆ, *Kosi hitac i Keplerovi zakoni*, Matematičko-fizički list, 265, 2016.