ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2024. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $2/298$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 278.

A) Zadatci iz matematike

3973. Ako je $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$ odredi najveću moguću vrijednost od $(x+y)^2$.

3974. Nađi sva pozitivna cjelobrojna rješenja jedadžbe

$$x^2y+y^2z+z^2x=3xyz.$$

3975. Odredi sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$3(x^2+y^2+z^2)=1$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=xyz(x+y+z)^3.$$

3976. Izračunaj vrijednost determinante

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & 1\\ b & c & a & 1\\ c & a & b & 1\\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

3977. Odredi sumu

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!.$$

3978. Dokaži da je trokut ABC sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ jednakostraničan ako i samo ako je

$$a\cos(\beta-\gamma)+b\cos(\gamma-\alpha)+c\cos(\alpha-\beta)=\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

3979. Niz a_n definiran je rekurzivno: $a_1=2$, $a_n=3a_{n-1}+1$ za $n\geq 2$. Odredi zbroj $a_1+a_2+\ldots+a_n$.

3980. Neka je O točka unutar paralelograma $ABCD$ tako da je $\sphericalangle AOB+\sphericalangle COD=\pi$. Dokaži da je $\sphericalangle OBC=\sphericalangle ODC$.

3981. Dokaži da od svih konveksnih četverokuta $ABCD$ sa zadanim duljinama stranica $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$, $|DA|=d$, najveću površinu ima onaj oko kojeg se može opisati kružnica, tj. ako je tetivni.

3982. Točka M je polovište luka $\overset{\frown}{AB}$ kružnice. Dokaži da za svaku točku N te kružnice vrijedi jednakost

$$\big||AM|^2-|MN|^2\big|=|AN|\cdot|BN|.$$

3983. Točka H je ortocentar trokuta ABC. Točka K je na CH tako da je ABK pravokutan trokut. Dokaži da je površina trokuta ABK geometrijska sredina površina trokuta ABC i ABH.

3984. Kružnica sa središtem O opisana je trokutu ABC, gdje je kut uz vrh A tupi. Radijus $\overline{AO}$ je pod kutem od 30° u odnosu na visinu $\overline{AH}$. Simetrala AF kuta $\sphericalangle CAB$ siječe kružnicu u točki L i radijus $\overline{AO}$ siječe $\overline{BC}$ u točki E. Izračunaj površinu četverokuta $OEFL$ ako je $|AL|=4\sqrt{2}$ cm i $|AH|=\sqrt{2\sqrt{3}}$ cm.

3985. Odredi pozitivan cijeli broj n takav da je $n^2+19n+48$ potpuni kvadrat.

3986. Neka su x, y, z realni brojevi takvi da je

$$\cos x+\cos y+\cos z=0$$
$$\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0.$$

Dokaži $\cos 2x\cos 2y\cos 2z\leq 0$.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 534. Marko grije vodu za čaj u kuhalu. Izmjerio je da kuhalu treba 4 min da zakuha litru vode početne temperature $18\,^\circ$C. Pročitao je da je korisnost kuhala 90 %. Kolika je snaga i električni otpor tog kuhala? Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 J/kgK, a napon električne gradske mreže je 230 V.

OŠ – 535. Ivan i Grga se utrkuju na stazi dugačkoj 300 m. Grga je viši i njegovi su koraci dugački 150 cm, a Ivanovi su 10 cm kraći. Grga napravi dva koraka u sekundi, a Ivan 132 koraka u minuti. Tko će od njih pobijediti u toj utrci i koliko će u trenutku ulaska u cilj biti udaljen od drugoplasiranog?

OŠ – 536. Učenici su dobili zadatak da odrede gustoću nepoznatog metala. Učiteljica im je dala komadić tog metala, vagu i čašu. Masu metala su lako odredili, iznosila je 55 g, ali čaša je bila prevelika za točno mjerenje tako malenog obujma. Smislili su drugi način. Napunili su čašu vodom do vrha, pažljivo je stavili na vagu i izvagali. Masa vode i čaše je iznosila 360 g. Nakon toga su čašu maknuli s vage i stavili u nju metal, tako da se dio vode prelio iz čaše. Nakon toga su je ponovo izvagali, te utvrdili da je masa vode, čaše i metala iznosila 407 g. Kolika je gustoća tog metala? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 537. Ispred sabirne leće se nalazi predmet visok 12 cm koji je od nje udaljen 40 cm. Njegova je slika na jednakoj udaljenosti s druge strane leće. Koliko će biti visoka slika predmeta ako ga se udalji od leće za 10 cm?

1840. Svjetlo na mobitelu radeći neprekidno isprazni bateriju za 4 sata. Korištenje Wi-Fi mreže bi ispraznilo bateriju za 10 sati, a rad ekrana za 6 sati. Koliko će trajati baterija ako stalno koristimo svjetlo, ekran i Wi-Fi?

1841. Kolica imaju fiksirane kotače tako da rade zavoj radijusa zakrivljenosti 4 m. Ako ih guramo u krug sve većom brzinom, ona će se prevrnuti ili prokliznuti. Na kojim bi se brzinama dogodilo prevrtanje ili proklizn uće, ako je koeficijent trenja kotača i podloge 0.7, a težište je na visini dvaput manjoj od duljine osovine? Uzeti $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

1842. Metalni kontejner ima površinu $50\ \mathrm{m^2}$. Vanjska temperatura je $5\ ^\circ\mathrm{C}$, a nutarnja $21\ ^\circ\mathrm{C}$. Koliku snagu treba imati grijalica koja u kontejneru održava temperaturu? Metal je tanak i dobro provodi toplinu, te možemo kontejner smatrati crnim tijelom.

1843. Oko planeta se giba satelit po eliptičnoj putanji. Kutna brzina orbitiranja mijenja se od 4 do 9 kutnih stupnjeva na sat. Odredi ekscentricitet putanje i ophodno vrijeme satelita u satima.

1844. Izotop $^{201}\mathrm{Tl}$ koji se koristi u dijagnostičkoj medicini ima vrijeme poluraspada 72.912 sati. Nakon koliko će sati aktivnost primljenog uzorka pasti na 100 Bq, ako je početna aktivnost bila 3000 Bq? Koliko je ukupno bilo radioaktivnih atoma u uzorku?

1845. Plankonveksna leća ima 3 puta veću žarišnu daljinu u vodi $(n = 1.33)$ nego u zraku. Odredi jačinu leće, ako je radijus zakrivljenosti dioptra 5 cm (drugi dioptar je ravan).

1846. Odredi gustoću planeta radijusa R ako satelit kruži na visini R iznad površine i ima ophodno vrijeme 6 sati.

C) Rješenja iz matematike

3945. *U dekadskom sustavu odredi posljednju znamenku broja*

$$23^{23^{23^{23}}}.$$

Rješenje. Redom imamo:

$$\begin{aligned}
23\cdot 23 &= 529 \equiv -1 \pmod{10}\\
23^{23} &= (23^2)^{11}\cdot 23 \equiv (-1)^{11}\cdot 23\\
&\equiv -23 \equiv 7 \pmod{10}\\
23^{23^{23}} &\equiv 23^7 = (23^2)^3\cdot 23 \equiv (-1)^3\cdot 23\\
&\equiv 7 \pmod{10}\\
23^{23^{23^{23}}} &= 23^7 \equiv 7 \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Posljednja znamenka je 7.

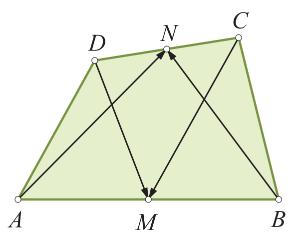
Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3946. *Neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$. Dokaži* $|AN|^2+|DM|^2+|BC|^2 = |BN|^2+|CM|^2+|AD|^2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&|AN|^2 + |DM|^2 + |BC|^2\\
&= \overrightarrow{AN}^2 + \overrightarrow{DM}^2 + \overrightarrow{BC}^2\\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2 + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM})^2\\
&\quad + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2\\
&= \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{DC}^2\\
&\quad + 2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2\\
&\quad + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} \\
&\quad + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}^2 \\
&\quad + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} \\
&\quad + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CM}) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} \\
&\quad + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CM}) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} \\
&\quad + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AM}) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 \\
&\quad + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AM}) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 \\
&\quad + 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{BN}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= |BN|^2 + |CM|^2 + |AD|^2.
\end{aligned}
$$



Duje Dodig (3), Zagreb

3947. *Dokaži da ne postoje različiti pozitivni cijeli brojevi a i b takvi da je $2a(a^2+3b^2)$ potpuni kub.*

Rješenje. Primijetimo da je

$$2a(a^2+3b^2) = (a+b)^3 + (a-b)^3.$$

Kada bi postojao broj $c \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$2a(a^2+3b^2) = c^3$$

tada bi, uz $x = a+b$, $y = a-b$, $c = z$, bilo

$$x^3 + y^3 = z^3, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_+.$$

Kako ova, Fermatova jednadžba nema rješenja, polazna pretpostavka nije istinita, tj. ne vrijedi tvrdnja zadatka.

Vid Horvat (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3948. *Ako su p i q rješenja kvadratne jednadžbe*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kako glasi kvadratna jednadžba čija su rješenja $ap+b$ i $aq+b$?

Rješenje. Vièteove formule za jednadžbu $ax^2+bx+c=0$ su:

$$p + q = -\frac{b}{a}$$
$$pq = \frac{c}{a}.$$

Jednadžba čija su rješenja $ap+b$ i $aq+b$ je:

$$(x-ap-b)(x-aq-b) = 0$$
$$x^2-aqx-bx-apx+a^2pq+abp-bx+abq+b^2 = 0$$
$$x^2-a(p+q)x-2bx+a^2pq+ab(p+q)+b^2 = 0$$
$$x^2-a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)x-2bx+a^2\cdot\frac{c}{a}$$
$$+ab\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b^2 = 0$$
$$x^2+bx-2bx+ac-b^2+b^2 = 0$$
$$x^2-bx+ac = 0,$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3949. *Ako je*

$$a = \log_{105} 294 \quad i \quad b = \log_{70} 21,$$

izrazi $x = \log_{14} 21$ pomoću a i b.

Rješenje.

$$a = \frac{\log_{14} 14 \cdot 21}{\log_{14} 5 \cdot 21} = \frac{\log_{14} 14 + \log_{14} 21}{\log_{14} 5 + \log_{14} 21} = \frac{1+x}{\log_{14} 5 + x}$$

$$\Longrightarrow \log_{14} 5 + x = \frac{1+x}{a} \tag{1}$$

$$b = \frac{\log_{14} 21}{\log_{14} 14 \cdot 5} = \frac{\log_{14} 21}{\log_{14} 14 + \log_{14} 5} = \frac{x}{1 + \log_{14} 5}$$

$$\Longrightarrow 1 + \log_{14} 5 = \frac{x}{b} \tag{2}$$

Oduzmemo (1) od (2):

$$1-x=\frac{x}{b}-\frac{1+x}{a} \quad \Big/ \cdot ab$$

$$ab-abx=ax-b(1+x)$$

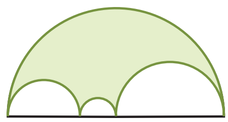
$$b+ab=ax+abx-bx$$

$$x(a+ab-b)=b+ab$$

$$x=\frac{b+ab}{a+ab-b}.$$

Vid Horvat (4), Zagreb

3950. *Na slici je prikazan lik koji se sastoji od četiri polukružnice čiji su polumjeri različiti cijeli brojevi. Ako je opseg lika* 18π*, a njegova površina* $k\pi$*, gdje je* k *prost broj, odredi* k*.*

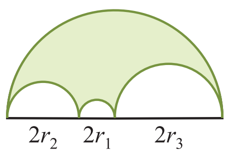


Rješenje. Neka je $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Imamo iz uvjeta zadatka:

$$2r_1+2r_2+2r_3=2r_4$$

$$r_1\pi+r_2\pi+r_3\pi+r_4\pi=18\pi$$

$$\frac{r_4^2\pi}{2}-\frac{r_1^2\pi}{2}-\frac{r_2^2\pi}{2}-\frac{r_3^2\pi}{2}=k\pi.$$



$$r_1+r_2+r_3=r_4$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4=18$$

$$r_4^2-r_1^2-r_2^2-r_3^2=2k.$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi $r_4 = 9$ pa je sustav ekvivalentan sustavu:

$$r_1+r_2+r_3=9$$

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=81-2k.$$

Iz prve jednadžbe, zbog $r_1 < r_2 < r_3$ imamo trojke: $(1,2,6)$, $(1,3,5)$ i $(2,3,4)$.

Jedina trojka koja zadovoljava drugu jednadžbu je $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$, a da je pritom k prost broj. Tada je $k = 23$.

Duje Dodig (3), Zagreb

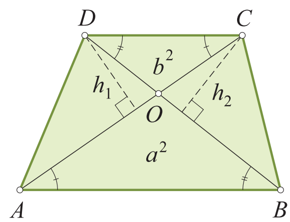
3951. *Dijagonale trapeza* $ABCD$ $(AB\|CD)$ *sijeku se u točki* O*. Odredi površinu trapeza ako su površine trokuta* ABO *i* CDO *redom jednake* a^2 *i* b^2*?*

Rješenje. Vidimo da je

$$\triangle ABO \sim \triangle CDO$$

i imamo:

$$\frac{|AO|}{|OC|}=\frac{|BO|}{|OD|}=\frac{a}{b}.$$



Još je:

$$\frac{P_{\triangle AOD}}{P_{\triangle OCD}}=\frac{\frac{1}{2}|AO|\cdot h_1}{\frac{1}{2}|OC|\cdot h_1}=\frac{|AO|}{|OC|}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{P_{\triangle BOC}}{P_{\triangle OCD}}=\frac{\frac{1}{2}|BO|\cdot h_2}{\frac{1}{2}|OD|\cdot h_2}=\frac{|BO|}{|OD|}=\frac{a}{b},$$

$$\begin{aligned}P&=P_{\triangle AOB}+P_{\triangle AOD}+P_{\triangle BOC}+P_{\triangle CDO}\\&=a^2+\frac{a}{b}\cdot P_{\triangle OCD}+\frac{a}{b}\cdot P_{\triangle OCD}+b^2\\&=a^2+\frac{a}{b}\cdot b^2+\frac{a}{b}\cdot b^2+b^2\\&=(a+b)^2.\end{aligned}$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3952. *Dan je konveksan tetivan četverokut kod kojeg je* $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$ *i* $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle BAC$*. Dokaži* $|BC|+|CD|=|AC|$*.*

Rješenje. Iz svojstva tetivnog četverokuta je:

$$3\alpha+3\beta=180^\circ$$

$$\alpha+\beta=60^\circ.$$

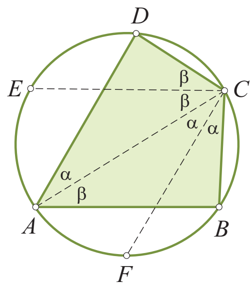
Koristimo sinusov poučak za $\triangle ACD$ i $\triangle ABC$:

$$\frac{|AC|}{\sin[180^\circ-(\alpha+2\beta)]}=\frac{|CD|}{\sin\alpha}$$

$$\Longrightarrow\ |CD|=\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}|AC|$$

$$\frac{|AC|}{\sin[180^\circ-(2\alpha+\beta)]}=\frac{|BC|}{\sin\beta}$$

$$\Longrightarrow\ |BC|=\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin(120^\circ-\alpha)}|AC|.$$



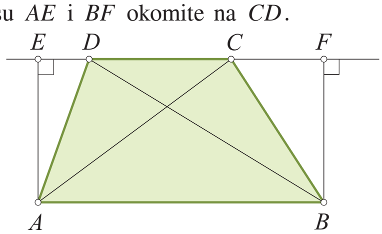
Sada je:

$$\begin{aligned}
&|CD|+|BC|\\
&=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin(120^\circ-\alpha)}\right)|AC|\\
&=\left(\frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}\right)|AC|\\
&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}|AC|\\
&=|AC|.
\end{aligned}$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3953. *Dokaži da je u trapezu zbroj kvadrata dijagonala jednak zbroju kvadrata neparalelnih stranica uvećan za dvostruki produkt paralelnih stranica.*

Prvo rješenje. Neka su E, $F\in CD$ takve da su AE i BF okomite na CD.



U trokutima ACD i BCD koristimo kosinusov poučak pa imamo:

$$\begin{aligned}
|AC|^2&=|AD|^2+|CD|^2\\
&\qquad-2|AD|\cdot|DC|\cdot\cos\sphericalangle CDA\\
&=|AD|^2+|CD|^2+2|DE|\cdot|CD|\\
|BD|^2&=|BC|^2+|CD|^2\\
&\qquad-2|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\sphericalangle BCD\\
&=|BC|^2+|CD|^2+2|CF|\cdot|CD|.
\end{aligned}$$

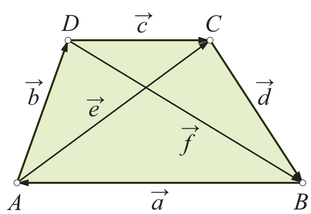
Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&|AC|^2+|BD|^2\\
&=|AD|^2+|BC|^2\\
&\quad+2|CD|(|DE|+|CD|+|CF|)\\
&=|AD|^2+|BC|^2+2|AB|\cdot|CD|.
\end{aligned}$$

Ur.

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}
&\vec a+\vec b+\vec c+\vec d=\vec 0\\
&\vec b+\vec d=-(\vec a+\vec c)\\
&\vec e=\vec b+\vec c=-(\vec a+\vec d)\\
&\vec f=\vec c+\vec d=-(\vec a+\vec b)
\end{aligned}$$



Odavde je:

$$\begin{aligned}
(\vec e-\vec f)^2&=(\vec b-\vec d)^2\\
&=\vec b^2-2\vec b\cdot\vec d+\vec d^2
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
2\vec e\cdot\vec f&=2(\vec a+\vec d)(\vec a+\vec b)\\
&=2\cdot[\vec a^2+\vec a(\vec b+\vec d)+\vec b\cdot\vec d]\\
&=2\cdot[\vec a^2-\vec a(\vec a+\vec c)+\vec b\cdot\vec d].
\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
e^2+f^2&=b^2-2\vec b\cdot\vec d+d^2+2a^2-2a^2\\
&\qquad-2\vec a\cdot\vec c+2\vec b\cdot\vec d\\
&=b^2+d^2-2\vec a\cdot\vec c
\end{aligned}$$

$$= b^2 + d^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 180^\circ$$
$$= b^2 + d^2 + 2ac.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3954. *Za stranice a, b, c nedegeneriranog trokuta ABC vrijedi $b^2 = ca + a^2$ i $c^2 = ab + b^2$. Odredi kutove trokuta.*

Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica i α, β, γ kutovi $\triangle ABC$. Neka je $a < b < c$ i $\alpha < \beta < \gamma$. Promatrajmo prvi uvjet $b^2 = ca + a^2$. Iz kosinusovog poučka imamo

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta.$$

Dobivamo

$$ca = c^2 - 2ca\cos\beta$$

i

$$\frac{c}{a} - 2\cos\beta = 1.$$

Iz sinusovog poučka dobivamo

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} - 2\cos\beta = 1$$

odakle je

$$\sin\gamma - 2\cos\beta\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - 2\cos\beta\sin\alpha = \sin\alpha$$

ili

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\alpha.$$

Dakle, $\beta = 2\alpha$.

Na sličan način iz $c^2 = ab + b^2$ dobivamo $\gamma = 2\beta$. Dakle, $\gamma = 2\beta = 4\alpha$, odakle je

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \quad \beta = \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \frac{4\pi}{7}.$$

Ur.

3955. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\sin^7 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^7 x + \frac{1}{\cos^3 x}.$$

Rješenje. Imamo

$$\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\cos^3 x} = \cos^7 x - \sin^7 x$$

$$\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sin^3 x\cos^3 x} = \cos^7 x - \sin^7 x.$$

Sada imamo dva slučaja:

1) $\cos x - \sin x = 0 \implies x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ili $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x - \sin x \neq 0 \implies$

$$\frac{\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x\sin^3 x}$$
$$= \cos^6 x + \cos^5 x\sin x + \cos^4 x\sin^2 x$$
$$+ \cos^3 x\sin^3 x$$
$$+ \cos^2 x\sin^4 x + \cos x\sin^5 x + \sin^6 x.$$

Supstitucijom $t = \cos x\sin x$ dobivamo:

$$\cos^4 x + \sin^4 x$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x$$
$$= 1 - 2t^2,$$
$$\cos^6 x + \sin^6 x$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$\cdot (\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x)$$
$$= 1 - 3t^2.$$

Uvrštavanjem u gornju jednakost imamo

$$\frac{1+t}{t^3} = 1 + t - 2t^2 - t^3$$
$$1 = -t^6 - 2t^5 + t^4 + t^3 - t.$$

No, $|t| = \left|\dfrac{\sin 2x}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pa imamo

$$|-t^6 - 2t^5 + t^4 + t^3 - t|$$
$$\leqslant \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{49}{64} < 1$$

pa jednadžba nema drugih rješenja.

Duje Dodig (3), Zagreb

3956. *Nađi sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi*

$$|z - 2| = 2 \quad i \quad arg\left[(z-2)^6 \cdot (\overline{z} - 2)^2\right] = \frac{3\pi}{2}.$$

Rješenje. Iz drugog uvjeta je:

$$\arg[(z-2)^6 \cdot (\overline{z}-2)^2] = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arg(z-2)^6 + \arg(\overline{z}-2)^2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$6\arg(z-2) + 2 \cdot \arg(\overline{z-2}) = \frac{3\pi}{2}$$

$$6\arg(z-2) + 2 \cdot (2\pi - \arg(z-2)) = \frac{3\pi}{2}$$

$$6\arg(z-2) + 4\pi - 2\arg(z-2) = \frac{3\pi}{2}$$

$$4\arg(z-2) = -\frac{5\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4\arg(z-2)=\frac{3\pi}{2}$$
$$\arg(z-2)=\frac{3\pi}{8}.$$

Iz trigonometrijskog zapisa imamo:

$$z-2=|z-2|\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$\Longrightarrow\ z=2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)+2$$
$$=2\cdot\left[\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\frac{3\pi}{8}\right]$$
$$=2\cdot\left(2\cos^2\frac{3\pi}{16}+i\cdot 2\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}\right)$$
$$=4\cdot\cos\frac{3\pi}{16}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right).$$

Dobili smo kompleksan broj z koji zadovoljava uvjete zadatka. Koristeći formule

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\quad\text{i}\quad\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

možemo ga zapisati i u algebarskom obliku. Lako nađemo

$$\cos\frac{3\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$$
$$\sin\frac{3\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$$

i potom

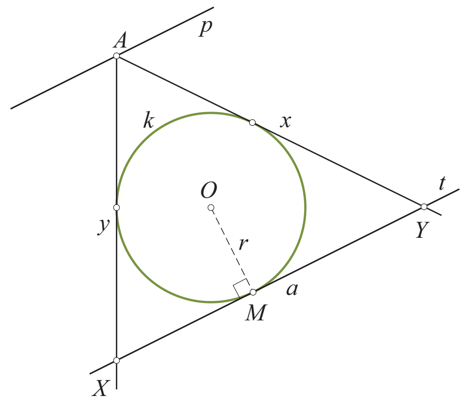
$$z=2+\sqrt{2-2\sqrt{2}}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\cdot i.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3957. *Dana je kružnica k i tangenta t u točki M te kružnice. Iz proizvoljne točke A na pravcu p koji je paralelan s t i ne siječe kružnicu, povučene su tangente na danu kružnicu koje sijeku travac t u točama X i Y. Dokaži da vrijednost umnoška $|XM|\cdot|YM|$ ne ovisi o izboru točke A.*

Rješenje. Imamo dva moguća slučaja.

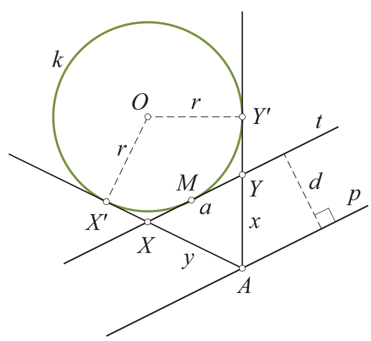
1) Neka se tangenta t i pravac p nalaze s različitih strana kružnice k. Tada je kružnica k upisana trokutu AXY.



Označimo kao na slici $|AX|=y$, $|AY|=x$ i $|XY|=a$. Neka je P površina $\triangle AXY$, $s=\dfrac{x+y+a}{2}$ njegov poluopseg, r polumjer dane kružnice k te d udaljenost među pravcima t i p. Sada je

$$|XM|\cdot|YM|=(s-x)(s-y)=\frac{P^2}{s(s-a)}$$
$$=\frac{P}{s}\cdot\frac{P}{s-a}=r\cdot\left(\frac{s-a}{P}\right)^{-1}$$
$$=r\cdot\left(\frac{s}{P}-\frac{a}{P}\right)^{-1}$$
$$=r\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{d}\right)^{-1}$$
$$=\frac{r^2 d}{d-2r}=\text{const.}$$

2) Neka su u ovom slučaju pravci t i p s iste strane kružnice k. Sada je kružnica k pripisana $\triangle AXY$.



$$|AX'| = |AY'| = s = \frac{x+y+a}{2},$$
$$|XM| = |XX'| = s-y,$$
$$|YM| = |YY'| = s-x.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
|XM| \cdot |YM| &= (s-x)(s-y) = \frac{P^2}{s(s-a)}\\
&= \frac{P}{s-a} \cdot \frac{P}{s} = r \cdot \left(\frac{s}{P}\right)^{-1}\\
&= r \cdot \left(\frac{s-a+a}{P}\right)^{-1}\\
&= r \cdot \left(\frac{s-a}{P} + \frac{a}{P}\right)^{-1}\\
&= r \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{d}\right)^{-1}\\
&= \frac{r^2 d}{d+2r} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Ovime smo tvrdnju dokazali u oba moguća slučaja.

Duje Dodig (3), Zagreb

3958. *Dokaži da je determinanta*

$$\begin{vmatrix}
\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\
\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}
\end{vmatrix}$$

jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\beta) + \sin(\alpha-\gamma)\right).$$

Rješenje. Razvijanjem determinante po prvom stupcu je:

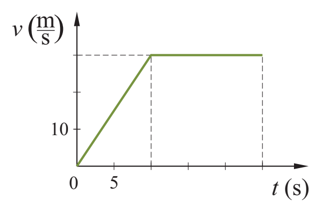
$$\begin{aligned}
D = {}&\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\end{vmatrix}\\
&-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\end{vmatrix}\\
&+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\right.\\
&\qquad\left.-\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\\
&\quad-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\right.\\
&\qquad\left.-\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&\quad+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right.\\
&\qquad\left.-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\\
&\quad+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\gamma-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\gamma)\\
&= \frac{1}{2}(\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\beta) + \sin(\alpha-\gamma)).
\end{aligned}$$

Duje Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 526. *Dio gibanja automobila tijekom testne vožnje je prikazan v-t grafom. Koliko mora biti dugačka staza za testiranje, ako pretpostavimo da vozaču treba 60 metara da sigurno zaustavi automobil?*



Rješenje.

$t_1 = 10$ s

$t_2 = 15$ s

$v = 30$ m/s

$s_{\text{zaustavni}} = 60$ m

$d = ?$

U prvom je dijelu gibanja automobil jednoliko ubrzavao, a u drugom se gibao jednoliko pravocrtno.

$$a = \frac{v}{t_1}$$

$$a = \frac{30 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$s_1 = \frac{at^2}{2} = 150 \text{ m}$$

$$s_2 = vt_2 = 30 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ s} = 450 \text{ m}$$

$$d = s_1 + s_2 + s_{\text{zaustavni}}$$

$$= 150 \text{ m} + 450 \text{ m} + 60 \text{ m} = 660 \text{ m}.$$

Staza za testiranje mora biti dugačka barem 660 m.

Ana Lakoš (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 527. *Marko je za zadaću trebao odrediti faktor trenja za kontakt drvo-drvo, ali mu je njegova sestrica potrgala dinamometar kojim je trebao mjeriti silu trenja. Nije znao ni masu kvadra iz pribora za fiziku koji je trebao vući. Izmjerio je da mu duljina iznosi 20, širina 10 i visina 4 cm. U tablicama je našao podatak da je gustoća drva oko 700 kg/m*^{3}*. Učvrstio je nepomični kolotur na stol i na jednu stranu objesio maslac mase 250 g, a na drugu kvadar koji je ostao na stolu. Kad je pustio maslac da pada sa stola kvadar se nije gibao jednoliko, ubrzavao je, pa je na njega dodao jednu čokoladu od 100 g. Nakon toga je gibanje kvadra, kojeg je preko koloture vukao padajući maslac, bilo jednoliko. Koliki je faktor trenja Marko izračunao?*

Rješenje.

$a = 20$ cm

$b = 10$ cm

$c = 4$ cm

$\rho = 700 \text{ kg/m}^3$

$m_{\text{m}} = 250$ g

$\underline{m_{\text{č}} = 100 \text{ g}}$

$\mu = ?$

$$V = abc$$

$$= 0.2 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 0.04 \text{ m} = 0.0008 \text{ m}^3$$

$$m_{\text{k}} = V\rho$$

$$= 0.0008 \text{ m}^3 \cdot 700 \text{ kg/m}^3 = 0.56 \text{ kg}$$

$$G_{\text{m}} = m_{\text{m}}g$$

$$= 0.25 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 2.5 \text{ N} = F_{\text{tr}}$$

$$m_{\text{k+č}} = 0.66 \text{ kg}$$

$$G_{\text{k+č}} = 6.6 \text{ N} = F_{\text{p}}$$

$$\mu = \frac{F_{\text{tr}}}{F_{\text{p}}} = \frac{2.5 \text{ N}}{6.6 \text{ N}} = 0.38.$$

Faktor trenja je $\mu = 0.38$.

Lara Džubur Krajinović (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 528. *Brzi vlak treba oko 4 sata i 20 minuta da prijeđe udaljenost između Zagreba i Rijeke koja iznosi 229 km. Kineski vlakovi koji postižu brzine od 350 km/h udaljenost između Pekinga i Šangaja prolaze za prosječno 5 sati. Udaljenost između ta dva kineska grada iznosi 1300 km. Koliko su puta brži kineski vlakovi od hrvatskih?*

Rješenje.

$t_1 = 4$ h 20 min

$s_1 = 229$ km

$t_2 = 5$ h

$\underline{s_2 = 1300 \text{ km}}$

$\dfrac{v_2}{v_1} = ?$

$$v_{\text{H}} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{229 \text{ km}}{4.33 \text{ h}} = 52.85 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_{\text{K}} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{1300 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 260 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{v_{\text{K}}}{v_{\text{H}}} = \frac{260 \text{ km/h}}{52.85 \text{ km/h}} = 4.92.$$

Kineski vlakovi su 4.92 puta brži od hrvatskih.

Ana Lakoš (8), Zagreb

OŠ – 529. *Elena želi uravnotežiti polugu dugačku 55 cm pomoću dva utega različitih masa. Kad je na oprugu objesila uteg A izmjerila je da se ona produljila 8 cm. S utegom B produljenje je iznosilo 14 cm. Utege je objesila na krajeve poluge. Koliko oslonac treba biti udaljen od utega A? Masa poluge je zanemariva.*

Rješenje.

$$l = 55 \text{ cm}$$
$$\Delta l_A = 8 \text{ cm}$$
$$\underline{\Delta l_B = 14 \text{ cm}}$$
$$k_A = ?$$
$$\Delta l \sim F$$
$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{8 \text{ cm}}{14 \text{ cm}}$$
$$F_A = \frac{4}{7} F_B$$
$$F_A \cdot k_A = F_B \cdot k_B$$
$$\frac{4}{7} F_B \cdot k_A = F_B \cdot (55 \text{ cm} - k_A)$$
$$\frac{11}{7} k_A = 55 \text{ cm}$$
$$k_A = 35 \text{ cm}.$$

Oslonac mora biti udaljen od utega A 35 cm.

Lara Džubur Krajinović (8), Zagreb

1826. *Raspon brzine kojom se planet Mars giba oko Sunca je od 21 972 km/s do 26 500 km/s. Odredi pomoću Keplerovih zakona ekscentricitet putanje, ophodno vrijeme, te najmanju udaljenost Marsa od Zemlje, ako je Zemljina putanja kružnica radijusa 1 aj oko Sunca i ravnine orbitiranja Zemlje i Marsa se poklapaju.* $1 \text{ aj} = 149.6 \cdot 10^6$ *km.*

Rješenje. Omjer zadanih brzina određuje numerički ekscentricitet e:

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1+e}{1-e},$$
$$\frac{26.5}{21.972} = \frac{1+e}{1-e},$$
$$e = 0.093415.$$

Brzina kružne putanje v_0 je geometrijska sredina zadanih brzina,

$$v_0 = \sqrt{v_{\max} v_{\min}}$$
$$= \sqrt{26.5 \cdot 21.972} = 24.13 \text{ km/s},$$

što daje

$$v_0 = 5.09018 \text{ aj/god}.$$

Duljina velike poluosi je

$$a = \frac{4\pi^2}{v_0^2} = 1.52367 \text{ aj}.$$

Prema trećem Keplerovom zakonu,

$$T = \sqrt{a^3} = 1.8808 \text{ godina}.$$

Mars je najbliže Suncu (i potencijalno Zemlji) u perihelu,

$$r_{min} = a(1-e) = 1.3813 \text{ aj}$$

pa je najmanja udaljenost do Zemlje

$$d_{\min} = r_{\min} - 1 = 0.3813 \text{ aj} = 57.05 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Ur.

1827. *Planet mase* 10^{24} *kg ima atmosferu mase* 10^{18} *kg. Koliki je tlak atmosfere na površini planeta, ako je njegova prosječna gustoća 4200* kg/m^3 *?*

Rješenje. Radijus planeta izračunamo iz mase i gustoće:

$$V = \frac{m}{\rho} = 2.381 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$
$$r = 3844.92 \text{ km}.$$

Odatle je ubrzanje sile teže na površini

$$g = \frac{Gm}{r^2} = 4.5145 \text{ m/s}^2.$$

Tlak na površini jednak je omjeru težine zraka i površine,

$$p = \frac{m_{\text{atm}} g}{4\pi r^2} = 24\,301.2 \text{ Pa}.$$

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1828. *Kolika je prosječna snaga kočenja, ako je automobil kočio s brzine* 54 km/h *do zaustavljanja uz zaustavni put od* 20 m*? Masa automobila je 1600 kg.*

Rješenje. Kočenje se odvija prosječnom akceleracijom $(\Delta v = -15 \text{ m/s})$

$$a = \frac{-v^2}{2s} = \frac{-15^2}{40} = -5.625 \text{ m/s}^2.$$

Vrijeme kočenja iznosi

$$t = \frac{-v}{a} = 2.6667 \text{ s}.$$

Snaga je

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{m(-a)s}{t} = \frac{180\,000}{2.6667} = 67\,500 \text{ W}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

1829. *Tijelo mase 4 kg dignuto je 25 km s površine Zemlje. Kolika je pogreška ako potencijalnu energiju računamo u homogenom gravitacijskom polju jačine $g = 9.81\ m/s^2$ u odnosu na polje iste jakosti na površini Zemlje koje pada s kvadratom udaljenosti? Uzeti da je Zemlja kugla radijusa 6371 km.*

Rješenje. U homogenom polju potencijalna je energija

$$W_0 = mgh = 4 \cdot 9.81 \cdot 25\,000 = 981\,000\ \text{J}.$$

Ako uzmemo da iznos g vrijedi samo na površini, a na visini h je

$$g(h) = g \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

imamo potencijalnu energiju

$$\begin{aligned} W &= mgh\frac{R}{R+h} \\ &= 981\,000 \cdot \frac{6371}{6396} = 977\,166\ \text{J}. \end{aligned}$$

Pogreška je

$$\delta = \frac{W_0 - W}{W_0} = 0.39\ \%$$

ili

$$W_0 - W = 3834\ \text{J}.$$

Ur.

1830. *Radioizotop srebra ^{106}Ag ima vrijeme poluživota 24 min. Ako je u nekom trenutku izmjerena aktivnost 1500 Bq (raspada u sekundi), kolika će biti aktivnost i broj neraspadnutih atoma nakon 3 sata?*

Rješenje. Aktivnost se, kao i broj atoma, mijenja prema izrazu

$$A(t) = A_0 \cdot 2^{-t/T},$$

gdje je A_0 početna aktivnost, a T vrijeme poluživota izotopa. Imamo

$$A(3h) = 1500 \cdot 2^{-180/24} = 8.29\ \text{Bq}.$$

U svakom trenutku t broj neraspadnutih atoma je proporcionalan aktivnosti,

$$\begin{aligned} N(t) &= A(t)\frac{T}{\ln 2} \\ &= 8.29 \cdot 24 \cdot \frac{60}{\ln 2} \\ &= 17\,222\ \text{atoma}. \end{aligned}$$

Ur.

1831. *Koju maksimalnu temperaturu može doseći stijena na Mjesecu zbog grijanja od Sunca? Snaga Sunčevog zračenja je $1370\ W/m^2$, Mjesec nema atmosferu i rotira zanemarivo polagano, a površina stijene se ponaša približno kao crno tijelo.*

Rješenje. Maksimalno zagrijana stijena dobiva jednaku snagu zračenja koju gubi kao crno tijelo,

$$\frac{P}{S} = \sigma \cdot T^4,$$

gdje je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2\text{K}^4$ Stefanova konstanta. Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{1370}{5.67 \cdot 10^{-8}}, \\ T &= 394\ \text{K} = 121\ ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Ur.

1832. *Od tri otpornika nepoznatog otpora dva spojimo paralelno, te u seriju s trećim. Ovisno o odabiru trećeg otpornika, otpor dobivenog sklopa je $46\ \Omega$, $34.5\ \Omega$ ili $69\ \Omega$. Odredi otpore ta tri otpornika.*

Rješenje. Jednadžbe koje određuju otpore su

$$\begin{aligned} \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3 &= 46, \\ \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} + R_1 &= 34.5, \\ \frac{R_3R_1}{R_3+R_1} + R_2 &= 69, \end{aligned}$$

a množenjem svake od njih s odgovarajućim nazivnikom dobijemo

$$\begin{aligned} R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 &= 46(R_1+R_2) \\ &= 34.5(R_2+R_3) \\ &= 69(R_1+R_3). \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$R_1 = 12\ \Omega, \quad R_2 = 60\ \Omega, \quad R_3 = 36\ \Omega.$$

Duje Dodig (3), Zagreb