math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Eulerova diferencijalna jednadžba

Eulerova diferencijalna jednadžba **Frobeniusova metoda** **linearna diferencijalna jednadžba drugog reda** **singularne točke**

Ivana Crnjac,
Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište u Osijeku, trg Lj. Gaja 6, 31000 Osijek, Hrvatska; e-mail address: icrnjac@mathos.hr

Robert Ledenčan
Industrijsko-obrtnička škola Virovitica, Ulica Zbora narodne garde 29, 33000 Virovitica, Hrvatska; e-mail address: robert.ledencan@skole.hr

Sažetak

U ovome radu definirat ćemo Eulerovu diferencijalnu jednadžbu i pokazati na koji način određujemo njezina rješenja. Klasificirat ćemo vrste singularnih točaka te opisati Frobeniusovu metodu za pronalazak rješenja Eulerove diferencijalne jednadžbe u okolini singularnih točaka. Kako se ova jednadžba često pojavljuje u raznim znanstvenim i inženjerskim granama, na kraju ćemo navesti neke od primjena Eulerove diferencijalne jednadžbe u fizici.

Ključne riječi: Eulerova diferencijalna jednadžba, singularne točke, linearna diferencijalna jednadžba drugog reda, Frobeniusova metoda.

1 Uvod

Diferencijalna jednadžba je jednadžba koja povezuje i daje odnos između promatrane funkcije i njezinih derivacija. Takvi odnosi su u primjenama iznimno česti pa se diferencijalne jednadžbe prirodno pojavljuju pri matematičkom opisu raznih prirodnih pojava, posebice pri opisivanju velikog broja fizikalnih pojava kao što su električno polje, titranje, provođenje topline, i sl. Osim u fizici, značajna je njihova primjena u inženjerstvu, biologiji, kemiji, medicini i ekonomiji. U ovom velikom području primjena, centralnu ulogu imaju linearne obične diferencijalne jednadžbe, tj. jednadžbe oblika

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{1}$$

pri čemu su funkcije f i a_i, $i = 0, \dots n-1$, neprekidne na danom otvorenom intervalu I. Jednadžbu (1) zovemo homogenom ako je $f \equiv 0$, odnosno nehomogenom ako je $f \neq 0$. Ukoliko su uz jednadžbu zadani i početni uvjeti

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{2}$$

tada diferencijalnu jednadžbu (1) zajedno s početnim uvjetima (2) nazivamo Cauchyjeva zadaća. Može se pokazati da Cauchyjeva zadaća na otvorenom intervalu ima jedinstveno rješenje [1, 4].
U nastavku ćemo ukratko objasniti rješavanje diferencijalne jednadžbe (1), a detaljnije informacije mogu se pronaći u [1, 3, 4]. Ukoliko sa y_p označimo jedno (partikularno) rješenje diferencijalne jednadžbe (1), onda je opće rješenje spomenute jednadžbe dano s

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pri čemu su $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno nezavisna rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{3}$$

Skup $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ naziva se fundamentalni skup rješenja. Ukoliko su funkcije a_i, $i = 0, \dots, n-1$, konstantne, tada se fundamentalni skup može vrlo jednostavno odrediti, dok je u suprotnom često potrebno koristiti neke numeričke metode ili redove potencija za pronalazak fundamentalnog rješenja.

Glavni cilj ovog rada je proučavanje jednog predstavnika linearnih diferencijalnih jednadžbi, a to je Eulerova diferencijalna jednadžba. Ova se jednadžba prirodno pojavljuje u rješavanju Laplaceove diferencijalne jednadžbe u polarnim koordinatama, analizi quicksort stabla i stabla pretraživanja, jednadžbama ravnoteže i brojnim drugim znanstvenim i inženjerskim područjima. U drugom poglavlju definirat ćemo Eulerovu diferencijalnu jednadžbu i pokazati metode pronalaska njezinog rješenja. Osim toga, upoznat ćemo se i sa pojmom singularnih točaka koje su od posebnog značaja u primjenama, te ćemo pokazati kako dolazimo do rješenja Eulerove jednadžbe u njihovoj okolini. Treće poglavlje posvećeno je primjenama Eulerove diferencijalne jednadžbe u fizici.

2 Eulerova diferencijalna jednadžba

Eulerova diferencijalna jednadžba (poznata u literaturi i pod nazivom Cauchy-Eulerova diferencijalna jednadžba) pripada linearnim običnim diferencijalnim jednadžbama n-tog reda, a definiramo ju na sljedeći način:

Definicija 1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren, te $f \in C(I)$. Diferencijalnu jednadžbu

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{4}$$

pri čemu su $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $i = 0, \ldots, n$, nazivamo Eulerova diferencijalna jednadžba n-tog reda.

Ukoliko je $f \equiv 0$, jednadžbu (4) nazivamo homogenom, u suprotnom jednadžba je nehomogena. Primijetimo da prvi koeficijent $a_n x^n$ nestane za $x = 0$, što implicira da ćemo rješenje tražiti na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$.

Pretpostavimo najprije da je $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Eulerovu jednadžbu rješavat ćemo na način da ju svedemo na linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima. Uvedemo li supstituciju $x = e^t$, uzastopnim deriviranjem funkcije $y(x) = y(e^t) = Y(t)$ dobivamo niz funkcija

$$\begin{aligned}
y'(x) &= e^{-t} \frac{d}{dt} Y(t), \\
y''(x) &= e^{-2t} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - I\right) Y(t), \\
y'''(x) &= e^{-3t} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - I\right)\left(\frac{d}{dt} - 2I\right) Y(t), \\
&\vdots \\
y^{(n)}(x) &= e^{-nt} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - I\right)\left(\frac{d}{dt} - 2I\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - (n-1)I\right) Y(t),
\end{aligned}$$

gdje je I operator identiteta. Uvrštavanjem supstitucije i gornjih funkcija u homogenu Eulerovu jednadžbu (4), dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned}
\Bigg[a_n \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - I\right)\left(\frac{d}{dt} - 2I\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - (n-1)I\right) + \cdots + \\
+ a_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - I\right) + a_1 \frac{d}{dt} + a_0\Bigg] Y(t) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

što je homogena linearna obična diferencijalna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima. Iz teorije linearnih diferencijalnih jednadžbi znamo da je za pronalazak općeg rješenja gornje jednadžbe dovoljno pronaći fundamentalni skup rješenja. Ukoliko za neki $\lambda \in \mathbf{C}$ pretpostavimo da je rješenje jednadžbe (5) oblika $Y(t) = e^{\lambda t}$, uvrštavanjem u jednadžbu slijedi

$$P(\lambda)e^{\lambda t} = 0, \tag{6}$$

gdje je

$$P(\lambda) = a_n\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1) + \cdots + a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0. \tag{7}$$

Gornji polinom nazivamo karakterističnim polinomom jednadžbe (5), a često i karakterističnim polinomom homogene Eulerove jednadžbe (4). Nadalje, iz jednadžbe (6) možemo vidjeti da je $Y(t) = e^{\lambda t}$ rješenje jednadžbe (5) ako i samo ako je $P(\lambda) = 0$. Prema tome, određivanjem nultočki karakterističnog polinoma dolazimo do rješenja diferencijalne jednadžbe (5). Može se pokazati da ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ nultočka kratnosti m karakterističnog polinoma (7), onda su funkcije

$$Y_i(t) = t^{i-1}e^{\lambda t}, \quad i = 1, \dots, m \tag{8}$$

linearno nezavisne i pripadaju fundamentalnom skupu rješenja jednadžbe (5) [4].

Napomena 1. Kako se u primjenama najčešće pojavljuje Eulerova diferencijalna jednadžba drugog reda,

$$a_2x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0y(x) = 0, \tag{9}$$

raspisat ćemo detaljnije postupak rješavanja ove jednadžbe. Pretpostavimo da je $x > 0$ i uvedimo supstituciju $x = e^t$. Tada je

$$\begin{aligned}
Y(t) &= y(e^t) = y(x),\\
\frac{d}{dt}Y(t) &= y'(x)e^t,\\
\frac{d^2}{dt^2}Y(t) &= y''(x)e^{2t} + y'(x)e^t = y''(x)e^{2t} + \frac{d}{dt}Y(t),
\end{aligned}$$

i jednadžba (9) postaje

$$a_2\frac{d^2}{dt^2}Y(t) + (a_1 - a_2)\frac{d}{dt}Y(t) + a_0Y(t) = 0. \tag{10}$$

Karakteristični polinom jednadžbe (10) glasi

$$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + (a_1 - a_2)\lambda + a_0. \tag{11}$$

Neka su λ_1, λ_2 nultočke karakterističnog polinoma (11). Ovisno o tipu nultočki, razlikujemo tri slučaja fundamentalnog skupa rješenja jednadžbe (10):

- [1)] Ako su λ_1 i λ_2 dvije različite realne nultočke polinoma (11), tada prema (8) slijedi da funkcije $Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ i $Y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ čine fundamentalan skup rješenja jednadžbe (10).
- [2)] Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$ jedna dvostruka realna nultočka polinoma (11), tada (8) implicira da funkcije $Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ i $Y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ čine fundamentalan skup rješenja jednadžbe (10).
- [3)] Ako je $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, kompleksno konjugiran par nultočki polinoma (11), tada je

  $$Y(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

  jedno kompleksno rješenje jednadžbe (10) iz čega slijede dva linearno nezavisna realna rješenja $Y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ i $Y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ koja čine fundamentalan skup rješenja jednadžbe (10).

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (10) je linearna kombinacija elemenata fundamentalanog skupa $\{Y_1(t),\, Y_2(t)\}$, tj. opće rješenje glasi:

$$Y(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t), \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo opće rješenje Eulerove diferencijalne jednadžbe (9),

$$y(x) = c_1 Y_1(\ln\, x) + c_2 Y_2(\ln\, x), \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavimo sada da je $x \in \langle -\infty, 0\rangle$. U tom slučaju x se može zamijeniti sa $-x = |x|$ pa, za $\lambda \in \mathbb{C}$, dobivamo sljedeći rezultat za rješenje homogene Eulerove diferencijalne jednadžbe [4].

Theorem 2.1 *Neka su $\lambda_1 \dots \lambda_k$ različite nultočke karakterističnog polinoma (7) jednadžbe*

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{12}$$

te λ_j kratnosti m_j. Tada funkcije p_{ij}, takve da je

$$p_{ij} = |x|^{\lambda_j} \ln(|x|)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m_j, \quad j = 1, \dots, k, \tag{13}$$

čine fundamentalni skup rješenja jednadžbe (12) na svakom intervalu koji ne sadrži $x = 0$.

Primijetimo da, ukoliko je $x \in \langle 0, \infty\rangle$, u slučaju Eulerove diferencijalne jednadžbe drugog reda, fundamentalni skup rješenja iz gornjeg teorema podudara se sa fundamentalnim skupom dobivenim u Napomeni 1. Zaista, ukoliko je, primjerice, λ nultočka karakterističnog polinoma jednadžbe (10) kratnosti $m = 2$, tada prema Napomeni 1 funkcije $y_1(x) = Y_1(\ln x) = x^\lambda$ i $y_2(x) = Y_2(\ln x) = x^\lambda \ln x$ čine fundamentalni skup rješenja jednadžbe (9), a to su upravo funkcije oblika (13) iz Teorema 2.1.

2.1 Singularne točke

Nerijetko je u primjenama potrebno promatrati ponašanje rješenja određene diferencijalne jednadžbe u okolini singularnih točaka što može biti vrlo složen zadatak, u ovisnosti o prirodi singularnih točaka. Rješenja diferencijalne jednadžbe u okolini ovih točaka često postanu vrlo velika ili pak jako brzo osciliraju pa u nekim slučajevima jednadžbu nije moguće riješiti u okolini singularne točke. Kao što smo već ranije napomenuli, mnoge jednadžbe koje se pojavljuju u primjenama su jednadžbe drugog reda, tako da ćemo se u ovom poglavlju fokusirati na singularne točke diferencijalnih jednadžbi drugog reda, a posebno na singularne točke Eulerove diferencijalne jednadžbe.

Definicija 2. Neka su zadani proizvoljni polinomi p, q i r. Za točku x_0 kažemo da je regularna točka diferencijalne jednadžbe

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0, \tag{14}$$

ako su funkcije $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ i $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ analitičke u točki x_0. Ukoliko točka x_0 nije regularna, onda kažemo da je x_0 singularna točka.

Prisjetimo se da je funkcija $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je analitička u $x_0 \in I$ ukoliko se može prikazati u obliku reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{15}$$

oko točke x_0 na nekom krugu $K(x_0, R)$, gdje je $R > 0$ polumjer konvergencije reda potencija (15). Prema tome, funkcije $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ i $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ će biti analitičke u svim točkama, osim u onim za koje je $p(x) = 0$. Takve točke su upravo singularne točke diferencijalne jednadžbe (14).

Definicija 3. Za singularnu točku x_0 diferencijalne jednadžbe (14) kažemo da je regularna singularna točka ako su funkcije

$$(x - x_0)\frac{q(x)}{p(x)} \quad i \quad (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \tag{16}$$

analitičke u točki x_0. Ukoliko barem jedna od prethodnih funkcija nije analitička u točki x_0, onda za x_0 kažemo da je iregularna singularna točka.

U slučaju regularne singularne točke, diferencijalna jednadžba se može transformirati u jednadžbu s regularnim ponašanjem, točnije, rješenje diferencijalne jednadžbe u regularnoj singularnoj točki može se prikazati kao red potencija s konačnim polumjerom konvergencije. S druge strane, ako diferencijalna jednadžba ima iregularnu singularnu točku, rješenje jednadžbe u toj točki ne može se izraziti kao red potencija, nego može uključivati i neke posebne ili neelementarne funkcije. U sljedećem primjeru odredit ćemo singularne točke Eulerove diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Primjer 1. Neka su $a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$, i $a_2 \neq 0$. Odredimo i klasificirajmo singularne točke obične diferencijalne jednadžbe

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Kako je $p(x) = a_2 x^2$, $q(x) = a_1 x$, a $r(x) = a_0$, to je

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a_1}{a_2 x}, \qquad \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{a_0}{a_2 x^2},$$

pa je jedina singularna točka Eulerove diferencijalne jednadžbe jednaka $x_0 = 0$. Kako je

$$(x-0)\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a_1}{a_2} \quad i \quad (x-0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{a_0}{a_2},$$

slijedi da je $x_0 = 0$ regularna singularna točka.

Ukoliko je točka x_0 regularna singularna točka diferencijalne jednadžbe (14), onda njena rješenja općenito nisu definirana u točki x_0. Međutim, diferencijalna jednadžba (14) ima dva linearno nezavisna rješenja na kružnom vijencu $K(x_0; 0, R)$, $R > 0$ pa je moguće (barem aproksimativno) odrediti rješenje jednadžbe u okolini svake regularne singularne točke. Za pronalazak rješenja koristit ćemo tzv. Frobeniusovu metodu koja kaže da jednadžba (14) uvijek ima barem jedno rješenje oblika

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n |x - x_0|^n,$$

za pogodno odabrani r i $A_0 \neq 0$, koje konvergira na otvorenom kružnom vijencu $K(x_0; 0, R)$, za neki $R > 0$. Ovakvo rješenje nazivamo Frobeniusovim rješenjem.

U nastavku ćemo pretpostaviti da je $p(x) = a_2 x^2$, $q(x) = a_1 x$, i $r(x) = a_0$, tj. rješavat ćemo Eulerovu diferencijalnu jednadžbu

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{17}$$

u okolini svoje regularne singularne točke $x_0 = 0$. Bez smanjenja općenitosti, promatrat ćemo rješenja definirana na $\langle 0, \infty \rangle$, tj. pretpostavit ćemo da je $x > 0$. Slučaj $x < 0$ je analogan, uz male modifikacije, slično kao u prethodnom poglavlju. Neka je

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{18}$$

Frobeniuosovo rješenje jednadžbe (17) koje konvergira na kružnom vijencu $K(0;0,R)$. Red (18) možemo derivirati član po član pa uvrštavanjem u jednadžbu (17) dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_2(\lambda+n)(\lambda+n-1) + a_1(\lambda+n) + a_0\big) A_n x^{\lambda+n} = 0. \tag{19}$$

Da bi gornja jednadžba bila zadovoljena, koeficijent uz svaku potenciju od x mora biti jednak nuli. Kako je po pretpostavci $A_0 \neq 0$, a koeficijent uz x^{λ}

$$(a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0)A_0 = 0,$$

to slijedi

$$P(\lambda) = a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{20}$$

Primijetimo da je polinom $P(\lambda)$ karakteristični polinom pridružen diferencijalnoj jednadžbi (17). Prema tome, ukoliko sa λ_1 i λ_2 označimo korijene karakterističnog polinoma (20), i dodatno pretpostavimo da je $\mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \mathrm{Re}(\lambda_2)$, tada je jedno Frobeniusovo rješenje diferencijalne jednadžbe (17) oblika

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{21}$$

pri čemu gornji red konvergira na kružnom vijencu $K(0;0,R)$, za neki $R > 0$. Za pronalazak fundamentalnog rješenja, potrebno je odrediti još jedno rješenje jednadžbe (17) koje je linearno nezavisno sa rješenjem (21). Njega dobivamo na sljedeći način [3, 5].
1) Ako $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0$, onda je s

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

definirano Frobeniusovo rješenje diferencijalne jednadžbe (17) koje je linearno nezavisno s rješenjem (21).
2) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, onda je

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n,$$

za y_1 oblika (21), drugo Frobeniusovo rješenje diferencijalne jednadžbe (17) i ta dva rješenja su linearno nezavisna.
3) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 + m$, $m \in \mathbb{N}$, onda, za rješenje y_1 oblika (21), slijedi da je

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad C \in \mathbb{R}$$

još jedno Frobeniusovo rješenje diferencijalne jednadžbe (17) koje je linearno nezavisno s rješenjem y_1.

Koeficijente A_n, B_n, C_n te konstantu C iz gornjih rješenja određujemo uvrštavanjem Frobeniusovih rješenja y_1 i y_2 u diferencijalnu jednadžbu (17). Time smo pronašli fundamentalan skup Frobeniusovih rješenja $\{y_1,\, y_2\}$ diferencijalne jednadžbe (17).

Primjer 2. U okolini regularne singularne točke 0 odredimo dva linearno nezavisna Frobeniousova rješenja Eulerove jednadžbe

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0. \tag{22}$$

Karakteristični polinom zadane jednadžbe glasi

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1,$$

a njegove nultočke su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Prema tome, jedno Frobeniusovo rješenje glasi

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1},$$

dok je drugo oblika

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-1},$$

jer je $\lambda_1 = \lambda_2 + 2$. Odredimo najprije koeficijente A_n rješenja y_1. Kako je

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n x^n,$$
$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n A_n x^{n-1},$$

uvrštavanjem u jednadžbu (22) dobivamo

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n A_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1} = 0,$$

to jest,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) A_n x^{n+1} = 0.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi da je $A_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$y_1(x) = A_0 x.$$

Nadalje, uvrštavanjem

$$y_2(x) = CA_0 x \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-1},$$

$$y_2'(x) = CA_0(\ln x + 1) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)C_n x^{n-2},$$

$$y_2''(x) = CA_0 \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)C_n x^{n-3}.$$

u jednadžbu (22) dobivamo

$$2CA_0 x + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-1} = 0,$$

što možemo zapisati kao

$$2CA_0 x + \sum_{n=0}^{\infty}(n^2 - 2n)C_n x^{n-1} = 0.$$

Raspisivanjem koeficijenata uz potencije od x slijedi da su C i svi koeficijenti C_n, $n \in \mathbb{N}_0$, jednaki nuli, osim C_0 i C_2. Prema tome,

$$y_2(x) = C_0 \frac{1}{x} + C_2 x.$$

Napomenimo i da jednadžbe oblika

$$a_2(x-a)^2 y''(x) + a_1(x-a)y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{23}$$

za neki $a \in \mathbb{R}$, pripadaju Eulerovim diferencijalnim jednadžbama, s regularnom singularnom točkom $x_0 = a$. Ove jednadžbe rješavamo supstitucijom $t = x - a$, čime se jednadžba (23) svodi na (17).

3 Primjene Eulerove diferencijalne jednadžbe

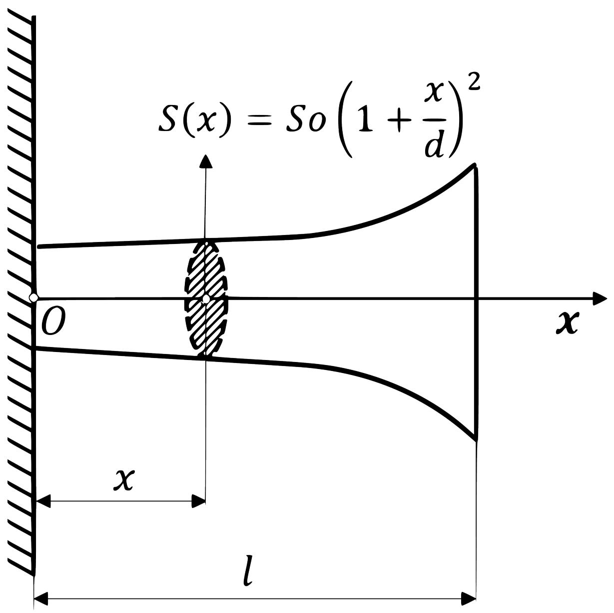
Eulerova diferencijalna jednadžba prirodno se pojavljuje prilikom promatranja mnoštva fizikalnih pojava, a posebice u području elektrostatike i mehaničke otpornosti materijala. U sljedećih nekoliko primjera objasnit ćemo fizikalne probleme u kojima se pojavljuje ova jednadžba, a potom riješiti navedene probleme [2, 6, 7].

3.1 Stacionarno provođenje topline

U mehanici se često promatraju štapovi promjenjivog poprečnog presjeka, a jedan takav štap prikazan je na Slici 1. Promjena poprečnog presjeka ovog štapa duljine l ovisi o udaljenosti središta promatranog presjeka štapa od ishodišta, a dana je formulom

$$S(x) = S_0\left(1 + \frac{x}{d}\right)^2, \tag{24}$$

pri čemu je S_0 površina poprečnog presjeka štapa u točki $x = 0$, a $d > 0$ fiksan.



Slika 1: Štap promjenjivog poprečnog presjeka.

Ukoliko je uz zadanu vanjsku toplinu $f(x)$ štap u vezi s regulatorom koji na svakom presjeku odvodi iz štapa količinu topline proporcionalne temperaturi $u(x)$ na tom mjestu, onda je prisutan i linijski fluks s gustoćom $-b(x)u(x)$, za $b(x) \geq 0$, i jednadžba stacionarnog provođenja topline glasi

$$(\kappa S(x)u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0, \tag{25}$$

pri čemu je $\kappa > 0$ koeficijent provođenja materijala od kojeg je štap napravljen. Ako pretpostavimo da je $f(x) = 0$ i $b(x) = b$, jednadžba (25), uz supstituciju $t = 1 + \dfrac{x}{d}$, postaje

$$\kappa S_0 \frac{1}{d^2} t^2 U''(t) + \kappa S_0 \frac{2}{d^2} t U'(t) - bU(t) = 0, \tag{26}$$

gdje je $U(t) = U\left(1 + \frac{x}{d}\right) = u(x)$. Jednadžba (26) je upravo Eulerova diferencijalna jednadžba drugog reda (9) s koeficijentima

$$a_2 = \kappa S_0 \frac{1}{d^2},\ a_1 = \kappa S_0 \frac{2}{d^2},\ a_0 = -b.$$

Karakteristični polinom jednadžbe (26) glasi

$$\kappa S_0 \frac{1}{d^2} \lambda^2 + \kappa S_0 \frac{1}{d^2} \lambda - b = 0,$$

a njegove nultočke su

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{d}{2\kappa S_0} \sqrt{\kappa^2 S_0^2 \frac{1}{d^2} + 4\kappa S_0 b.}$$

Radi lakšeg zapisa rješenja, koristimo notaciju

$$\begin{aligned} D &= \kappa^2 S_0^2 \frac{1}{d^2} + 4\kappa S_0 b, \\ p_1 &= 1 - \frac{d\sqrt{D}}{\kappa S_0}, \\ p_2 &= 1 + \frac{d\sqrt{D}}{\kappa S_0}. \end{aligned}$$

Kako je $D > 0$ i $t > 0$, prema Teoremu 11, fundamentalni sustav rješenja jednadžbe (26) čine funkcije

$$
\begin{aligned}
U_1(t) &= t^{\lambda_1} = t^{-\frac{p_1}{2}}, \\
U_2(t) &= t^{\lambda_2} = t^{-\frac{p_2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Stoga je temperatura u svakoj točki promatranog štapa opisana funkcijom

$$
u(x) = C_1\left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-\frac{p_1}{2}} + C_2\left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-\frac{p_2}{2}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
$$

Dodatno, ako pretpostavimo da je lijevi kraj štapa toplinski izoliran, a na desnom kraju štapa se održava temperatura od 1 stupanj, tj. $u'(0) = 0$ i $u(l) = 1$, onda su konstante C_1 i C_2 jednake

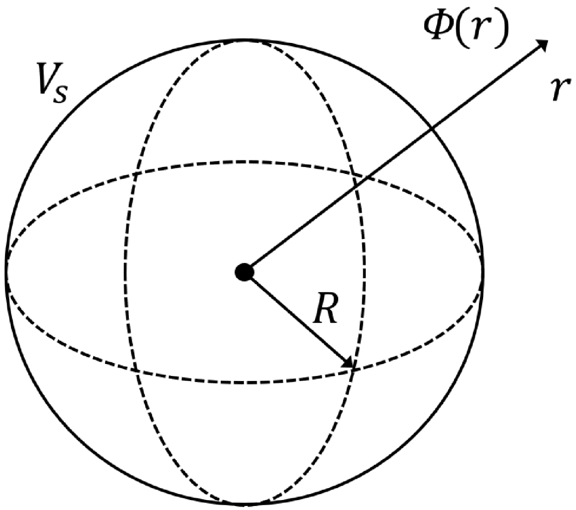
$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{p_2}{p_1}\left(-\frac{p_2}{p_1}\left(1 + \frac{l}{d}\right)^{-\frac{p_1}{2}} + \left(1 + \frac{l}{d}\right)^{-\frac{p_2}{2}}\right)^{-1}, \\
C_2 &= \left(-\frac{p_2}{p_1}\left(1 + \frac{l}{d}\right)^{-\frac{p_1}{2}} + \left(1 + \frac{l}{d}\right)^{-\frac{p_2}{2}}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

3.2 Električni potencijal vodljive nabijene sfere

Električni potencijal Φ je skalarna fizikalna veličina koja opisuje potencijalnu energiju električki nabijene čestice u statičkom električnom polju. Možemo ga odrediti koristeći Gaussov zakon, zapisan u obliku Poissonove jednadžbe,

$$
\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{27}
$$

gdje je ρ volumna raspodjela naboja, a ε_0 dielektrična konstanta vakuuma. Neka je dana vodljiva nabijena sfera polumjera R čiji je električni potencijal potrebno odrediti na udaljenosti r od površine sfere. Pretpostavimo da se sve točke na površini sfere nalaze na istom potencijalu V_s, tj. naboj je simetrično raspoređen. Dodatno, pretpostavimo da se sfera nalazi u velikom mediju bez naboja (što implicira da je $\rho = 0$) te da je električni potencijal u beskonačnosti, $\Phi(\infty)$, jednak nuli.



Slika 2: Vodljiva nabijena sfera.

Kako je naboj simetrično raspoređen, potencijal ovisi isključivo o udaljenosti od površine sfere pa zapisom Laplaceovog diferencijalnog operatora u sfernim koordinatama jednadžba (27) se svodi na jednadžbu

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right]\Phi(r) = 0.$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobivamo Eulerovu diferencijalnu jednadžbu drugog reda,

$$r^2\Phi''(r) + 2r\Phi'(r) = 0. \tag{28}$$

Karakteristični polinom gornje jednadžbe je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda,$$

a njegove nultočke su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$. Kako je $r > 0$, to je, prema Teorema 11, fundamentalni skup rješenja jednadžbe (28) jednak $\left\{1, \dfrac{1}{r}\right\}$, dok je opće rješenje jednadžbe dano s

$$\Phi(r) = C_1 + C_2\frac{1}{r}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Iz pretpostavke da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli slijedi

$$\Phi(\infty) = \lim_{r\to\infty}\left(C_1 + C_2\frac{1}{r}\right) = C_1 = 0,$$

a kako je površina sfere potencijala V_s, to je

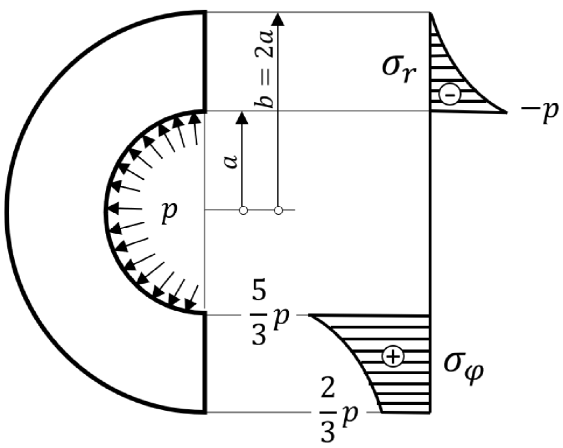
$$\Phi(R) = C_2\frac{1}{R} = V_s.$$

Dakle, $C_1 = 0$ i $C_2 = V_s R$, pa je električni potencijal nabijene vodljive sfere dan formulom

$$\Phi(r) = V_s R\frac{1}{r}.$$

3.3 Ravnoteža kružnog diska

Promotrimo problem određivanja radijalnog pomaka u homogenog diska konstantnog poprečnog presjeka u obliku kružnog vijenca. Pretpostavimo da na disk djelujemo kontinuiranim i radijalno jednoliko raspoređenim opterećenjem p tako da za radijalno naprezanje σ_r vrijedi $\sigma_r(a) = -p$ i $\sigma_r(b) = 0$, gdje su a i $b = 2a$ polumjeri kružnog vijenca. Dodatno, pretpostavimo da je kutna brzina diska jednaka nuli.



Slika 3: Poprečni presjek homogenog kružnog diska.

Jednadžba ravnoteže dana je sa

$$\frac{d}{dr}[h(r)r\sigma_r] - h(r)\sigma_\varphi + h(r)\rho(r)\omega^2 r^2 = 0,$$

pri čemu su σ_r i σ_φ radijalno i kružno naprezanje, h debljina diska, ρ gustoća materijala diska, a ω kutna brzina diska oko uzdužne osi diska. Kako je disk homogen, konstantnog poprečnog presjeka, te je kutna brzina ω jednaka nuli, gornja jednadžba postaje

$$\frac{d}{dr}[r\sigma_r] - \sigma_\varphi = 0. \tag{29}$$

Nadalje, za radijalno i kružno naprezanje vrijede sljedeći zakoni ponašanja:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right), \; \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right), \tag{30}$$

gdje je E Youngeov modul elastičnosti materijala, a ν Poissonov koeficijent koji ovisi o vrsti materijala. Uvrštavanjem zakona ponašanja u jednadžbu (29) dobivamo

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = 0, \tag{31}$$

što je upravo homogena Eulerova diferencijalna jednadžba drugog reda. Pripadni karakteristični polinom glasi $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$, a nultočke su mu $\lambda_1 = 1$, i $\lambda_2 = -1$. Prema Teoremu 11, rješenje jednadžbe (31) dano je s

$$u(r) = C_1 u_1(r) + C_2 u_2(r) = C_1 r + C_2\frac{1}{r}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Konstante C_1 i C_2 lako dobivamo iz zakona ponašanja (30) i uvjeta $\sigma_r(a) = -p$ i $\sigma_r(b) = 0$, i vrijedi

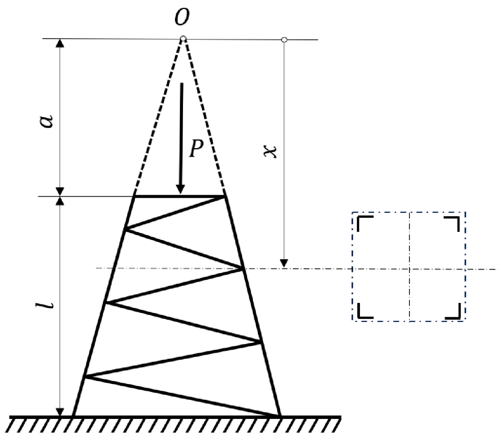
$$C_1 = \frac{(1-\nu)pa^2}{(b^2-a^2)E}, \; C_2 = \frac{(1+\nu)pa^2b^2}{(b^2-a^2)E}.$$

Stoga je radijalni pomak diska dan formulom

$$u(r) = \frac{(1-\nu)pa^2}{(b^2-a^2)E}r + \frac{(1+\nu)pa^2b^2}{(b^2-a^2)E}\frac{1}{r}.$$

3.4 Konzola promjenjivog poprečnog presjeka

Za kraj, pronađimo kritičnu silu prilikom izvijanja konzole (štap rešetkaste strukture, eng. cantilever) promjenjivog momenta tromosti $I_x = I_0 x^2 a^{-2}$ opterećene silom P kao na Slici 4.



Slika 4: Konzola promjenjivog poprečnog presjeka.

Kritična sila je granična vrijednost tlačne sile kod koje dolazi do gubitka stabilnosti ravnoteže, a za konzolu vrijedi

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E I_0}{l_b^2},$$

pri čemu je E Youngeov modul elastičnosti materijala konzole, a l_b dužina izvijanja štapa. Prilikom promatranja izvijanja, zamišljenu krivulju koja uzdužno prolazi kroz štap i prati deformaciju štapa uzrokovanu tlačnom silom nazivat ćemo elastična krivulja. U slučaju konzole, diferencijalna jednadžba elastične krivulje dana je sa

$$EI_x \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0,$$

gdje je w progib konzole. Jedan kraj konzole je učvršen, a drugi slobodan pa su početni uvjeti $w(a) = 0$ i $\frac{dw}{dx}(a + l) = 0$. Uzimajući u obzir izraz za I_x, diferencijalna jednadžba glasi

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Pa^2}{EI_0} w = 0, \tag{32}$$

što je Eulerova diferencijalna jednadžba drugog reda. Nultočke karakterističnog polinoma $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{Pa^2}{EI_0}$ jednadžbe (32) su

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{4}}.$$

Radi lakšeg zapisa rješenja, koristimo notaciju $B = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{4}}$. Primjenom Teorema 11, opće rješenje jednadžbe (32) glasi

$$w(x) = C_1\sqrt{x}\cos(B\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(B\ln x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Može se pokazati da prethodno rješenje ima ekvivalentni zapis oblika

$$w(x) = C_1\sqrt{\frac{x}{a}}\cos\Big(B\ln\frac{x}{a}\Big) + C_2\sqrt{\frac{x}{a}}\sin\Big(B\ln\frac{x}{a}\Big), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

koji ćemo iskoristiti kako bismo odredili kritičnu silu. Iz uvjeta $w(a) = 0$ slijedi $C_1 = 0$, dok iz uvjeta $w'(a+l) = 0$ dobivamo

$$\tan\left(B\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)\right)C_2 + 2BC_2 = 0.$$

Kako ne želimo trivijalno rješenje $w = 0$, smatramo da je $C_2 \neq 0$ pa je

$$\tan\left(B\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)\right) + 2B = 0.$$

Ukoliko poznajemo vrijednosti l i a, numeričkim metodama možemo odrediti minimalni B što ćemo označiti sa B_{kr}. Tada je

$$\frac{EI_0}{a^2}\left(B_{kr}^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{EI_0}{a^2}\left(\frac{P_{kr}a^2}{EI_0} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = P_{kr},$$

čime smo odredili kritičnu silu prilikom izvijanja promatrane konzole.
{8}

Bibliografija

[1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] I. Alfirević, *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga Zagreb, Zagreb, 1989.

[3] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seventh edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2001.

[4] E.A. Coddington, R. Carlson, *Linear ordinary differential equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[5] S. Kalabušić, E. Pilav, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Prvo izdanje, Univerzitet u Sarajevu-PMF, Sarajevo, 2014.

[6] M.N.O. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*, Fourth edition, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[7] M.V. Soare, P.P. Teodorescu, I. Toma, *Ordinary Differential Equations with Aplications to Mechanics*, Springer, Netherlands, 2007.

ISSN 1334-6083