Županijsko natjecanje iz matematike, 26. veljače 2024. g.

Zadatci za A varijantu

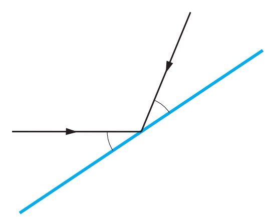
I. razred

1. Odredi sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2y + 4x^2 - 3y = 51.$$

2. Na ploči su bili napisani svi prirodni brojevi od 1 do nekog broja. Nakon što je jedan od brojeva obrisan, aritmetička sredina preostalih brojeva na ploči iznosi $\frac{673}{18}$. Koji je broj obrisan?

3. Biljarski stol ima oblik pravokutnika $ABCD$ i dimenzije $|AB| = 2$ m i $|BC| = 1$ m. Biljarska kugla giba se po stolu pravocrtno dok ne dođe do ruba pravokutnika, a tada se odbija tako da putanja kugle prije i poslije odbijanja zatvara s rubom sukladne kutove. Ako biljarska kugla započne gibanje u točki A te nakon odbijanja od stranica $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom završi gibanje u točki D, odredi ukupnu udaljenost koju je kugla prešla. Kuglu promatramo kao materijalnu točku.



4. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, dokaži da je

$$(a+b)^2ab + (b+c)^2bc + (c+a)^2ca + 4abc(a+b+c) = 0.$$

5. Dokaži da među bilo kojih pet vrhova pravilnog deveterokuta postoje četiri koja su vrhovi trapeza.

II. razred

1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 1.$$

2. Neka je a realan broj. Ako jednadžba $x^2 - ax + a = 0$ ima dva (ne nužno različita) realna rješenja x_1 i x_2, dokaži da vrijedi $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$.

3. Odredi sve uređene trojke (m, n, p), pri čemu su m i n prirodni brojevi, a p prost broj, za koje vrijedi

$$(2m+3)(4n+1) = pmn.$$

4. Polukrug promjera $\overline{PQ}$ upisan je u pravokutnik $ABCD$ i dira njegove stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Pritom se točka P nalazi na stranici $\overline{BC}$, a točka Q na stranici $\overline{CD}$. Ako je $|BP| = 2$ i $|DQ| = 1$, odredi $|PQ|$.

5. Koliko ima prirodnih brojeva čiji zapis u dekadskome sustavu sadržava svaku od deset znamenaka 0, 1, 2, ..., 9 točno jednom, a svaka je znamenka, osim znamenke 9, manja od barem jedne njoj susjedne znamenke?

III. razred

1. Za koje realne brojeve x vrijedi

$$5^{2x} + 4^x < 29 \cdot 10^{x-1}?$$

2. Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na opisanoj kružnici šiljastokutnog trokuta ABC takve da su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ promjeri te kružnice. Dokaži da vrijedi

$$|A_1B| \cdot |B_1B| + |B_1C| \cdot |C_1A| = |AC| \cdot |BC|.$$

3. Odredi sve uređene trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje je $2^a + 2^b + 2^c + 3$ kvadrat nekoga prirodnog broja.

4. Dokaži da je zbroj

$$\frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}$$

jednak

$$\frac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}.$$

5. Na karticama su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 2024^2. Zbroj svih tih brojeva iznosi $2024A$. Manuel je odabrao 2024 kartice s brojevima čiji je zbroj jednak A. Dokaži da Neva može preostale kartice rasporediti u 2023 skupine tako da u svakoj od njih budu po 2024 kartice i da zbroj brojeva na karticama u svakoj skupini bude jednak A.

IV. razred

1. Dokaži da svi članovi niza

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \cdot 2024^1 - 2024, \\ a_2 &= 4 \cdot 2024^2 - 20244, \\ &\vdots \\ a_n &= 4 \cdot 2024^n - \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n \text{ puta}}}, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

daju ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

2. Neka su x_1, x_2 i x_3 različite nultočke polinoma $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Odredi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3}.$$

3. Neka je $ABCDE$ peterokut upisan u kružnicu sa središtem O. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ sijeku se u točki P, a dužine $\overline{BD}$ i $\overline{EC}$ u točki Q. Ako su pravci PQ i AD međusobno paralelni, dokaži da je pravac EO okomit na ta dva pravca.

4. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji točno pet prirodnih brojeva n takvih da je $n + p \mid n^3 + p^2$.

5. Odredi (ako postoji) najveći prirodni broj koji se ne može prikazati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa $\{135, 136, 137, \ldots, 144\}$.

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Odredi prirodni broj n takav da broj $(4^{n-1} : (2 \cdot 8^{-n-1})) \cdot (25^n : 5^{2n-1})^{5n} - 1$ ima 10 120 znamenki.

2. Na maturalnom je plesu bilo ukupno 46 djevojaka i mladića. Prva je djevojka plesala s 9 mladića, a svaka sljedeća s jednim mladićem više. Ako je posljednja djevojka plesala sa svim prisutnim mladićima, koliko je bilo djevojaka, a koliko mladića na maturalnom plesu?

3. Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x^{-1} - y^{-1} = 4$ i $xy = \frac{1}{4}$, koliko je $x^{-4} + y^{-4}$?

4. Cijelom broju $a \neq 1$ dodamo njegov kvadrat i oduzmemo jedan, pa dobiveni broj podijelimo brojem $a - 1$. Za koji je cijeli broj a tako dobiveni količnik cijeli broj?

5. Duljina stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC jednaka je 10 cm. Simetrale unutarnjih kutova pri vrhovima A i B sijeku se u točki S tako da je $\sphericalangle BSA = 135°$. Izračunaj duljinu težišnice povučene iz vrha C.

6. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y takvih da je $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$.

7. Dva pravokutna trokuta PST i RST imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{ST}$. Vrhovi P i R nalaze se s iste strane hipotenuze $\overline{ST}$. Katete $\overline{PT}$ i $\overline{RS}$ sijeku se u točki Q. Ako je $|PS| = 6$ cm, $|PT| = 17$ cm i $|RT| = 1$ cm, kolika je površina trokuta QST?

II. razred

1. Odredi kvadratnu funkciju s racionalnim koeficijentima kojoj je najmanja vrijednost -4, a jedna nultočka $\sqrt{2} - 1$.

2. Počevši od najmanje stranice trokuta, svaka je sljedeća stranica 4 cm dulja od prethodne. Ako je mjera jednog kuta toga trokuta jednaka $120°$, izračunaj polumjer tomu trokutu upisane kružnice.

3. Izračunaj:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{4047}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{4047^2}\right)}}.$$

4. Učiteljica ima nekoliko bombona koje želi podijeliti učenicima koji dođu na dodatnu nastavu iz matematike tako da svatko dobije jednak broj bombona i niti jedan bombon ne ostane.

- Ako dođu dva učenika, ne može svaki učenik dobiti isti broj bombona.
- Ako dođu tri učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođu četiri učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođe pet učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođe šest učenika, ne može svaki učenik dobiti isti broj bombona.

Ako je poznato da samo jedna od navedenih tvrdnji nije istinita, koliko najmanje bombona može imati učiteljica?

5. Jednadžbe $x^2 - 45x + 4a + 4 = 0$ i $x^2 - 47x + 5a - 4 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a < 20$ imaju jedno zajedničko realno rješenje. Koliko iznosi umnožak preostalih dvaju rješenja tih jednadžbi?

6. Odredi duljine stranica pravokutnog trokuta opsega 24 cm i polumjera upisane kružnice 2 cm.

7. Na polici se nalazi šest različitih čokolada i tri različite bombonjere. Svatko od troje djece može izabrati za desert ili dvije čokolade ili jednu bombonjeru. Na koliko načina troje djece može izabrati desert?

III. razred

1. Brojevni izraz $\dfrac{6 - \log_{14} 2401}{4 - \log_{14} 49}$ pojednostavi i zapiši u obliku logaritma $\log_{28} n$, pri čemu je n prirodni broj.

2. Riješi nejednadžbu $|\cos x| \leq \cos x + 2\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi\rangle$.

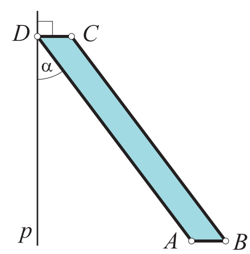
3. Zadan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 6 cm. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ označena je točka P, a na kateti $\overline{BC}$ točka Q tako da vrijedi $|BP| = |QC| = 1$ cm. Ako je $\sphericalangle BPQ = 90°$, odredi $|PC|$.

4. Kolika je najveća moguća površina kružnoga isječka čiji opseg iznosi 40 cm?

5. U računalnoj igri nalazi se magični cvjetnjak u kojemu su 2024 cvijeta. Igrač u svakome potezu može iz cvjetnjaka ubrati 4, 9 ili 10 cvjetova. Ako igrač ubere 4 cvijeta, prije sljedećega poteza u cvjetnjaku naraste 1 novi cvijet, ako ih ubere 9, narastu 3 nova cvijeta, a ako ih ubere 10, narastu 4 nova cvijeta. Novi cvjetovi neće narasti ako igrač u posljednjem potezu uspije ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka. Može li igrač ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka? Obrazloži odgovor.

6. Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $2\sin(x - y) = \sin y \cos x$, dokaži da jednakost $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\sin 2y}{5 - \cos 2y}$ vrijedi za sve x i y za koje su izrazi definirani.

7. Na slici je prikazan paralelogram $ABCD$ čija je kraća stranica $\overline{AB}$ duljine 2 cm, a duljina visine na tu stranicu iznosi 12 cm. Vrhom D paralelograma prolazi pravac p koji je okomit na pravac CD, a sa stranicom $\overline{AD}$ zatvara kut α tako da vrijedi $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Odredi obujam tijela nastaloga rotacijom paralelograma $ABCD$ oko pravca p.



IV. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{2n^2 - 40n + 175}{n - 10}$ prirodan broj.

2. Koliko ima kompleksnih brojeva z takvih da je $|z| = 1$ i razlika $z^{5!} - z^{4!}$ je realan broj?

3. Za koje je realne parametre b i c prirodna domena funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-10x^2 + bx + c}}$ jednaka skupu $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x - 1}{2 - 3x} > 0 \right\}$?

4. Ana ima naočale s crnim, smeđim, zelenim, crvenim, žutim i plavim okvirom. Subotom i nedjeljom uvijek nosi naočale s crnim ili smeđim okvirom. Od preostalih pet dana najmanje tri puta nosi zeleni okvir, dok ostale dane nosi naočale s crvenim, žutim ili plavim okvirom. Na koliko različitih načina Ana može složiti tjednu kombinaciju boja naočala? Ana ne mijenja okvir naočala tijekom dana.

5. Pravac čija je jednadžba $3x+4y-24=0$ siječe os apscisa u točki A, a os ordinata u točki B. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka S. S različitih strana dužine $\overline{AB}$ konstruirani su jednakostranični trokuti SCA i SDB. Izračunaj površinu četverokuta $ADBC$.

6. Kvadratu K_1 površine 1 opisan je krug, a krugu je opisan kvadrat K_2 čije su stranice usporedne stranicama početnog kvadrata K_1. Područje između kvadrata K_1 i K_2 obojeno je sivom bojom. Zatim kvadratu K_2 opet opišemo krug, a njemu na isti način opišemo kvadrat K_3. Područje između kvadrata K_2 i K_3 ostavimo neobojeno. Taj postupak ponavljamo sve dok ne bude 2024 sivo obojenih i 2025 neobojenih područja (K_1 brojimo u neobojena područja). Kolika je površina svih sivo obojenih područja, a kolika površina svih neobojenih područja?

7. Laura izrađuje skulpturu od kocaka. Svaka skulptura s oznakom S_n sastoji se od n različitih kocaka čije su duljine bridova redom prirodni brojevi 1, 2, 3, ... do n. Tako skulptura S_1 sadržava jednu kocku čiji je brid duljine 1, S_2 sadržava dvije kocke čije su duljine bridova 1 i 2, i tako dalje redom. Laura tvrdi da je ukupni obujam skulpture S_n uvijek jednak kvadratu zbroja n različitih prirodnih brojeva. Odredi kojih je to n brojeva i dokaži Laurinu tvrdnju.

Matko Ljulj