math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Determinante naše svagdašnje

Cayley-Menger Hesijan Jakobijan Ključne riječi: determinante Vandermonde Wronskijan

Ivana Grgić,
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Hrvatska; e-mail address: ipletiko@fesb.hr

Mirjana Strukan
Osnovna škola "Blatine škrape" Split; e-mail address: mirjana.strukan@gmail.com

Sažetak

U ovom radu ćemo opisati i objasniti razliku izmeđ u nekoliko važnih i poznatih matrica i determinanti nazvanih po slavnim matematičarima. Definirani su Jakobijan, Wronskijan i Hesijan, Vandermondeova i Cayley-Mengerova determinanta, njihovo značenje i područje primjene. Cilj rada je na jednom mjestu objediniti osnove tako važnih determinanti koje profesionalni matematičari, a i mnogi studenti, barem u nekom dijelu života, koriste gotovo svakodnevno.

1 Uvod

U linearnoj algebri determinante igraju ključnu ulogu. Iz tog razloga su jedan od temeljnih matematičkih pojmova s kojim se susreću studenti na prvim godinama ne samo matematičkog, tehničkog, nego i društvenog usmjerenja. Primjena determinanti je zaista široka. Determinante opisuju prirodu rješenja sustava linearnih jednadžbi, ukazuju na linearnu zavisnost/nezavisnost vektora, utjelovljuju određ ena geometrijska svojstva linearnih transformacija te su najvažniji alat kod pronalaženja svojstvenih vrijednosti matrica. U ovom radu pretpostavljamo da je čitatelju poznat pojam determinante, kao i derivacije funkcija jedne i više varijabli. Cilj rada je na jednom mjestu objediniti osnove važnih determinanti koje profesionalni matematičari, a i mnogi studenti, barem u nekom dijelu života, koriste gotovo svakodnevno.

2 Gradijent

Prije nego opišemo Jakobijan i Hessijan, zgodno je uvesti pojam gradijenta. Gradijent je generalizacija pojma derivacije na skalarne funkcije više varijabla. često umjesto riječi funkcija koristimo riječ polje. Pojam polja je uveo irski matematičar Hamilton, u svezi s promatranjem fizikalnih veličina u električnim, magnetnim i drugim poljima. Skalarna i vektorska polja su u stvari drugi naziv za skalarne i vektorske funkcije.

Definition 1. Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ skalarno polje. Gradijent skalarnog polja f, u oznaci $\mathrm{grad} f$, je vektorsko polje koje definiramo na sljedeći način

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Definition 2. Hamiltonov diferencijalni operator (nabla) glasi

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Diferencijalni operator ∇ istovremeno ima svojstva i vektora i derivacije. Vrijedi $\mathrm{grad} f = \nabla f$. Gradijent možemo smatrati retčanom matricom, $\mathrm{grad} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$.

Gradijent označava smjer najbržeg rasta funkcije f u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$. Iznos tog rasta je $|\mathrm{grad} f(T_0)|$. Primjerice, ako skalarno polje f opisuje temperaturu u proizvoljnoj točki prostora, onda će gradijent od f u točki $T(x, y, z)$ pokazivati u smjeru u kojem temperatura najbrže raste.

3 Jakobijan

U literaturi, termin Jakobijan[1] se koristi naizmjenično za Jacobijevu matricu i determinantu. I matrica i determinanta imaju korisnu i važnu primjenu: matrica sadrži parcijalne derivacije prvog reda, a determinanta je korisna u procesu promjene varijabla u integralnom računu.

Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektorsko polje. Jakobijan možemo smatrati generalizacijom derivacije na vektorska polja. Potrebna nam je brzina promjene svake komponente funkcije F za ulaznu varijablu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a upravo to je uhvaćeno u matrici koju nazivamo Jacobijeva matrica J.

Dakle,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Jakobijan je determinanta Jacobijeve (kvadratne) matrice. U slučaju kada je $m = 1$ i $n = 3$ Jacobijeva matrica je isto što i gradijent (retčana matrica). Jedna od važnih primjena Jacobijeve matrice, odnosno njene determinante je u računanju dvostrukih integrala, kad nam je potrebna zamjena varijabli kojom transformiramo originalnu funkciju u neku mnogo jednostavniju koju ćemo lakše integrirati. Primjerice, često pri računanju koristimo vezu izmeđ u kartezijevih i polarnih koordinata: $x(r, \varphi) = r\cos\varphi$, $y(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Općenito, pojam Jakobijana za funkcije $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ definiramo jednakošću

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dakle, Jakobijan za promjenu koordinata u polarne je jednak

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Formula za prijelaz iz kartezijevih u polarne koordinate u dvostrukom integralu glasi

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))|\det J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Example 3. Izračunati površinu lika D u xy ravnini omeđ enog kružnicama $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ i pravcima $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = x$ za $x \geq 0$.

Kako je područje integracije omeđ eno kružnicama prikladno je prijeći u polarne koordinate. Jakobijan je tada jednak $\det J = r$.

Rubne krivulje i pravci područja D u polarnim koordinatama imaju jednadžbe $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $\tan\varphi_1 = 1$, $\tan\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Tim jednadžbama je određ eno područje D' u $r\varphi$ ravnini. Područje D je slika područja D' u odnosu na zadanu transformaciju. Računamo:

$$P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_1^2 r\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\bigg|_1^2 \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2}\varphi\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{8}.$$

Apsolutna vrijednost Jakobijana $|\det J|$ u slučaju kada je $\det J \neq 0$ je faktor kojim množimo površinu pravokutnika da bismo dobili površinu krivocrtnog lika. Jakobijan djeluje kao faktor skaliranja izmeđ u dva koordinatna sustava.

4 Hessijan

Vidjeli smo da je gradijent retčana matrica koja sadrži prve derivacije funkcije više varijabli. Hesseova[2] matrica je matrica parcijalnih derivacija drugog reda funkcije više varijabli.

Definition 4. Hesseova matrica je kvadratna matrica dimenzija $n \times n$ parcijalnih derivacija drugog reda funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tj. funkcije koja n-dimenzionalni vektor preslikava u skalar. Element Hesseove matrice definiran je s $H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, a sama matrica ovako:

$$H = \nabla\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Determinantu Hesseove matrice nazivamo Hessijan.

Zbog Schwarzovog teorema, za funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda, Hesseova matrica je simetrična. Takođ er, uočimo vezu Hesseove matrice i Jacobijeve matrice. Vrijedi

$$H(f(x)) = J(\nabla f(x)),$$

tj. Hesseova matrica funkcije f je Jacobijeva matrica gradijenta funkcije f.

Najčešća primjena Hessijana je pri određ ivanju ekstrema funkcije više varijabli.

Definition 5. Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene glavne minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca, tj. $A_i = [a_{ij}] \in M_k$.

Funkcija f u stacionarnoj točki x_0 ima lokalni minimum ako su sve minore Hesseove matrice $H(f)(x_0)$ pozitivne, a lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H(f)(x_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Ukoliko su neke od minora nula, ali nema negativnih ili pak alterniraju tako da neparne po redu nisu pozitivne, a parne nisu negativne, potrebne su druge metode provjere. U preostalim slučajevima riječ je o sedlastoj točki, tj. stacionarnoj točki koja nije ekstrem.

Example 6. Odrediti lokalne ekstreme funkcije zadane formulom $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Gradijent funkcije f jednak je

$$\nabla f(x, y) = (4y - 4x^3)\vec{i} + (4x - 4y^3)\vec{j},$$

a Hesseova matrica

$$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

Stacionarne točke funkcije f su $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(-1, -1)$.

Računamo: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$.

Sada je $\det H(f)(0, 0) = -16$ pa je $(0, 0)$ sedlasta točka.

Zatim: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = -12$.

Vrijedi $\det H(f)(1, 1) = 128$ pa je $(1, 1)$ lokalni maksimum i vrijednost lokalnog maksimuma u $(1, 1)$ iznosi $f(1, 1) = 2$.

I konačno: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -1) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -12$

te je $\det H(f)(-1, -1) = 128$ pa je i $(-1, -1)$ lokalni maksimum i vrijednost lokalnog maksimuma u $(-1, -1)$ opet iznosi $f(-1, -1) = 2$.

5 Wronskijan

Do sada smo upoznali Jacobijevu matricu i vidjeli njenu primjenu u rješavanju zadataka s dvostrukim integralima te Hesseovu matricu primijenjenu u računanju ekstrema funkcija više varijabli. U ovom poglavlju kratko ćemo opisati determinantu matrice Wronskog[3] koju nazivamo Wronskijan te pokazati njenu primjenu u rješavanju diferencijalnih jednadžbi drugog reda.
Iz linearne algebre znamo definiciju linearne nezavisnosti vektora.

Definition 7. Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$ su linearno nezavisni ako za sve skalare $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

U protivnom su vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ linearno zavisni.

Slično želimo definirati i linearnu nezavisnost derivabilnih funkcija jedne varijable.

Definition 8. Dvije funkcije y_1 i y_2 su linearno nezavisne na intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ako za skalare $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 0.$$

U protivnom su funkcije y_1, y_2 linearno zavisne.

Iz definicije vidimo da kada je $k_1 \neq 0$ ili $k_2 \neq 0$ možemo dobiti

$$y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2 \ \text{ili}\ y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1,$$

odnosno $y_1 = m y_2$ ili $y_2 = n y_1$ (y_1 i y_2 su proporcionalne funkcije).

Example 9. Funkcije $f(x) = 2\sin^2 x$ i $g(x) = 1 - \cos^2 x$ su linearno zavisne jer

$$(1)(2\sin^2 x) + (-2)(1 - \cos^2 x) = 0.$$

Osim ovoga, postoji i sistematičniji način ispitivanja linearne nezavisnosti funkcija. O tome govori sljedeća definicija i teorem.

Definition 10. Neka su $y_1, y_2 : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije. Funkcija

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

je determinanta Wronskog ili Wronskijan funkcija y_1 i y_2 .

Theorem 11. *Ako su funkcije y_1 i y_2 linearno zavisne na intervalu $\mathcal{I}$, onda je njihov Wronskijan identično jednak nula.*[4]

Example 12. Pokazati da su funkcije $f(x) = e^x$ i $g(x) = xe^x$ linearno nezavisne.

Izračunajmo Wronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

Kako Wronskijan nije nula, zaključujemo da su e^x i xe^x linearno nezavisne funkcije na svakom intervalu.

Vidjeli smo definiciju Wronskijana u slučaju $n = 2$. Za općeniti n, Wronskijan je determinanta

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Studenti matematičkih i tehničkih fakulteta Wronskijan najčešće susreću pri rješavanju homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi (DJ) drugog (ili višeg) reda. Homogene linearne DJ drugog reda su DJ oblika $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Znamo da ako su y_1 i y_2 dva rješenja takve jednadžbe, onda je i svaka njihova linearna kombinacija $c_1y_1 + c_2y_2$ takođ er rješenje te jednadžbe. No ako su funkcije y_1 i y_2 linearno nezavisne funkcije na nekom intervalu $\mathcal{I}$ onda je *opće* rješenje jednadžbe dano s $c_1y_1 + c_2y_2$.

Example 13. Riješiti DJ $y'' - y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

Funkcije $y_1 = e^x$ i $y_2 = e^{-x}$ su rješenja ove homogene linearne DJ drugog reda za sve $x \in \mathbb{R}$. Naime, direktnom provjerom za $y_1 = e^x$ dobijemo $(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$, a slično i za $y_2 = e^{-x}$. Njihova linearna kombinacija $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ je takođ er rješenje DJ. Iz početnih uvjeta dobijemo:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 4 \quad y'(0) = c_1 - c_2 = -2.$$

Rješenje ovog sustava je $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Time smo dobili rješenje DJ koje glasi

$$y = e^x + 3e^{-x}$$

koje je ujedno i opće rješenje jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^{-x} \\ e^x & -3e^{-x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0.$$

Primjedba. Da smo umjesto e^x i e^{-x} uzeli funkcije $y_1 = e^x$ i $y_2 = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$, te stavili $y = c_1 e^x + kc_2 e^x$ naše rješenje ne bi bilo opće jer su ovakvi y_1 i y_2 linearno zavisne funkcije (proporcionalne su).

6 Vandermondeova determinanta

Vandermondeova[5] determinanta je jedna od najpoznatijih eksplicitnih formula za neku determinantu u matematici. Retci Vandermondeove matrice su geometrijski nizovi. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ realni brojevi, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Matricu u oznaci $V_n(x)$ definiranu na način

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

nazivamo Vandermondeova matrica. Determinanta kvadratne matrice $V_n(x)$ je Vandermondeova determinanta. Njena vrijednost je polinom

$$\det(V_n(x)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Jedna od primjena Vandermondeove determinante je u određivanju interpolacijskog polinoma $p_n(x)$, n-tog stupnja koji će dovoljno dobro aproksimirati funkciju f za koju je poznato njeno djelovanje na konačnom skupu točaka, tj. znamo da je $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Example 14. Odrediti interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama $(1,2)$, $(5,3)$, $(-2,0)$, $(7,-1)$.

Ako $p_3(x)$ prikažemo u kanonskom obliku

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

tada treba odrediti koeficijente a_0, a_1, a_2, a_3 tako da vrijede uvjeti interpolacije

$$p_3(x_i) = y_i,\ i = 0,1,2,3,$$

tj.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 &= 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 &= 3 \\ a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 + a_3 \cdot (-2)^3 &= 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 7^2 + a_3 \cdot 7^3 &= -1. \end{aligned}$$

U matričnom obliku sustav možemo zapisati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 \end{bmatrix}}_{V} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}.$$

Cramerovim pravilom riješimo sustav,

$$a_i = \frac{D_i}{\det V},\ i = 0,1,2,3,$$

gdje je $\det V$ Vandermondeova determinanta, a D_i determinanta matrice koju dobijemo tako da se u matrici V $(i+1)$-vi stupac zamijeni vektorom $\vec{y}$. Odredimo Vandermondeovu determinantu

$$\det V = \prod_{1\le i<j\le 3}(x_j - x_i) = (7-1)(7-5)(7-(-2))(-2-1)(-2-5)(5-1) = 9072.$$

Odredimo vrijednosti determinanti D_i, te zapišemo rješenje sustava

$$a_0 = \frac{D_0}{\det V} = \frac{9996}{9072},\ a_1 = \frac{D_1}{\det V} = \frac{7734}{9072},\ a_2 = \frac{D_2}{\det V} = \frac{732}{9072},\ a_3 = \frac{D_3}{\det V} = -\frac{318}{9072}.$$

Sada možemo zapisati interpolacijski polinom

$$p_3(x) = \frac{1}{9072}\left(9996 + 7734x + 732x^2 - 318x^3\right).$$

7 Cayley-Mengerova determinanta

Studentima vjerojatno manje poznata determinanta od prethodno opisanih je Cayley-Mengerova[6] determinanta koja se koristi u linearnoj algebri, geometriji i trigonometriji. Predstavlja formulu za sadržaj (duljinu/površinu/volumen) n-dimenzionalnog simpleksa izraženu preko kvadrata udaljenosti svih parova vrhova simpleksa. U geometriji, simpleks je najjednostavniji politop koji se može formirati, odnosno generalizacija pojma trokuta ili tetraedra na proizvoljne dimenzije. Na primjer 0-dimenzionalni simpleks je točka, 1-dimenzionalni simpleks je segment (dio pravca), 2-dimenzionalni simpleks je trokut, a 3-dimenzionalni tetraedar.

Definition 15. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ vrhovi n-dimenzionalnog simpleksa u n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru. Neka je d_{ij} euklidska udaljenost izmeđ u vrhova A_i i A_j, $d_{ij} = \|A_i - A_j\|_2$. Tada se n-dimenzionalni sadržaj simpleksa v_n može izračunati iz sljedeće formule:

$$v_n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1(n+1)}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2(n+1)}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & \cdots & d_{3(n+1)}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{1(n+1)}^2 & d_{2(n+1)}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Determinanta u gornjoj definiciji je Cayley-Mengerova determinanta Δ. Vezu izmeđ u Cayley-Mengerove determinante i sadržaja n-dimenzionalnog simpleksa lakše uočavamo ako raspišemo determinantu za $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$.
Kako smo već napisali 1-dimenzionalni simpleks je dio pravca izmeđ u dvije točke A_1 i A_2. Tada je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2d_{12}^2 = 2v_1^2,$$

odnosno Cayley-Mengerova determinanta Δ je jednaka dvostrukom kvadratu udaljenosti izmeđ u dviju točaka.

Ako za $n = 2$ označimo $d_{12} = a$, $d_{13} = b$ i $d_{23} = c$ onda je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 - 2a^2b^2 + b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4.$$

Stavimo li $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ vrijedi

$$\Delta = -16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Iz Heronove formule znamo da je površina trokuta sa stranicama a, b i c jednaka $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Dakle, za $n=2$ Cayley-Mengerova determinanta je proporcionalna kvadratu poršine trokuta; $\Delta = -16v_2^2$. Za $n=3$ sadržaj 3-simpleksa (tj. volumen tetraedra) je dan s

$$v_3^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

U ovom radu smo opisali matrice i determinante s kojima se najčešće susreću studenti prve i druge godine i predavači matematike na fakultetima. Bez njih je teško i zamisliti bilo koje fakultetsko gradivo. Osim navedenih, brojne su druge zanimljive determinante kao što su Toeplitzova, Sylvesterova, Slaterova, Diudonneova, Hankelova, Pascalova, Cauchyjeva, ali one izlaze iz okvira ovog rada.

Bibliografija

[1] E. Kreyszig: *Advanced engineering mathematics*, 8th edition, 1999.

[2] T. Burić, L. Korkut, J.P. Milišić, M. Pašić, I. Velčić: *Vektorska analiza*, Element, Zagreb, 2014.

[3] I. Brnetić, V. županović: *Višestruki integrali*, Element, Zagreb, 2014.

[4] https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Supplemental

[5] http://www.mathematics.digital/matematika1/index.html

[6] http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/

[7] https://najeebkhan.github.io/blog/VecCal.html

[8] S. Kurepa: Matematička analiza III, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

[9] https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/mat2-pred9-novo.pdf

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Menger_determinant

[1]Carl Gustav Jacobi (1804-1851), njemački matematičar
[2]Ludwig Otto Hesse (1811-1874), njemački matematičar
[3]Jozef Maria Hoene-Wronski (1776-1853), poljski matematičar, filozof, fizičar i izumitelj
[4]Obrat nije nužno istinit, tj. postoje linearno nezavisne funkcije čiji je Wronskijan identički jednak nula. Obrat vrijedi kada su y_i rješenja linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda.
[5]Alexandre-Theophile Vandermonde (1735-1796), francuski matematičar, glazbenik i kemičar
[6]Arthur Cayley (1821-1895), britanski matematičar, Karl Manger (1902-1985), austrijsko-američki matematičar

ISSN 1334-6083