Osječki matematički list 23 (2023), 161–175

Descartes kontra Fermata, Fermat kontra Descartesa

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

Među najvećim matematičarima prve polovice 17. stoljeća zasigurno su Francuzi Réné Descartes i Pierre de Fermat. Iako su bili suvremenici, iz dobrih obitelji i pravnici po obrazovanju, bitno su im različiti životni putevi. Dok se Descartes u potpunosti posvetio filozofiji i matematici, Fermat je cijeli život ostao samo hobi-matematičar, a po profesiji pravnik. Nezavisno jedan od drugog razvili su i neke ekvivalentne matematičke ideje, konkretno ideju koordinatnog sustava i metode određivanja tangenti na krivulje. Njihov sukob oko korektnosti metoda određivanja tangenti jedan je od najznamenitijih sukoba u povijesti matematike. U ovom članku iznosimo mnoge detalje tog sukoba, ali i sadržaje spomenutih metoda te životopise ovih dvaju velikih matematičara.

Ključne riječi: *Réné Descartes, Pierre de Fermat, Marin Mersenne, analitička geometrija, tangenta na krivulju, diferencijalni račun*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

Franka Miriam Brückler

Descartes vs. Fermat, Fermat vs. Descartes

Abstract

Among the greatest mathematicians of the first half of the 17th century are certainly the Frenchmen Réné Descartes and Pierre de Fermat. Even though they were contemporaries, coming from good families, and lawyers by education, their life paths were significantly different. While Descartes devoted himself entirely to philosophy and mathematics, Fermat remained only a hobby-mathematician, and a lawyer by profession for all of his life. Independently of each other, they developed some equivalent mathematical ideas, specifically the idea of a coordinate system and methods of determining tangents to curves. Their conflict over the correctness of the methods of determining tangents is one of the most prominent controversies in the history of mathematics. In this article, we present many details of that conflict, as well as the contents of the mentioned methods and the biographies of these two great mathematicians.

Keywords: *Réné Descartes, Pierre de Fermat, Marin Mersenne, analytic geometry, tangent to a curve, differential calculus*

1 Uvod

U prethodnom članku [6] spomenuli smo da znameniti znanstvenici Descartes i Fermat (slika 1) nisu bili u prijateljskim odnosima, iako su se oba među ostalim bavili i prijateljskim brojevima. Ovaj put detaljnije ćemo se posvetiti odnosu tih dvaju velikana povijesti znanosti. Sličan, ali nipošto isti opis njihova sukoba, kao i sukoba mnogih drugih velikih matematičara u povijesti možete naći i u knjizi [4].

Slika 1. Portreti R. Descartesa i P. de Fermata (izvor: Wikipedija; *public domain*)

René Descartes i Pierre (de) Fermat bili su (očigledno, ta kako bi se inače sukobili?) suvremenici i to u postrenesansno, znanstveno izuzetno aktivno doba 17. stoljeća. U doba kad su djelovali algebra je već bila oformljena matematička disciplina, ali simbolika još nije bila u potpunosti ustaljena i formule njihova doba još nisu izgledale sasvim isto kao danas. Talijanski matematičari Niccolò Fontana Tartaglia (1500.–1557.) i Girolamo Cardano (1501.–1576.) našli su 1530-ih godina rješenja u radikalima jednadžbi 3. i 4. stupnja, no u 17. stoljeću nije još bilo poznato da takva rješenja ne postoje za više stupnjeve. Također, iako je François Viéte (1540.–1603.) krajem 16. stoljeća dao primjere polinomijalnih jednadžbi kojima je broj rješenja jednak stupnju, osnovni teorem algebre još nije bio poznat ni kao hipoteza. Opsežno računanje je tijekom renesanse postalo sve potrebnije u znanosti (posebice astronomiji), no jedino računsko pomagalo do doba djelovanja Descartesa i Fermata bile su logaritamske tablice, koje je 1614. uveo John Napier (1550.–1617.), a 1624. doradio, uvevši dekadske logaritme, Henry Briggs (1561.–1630.). Od Cardana i Rafaela Bombellija (1526.–1572.) poznata je bila i egzistencija kompleksnih brojeva, ali nije bilo poznato imaju li ikakav značaj osim teorijskog. Deriviranje i integriranje još nije bilo otkriveno, pa čak ni analitička geometrija, što je otežavalo daljnji napredak fizike nakon značajnih novih otkrića Galilea, Keplera, Stevina i drugih tijekom renesanse. Euklidska geometrija bila je jedini poznati, ali već dobro istraženi oblik geometrije. Teorija vjerojatnosti ni statistika također još nisu postojale: Iako su prvi matematički pristup pitanjima igara na sreću imali u 16. stoljeću Cardano i početkom 17. stoljeća Galileo, njihova razmišljanja postala su poznata tek nakon što će drugi[1] utemeljiti te discipline upravo u ovom, 17., stoljeću. Ukratko: Iako su matematika i fizika u renesansi, ponovnim otkrićem antičkih rezultata koji su u to doba „fuzionirani“ s mnogim novim rezultatima arapske srednjovjekovne znanosti, bitno napredovale i počele sličiti na modernu znanost, u doba kad su Descartes i Fermat djelovali (otprilike 1630.–1650., Fermat i nešto kasnije) mnogo toga što danas smatramo općim znanjem nije još bilo otkriveno ni utemeljeno [3, 10].

2 Descartesov i Fermatov život

René Descartes rođen je 31. ožujka 1596. godine u selu La Haye en Touraine (danas Descartes, Indre-et-Loire, slika 3) u obitelji pravnika i savjetnika parlamenta Bretagne, Joachima i supruge mu Jeanne. Imao je starijeg brata i sestru. Majka mu je umrla tijekom sljedećeg poroda (a i sin kojeg je tad

[1] Blaise Pascal i jedan od protagonista ovog članka, Pierre de Fermat (1654.).

porodila je isto odmah po porodu umro) kad je René imao tek trinaest i pol mjeseci. Rano djetinjstvo je proveo s bakom s majčine strane te prastricem. Bio je boležljivo dijete te mu je kad je, 1607., upisan u isusovačku gimnaziju u gradiću La Flèche, dozvoljeno — neuobičajeno s obzirom na strogost discipline u takvim školama u ono doba — do kasnog jutra ostajati u krevetu, a naviku kasnog ustajanja je zadržao i kasnije u životu. U toj je školi do 1614. stekao obrazovanje iz za ono doba uobičajenih sadržaja tzv. sedam slobodnih umijeća (trivija gramatike, retorike, dijalektike te kvadrivija aritmetike, geometrije, astronomije i teorije glazbe), ali i neke dodatne sadržaje iz metafizike, prirodne filozofije i etike. O njegovom životu u razdoblju 1614.–1618. nije puno poznato, no sigurno je da je 1616. stekao diplomu prava Sveučilišta u Poitiersu. Godine 1618., taman pri početku Tridesetogodišnjeg rata, upisao se u vojnu školu i zavojačio se u Bredi (Nizozemska). U toj je školi učio vojno inženjerstvo, ali je usput počeo proučavati i matematiku i mehaniku. Godinu kasnije ušao je u vojsku Bavarske i bio stacioniran u Ulmu. Dok je tamo boravio usnio je tri sna, za koja je bio uvjeren da ga božanski duh potiče da razvije novi pristup filozofiji [10, 7, 15].

Slika 2. Most u Descartesovom rodnom mjestu (izvor: Jalbatros@Wikipedia, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_pont.jpg`, licenca CC BY-SA 4.0, `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/`)

Godine 1620. izašao je iz vojske te je do 1628. putovao Europom. Dok je 1623. boravio u Parizu, uspostavio je kontakt s Marinom Mersenneom (1588.–1648.), redovnikom i znanstvenikom čija komunikacija sa svim značajnijim znanstvenicima tog doba je bila ključna za širenje novih znanstvenih ideja ne samo u Francuskoj. Kad se 1625. Descartes vratio u Pariz, obnovio je kontakt s Mersenneom, a Descartesov dom postao je okupljalište filozofa i matematičara. S vremenom se Descartesu sve manje sviđao glasan i užurban život Pariza te je odlučio nastaniti se negdje gdje se u miru i tišini može posvetiti znanosti. Tako se krajem 1628. nastanio u Nizozemskoj, a osim Mersenneu preko kojeg je zadržao kontakt s drugim matematičarima svoje novo prebivalište zadržao je u tajnosti. U Nizozemskoj je živio sve do pred kraj života i tu su nastala njegova znamenita filozofska i matematička djela [7, 10]. Descartes se nikad nije oženio, ali je (navodno) 1635. dobio izvanbračnu kćer, koja je umrla u dobi od pet godina [2].

Dobro je poznata priča o kraju Descartesova života: švedska kraljica Kristina s njim je 1646. započela korespondenciju o filozofskim pitanjima. Ta je korespondencija dovela do poziva da ju posjeti na njenom dvoru u Stockholmu. Descartes je onamo otputovao krajem 1649. No, kraljica Kristina je bila ranoranilac te je od Descartesa tražila sastanke za rasprave o filozofiji i znanosti u 5 sati ujutro. Descartes, naviknut na kasno ustajanje i nenaviknut na hladnu švedsku zimu, dobio je upalu pluća te je umro u Stockholmu 11. veljače 1650. Njegovi posmrtni ostaci kasnije su prevezeni u Francusku te danas počivaju u crkvi Saint-Germain-des-Prés u Parizu.

Slika 3. Fermatovo rodno mjesto (izvor: Didier Descouens@Wikipedia, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beaumont-de-Lomagne_-_Panorama.jpg`, licenca CC BY-SA 4.0, `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/`)

Slično kao i Descartes, Fermat je završio studij prava, ali se za razliku od Descartesa nikad nije posvetio isključivo znanosti. Rođen je (vjerojatno) 17. kolovoza 1601. u mjestašcu Beaumont-de-Lomagne na jugu Francuske, u obitelji bogatog trgovca kožom Dominique Fermata (slika 3). Imao je jednog brata i dvije sestre. Nije sa sigurnošću poznato gdje se školovao, no vjerojatno je to bilo u lokalnom franjevačkom samostanu. Studirao je pravo, isprva u Toulouseu i, možda, Bordeauxu, no diplomirao je 1631. u Orléansu. U drugoj polovici 1620-ih godina, tijekom boravka u Bordeauxu, zainteresirao se za matematiku i počeo se njome baviti, no do kraja života ostao je hobi-matematičar koji svoje matematičke rezultate nije objavljivao, nego samo zapisivao i razmjenjivao kroz korespondenciju s drugim matematičarima. Odmah nakon diplome prava postao je član *parlamenta* (jedne vrste sudske vlasti u tadašnjoj Francuskoj) u Toulouseu te je time stekao pravo na plemićki dodatak *de* u prezimenu: Od tada on je Pierre de Fermat. Iste, 1631., godine oženio se s jednom daljom rođakinjom, s kojom je imao osmero djece, od kojih je petero doživjelo odraslu dob. U Toulouseu je živio ostatak života, povremeno radeći i u drugim gradovima; s vremenom je napredovao u službama, prvenstveno zbog kriterija senioriteta. Umro je 12. siječnja 1665. u gradiću Castresu [2, 10, 15].

3 Optika i tangente

U matematici, Descartes je najpoznatiji po utemeljenju analitičke geometrije u trodijelnom prilogu *La Géométrie* znamenite filozofske rasprave *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637.). Zahvaljujući Descartesovom utjecajnom djelu *Discours de la méthode* i očiglednoj primjenjivosti, analitička geometrija vrlo brzo je postala poznata u znanstvenom svijetu te je po njemu, točnije po latiniziranoj verziji Cartesius njegova prezimena, dobio ime Kartezijev koordinatni sustav. Manje je poznato, ponajviše zato što svoje rezultate nije objavio za života, da je ideju i osnovne principe korištenja koordinatnog sustava neovisno o njemu u otprilike isto doba, možda i koju godinu ranije, razvio i Fermat; Fermatov rukopis na tu temu objavljen je tek 1679. [5, 8]. Ipak, analitička geometrija *nije* bila ni uzrok ni tema njihova sukoba.

S druge strane, Fermat je najpoznatiji po obnovi interesa za teoriju brojeva i razne rezultate i hipoteze teorije brojeva — sjetimo se samo malog i velikog Fermatovog teorema. Descartesov interes za teoriju brojeva nije bio toliko velik, iako je, kako smo rekli u [6], našao jedan par prijateljskih brojeva (a jedan je našao i Fermat). No, ni prijateljski brojevi nisu bili povod njihova sukoba.

Pa što je onda dovelo do sukoba? Sve je krenulo od optike, točnije rečeno od zakona loma svjetlosti: Na granici dvaju sredstava zrake svjetlosti se lome, pri čemu je omjer $v : \sin\theta$ konstantan (v je brzina svjetlosti u pojedinom sredstvu, a θ je kut upadne odnosno lomljene zrake svjetlosti prema normali na granicu sredstava). 1630-ih godina taj je zakon bio poznat, ali nije bio matematički precizno dokazan. Descartes je u sklopu svoje *Discours de la méthode* objavio esej *Dioptrique*, u kojem je iznio argumente u korist tog zakona, koristeći analogije s balistikom. Taj je rukopis prije nego je objavljen vidio Fermat, koji prije toga gotovo sigurno nije ni znao za Descartesa. Njemu je rukopis naime — bez da je za to imao dozvolu i vrlo vjerojatno jer ga je ukrao, ali to Fermat nije znao — pokazao Jean Beaugrand, kojemu se Descartes ranije bio zamjerio svojom kritikom njegove *Geostatike*. Na Mersenneovu zamolbu, danu vjerojatno s ciljem sprečavanja javnih kritika prije objavljivanja, Fermat je sročio pismo u kojem je iznio određene prigovore, bolje reći rezerve prema Descartesovim argumentima, bez ulaženja u detalje[2] i ističući da je sam tekst nakratko vidio. Mersenne je pismo nekoliko mjeseci zadržao za sebe, znajući Descartesov temperament. Naime, mogla se očekivati burna reakcija jer, što Fermat nije tada znao, nešto prije su i neki drugi znanstvenici iznijeli prigovore Descartesu da je plagirao Viètea, a uz to je Descartes već bio u lošem odnosu sa Gilles de Robervalom (1602.–1675.), koji je pak u to doba već redovno komunicirao s Fermatom. Ipak, zahvaljujući Mersenneovom kasnijem otkrivanju Fermatova pisma Descartesu i činjenici da je, opet zahvaljujući Mersenneu, Descartes već bio upoznat s jednim starijim Fermatovim rezultatom koji ga je upućivao na to da Fermat ima kapacitet shvatiti njegov pristup te ga se nadao pridobiti za svoje metode, prvi Descartesov odgovor nije bio tako žestok kako se Mersenne isprva pribojavao. Tako je Descartes, uvjeren da se radi o Fermatovom nerazumijevanju njegovih metoda, sročio i svoj odgovor [13, 9, 8].

Taj početni nesporazum ubrzo je prerastao u konflikt. U prosincu 1637. Fermat je Mersenneu proslijedio svoje rukopise u kojima iznosi svoje ideje analitičke geometrije i određivanja ekstrema. Znajući naravno za u međuvremenu objavljenu *La Géométrie* to je najvjerojatnije učinio da pokaže kako je i on imao ekvivalentne ideje i da istakne kako u *La Géométrie* nedostaje metoda određivanja ekstrema. S druge strane, nije vjerojatno da je Fermatov cilj bio dokazati svoje prvenstvo, jer je od početka do kraja ovog sukoba odbijao objavljivanje svojih rukopisa. To je pak zasigurno smetalo Descartesa, a i Mersennea, jer je Descartes inzistirao na objavljivanju svih kritika skupa s njegovim odgovorima na iste. U svakom slučaju, Mersenne je Fermatovo pismo prenio Descartesu, koji ga je pak doživio kao Fermatovo isticanje prvenstva. Uvidjevši ujedno da je Fermat više od običnog amatera, doživio ga je i kao konkurenciju. Još gore, zaključio je da je Fermat ne samo *Diptrique*, nego i *La Géométrie* vidio prije nego je trebao, tj. mislio je da da se radi o plagijatu. Kako je za Descartesa glupost nepravilnog plagijata nečega što se ne razumije bila gora od zločina pravilnog plagijata nečega što se razumije, Fermata je stavio u prvu kategoriju te je njegov

[2] Fermat je svoj znameniti Fermatov princip optike, iz kojeg slijedi navedeni zakon loma svjetlosti, razvio tek dvadesetak godina kasnije.

odgovor u siječnju 1638. sročen doduše još uvijek umjereno, ali u skladu s navedenim uvjerenjima. Tako Descartes kaže: „Ako ... on [Fermat] bude spominjao da vam želi poslati još radova, molim vas da ga zamolite da ih bolje promisli od prethodnih." [9, 12].

S tim se pismom, jer je u njemu Descartes komentirao kako ranije Fermatove prigovore na njegovu *Dioptrique*, tako i rukopise koje je u prosincu 1637. Fermat bio proslijedio Mersenneu, tema sukoba usmjerila s optike na određivanje tangenti. Naime, kao što smo rekli u uvodu, u doba života Descartesa i Fermata deriviranje i integriranje još nije bilo otkriveno. S druge strane, kao što je dobro poznato, tijekom renesanse fizika je počela znatno napredovati. Posebice, uočeno je da u prirodi — suprotno antičkoj grčkoj pretpostavci — postoje i krivulje koje nisu ni pravci ni kružnice (primjerice, elipse kao putanje planeta u Keplerovim zakonima), a analitička geometrija koju su utemeljili Descartes i Fermat pruža bitno jednostavniji i pregledniji pristup kompliciranijim krivuljama. Također, Simon Stevin (1548.–1620.) i drugi renesansni fizičari uočili su da su za opisivanje sila i brzina potrebne usmjerene veličine koje danas nazivamo vektorima. Posebno, pomalo se kristalizirala ideja da su vektori brzine tangencijalni na trajektorije te je pitanje određivanja tangente, koje danas rješavamo deriviranjem, postalo ne samo od matematičkog, nego i od fizikalnog interesa [5]. Time se pitanje određivanja tangente na krivulju pomaklo od starogrčkih konstrukcija ravnalom i šestarom na pitanje određivanje jednadžbe tangente u točki krivulje poznate jednadžbe:

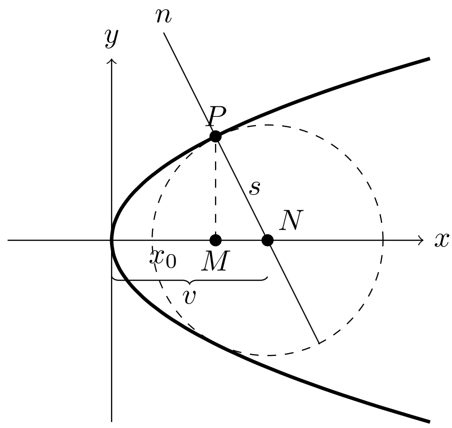
Ako je $f(x,y) = 0$ jednadžba ravninske krivulje K i ako je $P = (x_0, y_0)$ točka na njoj, dakle ako je $f(x_0, y_0) = 0$, kako glasi jednadžba tangente na K u P, tj. kako izračunati k i l u jednadžbi $y = k\,x + l$ te tangente?

I Descartes i Fermat su se nezavisno jedan od drugog bavili tim problemom i našli ekvivalentna, ali konceptualno i metodički različita rješenja kojima su postali prethodnici Newtonova i Leibnizova otkrića deriviranja nekoliko desetljeća kasnije.

3.1 Descartesova metoda određivanja tangente

Descartesova metoda svodi se na određivanje tzv. oskulacijske kružnice[3] krivulje u danoj točki te onda određivanje normale na tu oskulacijsku kružnicu. Tu je metodu u potpunosti algebrizirao za krivulje koje naziva geometrijskima (te krivulje danas nazivamo algebarskima) i opisao u *La Géométrie* [1, 11]. Algebraiziranu Descartesovu metodu opisat ćemo na konkretnom primjeru.

[3]Kružnice koja leži u istoj ravnini kao krivulja i koja u promatranoj točki ima istu zakrivljenost i tangentu kao krivulja.



Slika 4. Descartesova metoda određivanja normale na parabolu $y^2 = x$.

Primjer 3.1. *Neka je dana parabola*

$$y^2 = x$$

i točka $P = (x_0, y_0)$ na njoj (slika 4).[4] *Neka normala n na parabolu koja prolazi točkom P siječe os apscisa u točki $N = (v, 0)$ i neka je $|PN| = s$. Da bismo našli jednadžbu tangente, dakle okomice na normalu, potrebno je izraziti v preko x_0.*

Neka je $M = (x_0, 0)$ nožište okomice iz P na os apscisa, dakle je $\triangle MNP$ pravokutan te je, po Pitagorinom poučku,

$$(v - x_0)^2 + y_0^2 = s^2.$$

No, $(x - v)^2 + y^2 = s^2$ je jednadžba kružnice polumjera s sa središtem u točki N. Posebno, točka P je i na krivulji (paraboli) i na toj kružnici pa supstitucija jednadžbe krivulje $y^2 = x$ u jednadžbu kružnice daje

$$(x - v)^2 + x = s^2,$$

$$x^2 + (1 - 2v)x + v^2 - s^2 = 0.$$

Ova jednadžba mora imati jedinstveno rješenje x_0 jer je P u presjeku parabole i kružnice i jer je normala kroz P na parabolu jedinstvena. Stoga je ta jednadžba

[4]Descartes bi pisao (x, y). Dok je upravo on u *La Géométrie* uveo označavanje varijabli slovima s kraja abecede, a konstantni slovima s početka abecede, još nije imao posebnu simboliku za isticanje da je neka točka samo „privremeno" fiksirana.

oblika

$$(x - x_0)^2 = x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0,$$

dakle

$$1 - 2v = -2x_0,$$

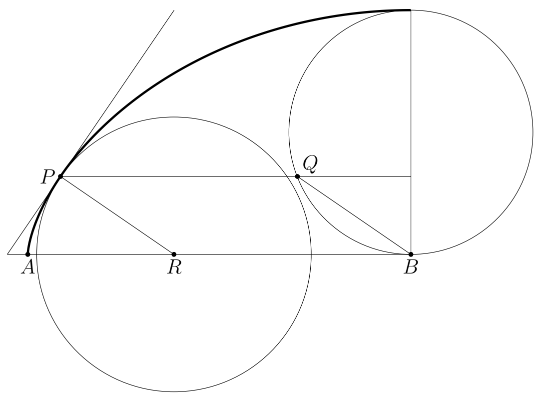
$$v = x_0 + \frac{1}{2}.$$

Slijedi da je koeficijent smjera normale jednak

$$\frac{y_0}{x_0 - v} = -2y_0,$$

odnosno koeficijent smjera tangente je

$$k = -\frac{1}{-2y_0}\left(= \pm\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right).$$

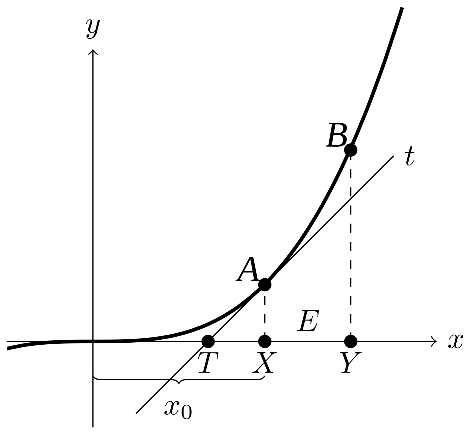


Slika 5. Descartesova konstrukcija tangente na cikloidu.

Kasnije je koristeći isti princip, ali čisto geometrijski opisao i određivanje tangente na transcendentnu krivulju cikloidu, trajektoriju točke na kružnici koja kotrlja po pravcu. Ta je krivulja u 17. stoljeću bila predmet interesa mnogih matematičara jer ima razna zanimljiva fizikalna svojstva i o njoj ćemo više reći u sljedećem broju. Kako je Descartes odredio tangentu na cikloidu? Neka je P točka cikloide u kojoj tražimo tangentu (slika 5). Neka je A početna pozicija te točke, te neka kružnica koja generira cikloidu dodiruje pravac po kojem se kotrlja u točki B kad se nalazi u položaju $*$ u kojem bi označena točka bila na najvišem položaju (dakle je AB pravac po kojem se kotrlja kružnica). Kroz P povučemo paralelu s AB i odredimo njezino sjecište Q s kružnicom u položaju $*$. Tada je paralela s QB povučena u P normala na cikloidu u točki P, njeno sjecište R s AB je središte oskulacijske kružnice, a okomica na PR u P je naravno tražena tangenta [5, 14].

3.2 Fermatova metoda određivanja tangente

Fermatova metoda određivanja tangenti sličnija je suvremenom pristupu, a otkrio ju je vezano za svoje istraživanje određivanja minimuma i maksimuma funkcija. Pritom je uočio da se minimumi i maksimumi funkcije[5] f postižu u onim točkama krivulje $y = f(x)$ u kojima su tangente horizontalne, tj. paralelne s x-osi, te ga je to dovelo do određivanja tangenti i u ostalim točkama krivulje.



Slika 6. Fermatova metoda određivanja tangente na krivulju $y = f(x)$.

Princip Fermatove metode je sljedeći: Neka je $A = (x_0, f(x_0))$ točka u kojoj tražimo tangentu $y = k\,x + l$ na krivulju $y = f(x)$ (slika 6). Ta tangenta siječe os apscisa u nekoj točki T. Uočimo da je

$$k = \frac{f(x_0)}{|TX|},$$

[5]Realne, derivabilne funkcije jedne realne varijable.

dakle cilj nam je odrediti $|TX|$. Za mali prirast E su $\triangle TXA$ i $\triangle TYB$ približno slični jer je $f(x_0+E) \approx k(x_0+E)+l$ (budući da je tangenta pravac koji najbolje aproksimira krivulju oko dane točke), dakle vrijedi

$$|TX| : (|TX|+E) \approx f(x_0) : f(x_0+E),$$

odnosno

$$|TX| \approx \frac{f(x_0)}{\frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}}.$$

Fermat nakon izračunavanja desne strane uzima $E=0$ (što se iz moderne perspektive svodi na izračunavanje limesa desne strane $\frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}$ kad $E \to 0$, tj. eksplicitno izračunavanje $f'(x_0)$ iz definicije) i tako dobiva $|TX|$.

Primjer 3.2. *Fermatovom metodom odredimo jednadžbu tangente na krivulju $y=x^3$ u nekoj njezinoj točki (x_0, x_0^3). U ovom slučaju je $|TX| : (|TX|+E) \approx x_0^3 : (x_0+E)^3$, dakle imamo redom*

$$|TX| \cdot (x_0^3 + 3x_0^2E + 3x_0E^2 + E^3) \approx |TX| \cdot x_0^3 + Ex_0^3,$$

$$|TX| \cdot (3x_0^2E + 3x_0E^2 + E^3) \approx Ex_0^3,$$

odnosno

$$|TX| \approx \frac{Ex_0^3}{3x_0^2E + 3x_0E^2 + E^3} = \frac{x_0^3}{3x_0^2 + 3x_0E + E^2}.$$

Sad uzimamo $E=0$ i dobijemo

$$|TX| = \frac{x_0^3}{3x_0^2} = \frac{1}{3}x_0,$$

odnosno koeficijent smjera tangente je

$$k = \frac{x_0^3}{\frac{1}{3}x_0} = 3x_0^2.$$

Naravno, sada kad imamo koeficijent smjera k jednadžbu tangente lako dobijemo koristeći formulu $y - y_0 = k(x - x_0)$ za određivanje jednadžbe pravca poznatog koeficijenta smjera kroz danu točku.

4 Nastavak sukoba

Vratimo se sada na razvoj sukoba Descartesa i Fermata. Kao što smo rekli, u siječnju 1638. Descartes je u pismu Mersenneu iznio prigovore Fermatovoj metodi. Pritom je tvrdio da metoda nije univerzalna i da za slučaj elipse i hiperbole daje pogrešne rezultate, a istaknuo je i nedovoljnu teorijsku podlogu Fermatove metode. Dok je taj prigovor u dobrom dijelu bio sasvim na mjestu, Descartes je prigovorio i da Fermatova metoda nije precizno opisan algoritam koji se skoro bez razmišljanja može primijeniti na različite slučajeve — no to Fermat niti je tvrdio niti je tako predstavio. Formulacija ovog pisma je dijelom sarkastična, a dijelom s visine; tako primjerice Descartes kaže da bi bilo bolje da taj pravnik iz Toulousea prvo pročita *La Géométrie* negoli uzme pero u ruke. U ovom pismu također Descartes izaziva Fermata da odredi tangentu na krivulju jednadžbe $x^3 + y^3 = p\,x\,y$ (koju danas nazivamo Kartezijevim listom) i uvjeren da to Fermat neće uspjeti[6] komentira da u tu svrhu Fermat neka prouči njegovu metodu u *La Géométrie* i da će pritom naći da ona uključuje i metodu određivanja ekstrema [1, 9].

Ono što iz našeg prethodnog opisa nije očito, ali je činjenica, je da u cijeloj priči Mersenne nije bio sasvim nevin. Primjerice, Beaugrand se prijevremeno dokopao *Dioptrique* samo zato što Mersenne nije dovoljno pazio na rukopis. Vjerojatno nenamjerno u više navrata svojim postupcima je „dolio ulje na vatru". To je posebno slučaj za postupak nakon što je dobio opisano Descartesovo pismo — umjesto da ga odmah proslijedi Fermatu, dao ga je Robervalu i Étienne Pascalu, ocu Blaisea Pascala, koji je također bio u redovnom kontaktu s Fermatom. Mersenne je možda samo htio poštediti Fermatove osjećaje, ali nije teško pogoditi što je Descartes, koji je već prije bio uvjeren da su Roberval i Pascal dio urote protiv njega u kojoj je Fermat samo figura, pomislio kad je umjesto od Fermata dobio odgovor od njih. Uslijedila je prepiska između Descartesa i njih u kojoj je, uz mnoštvo međusobnih uvreda i optužbi, vidljivo da Roberval i Pascal nisu bili u stanju obraniti Fermatovu metodu. štoviše, prepiska nije bila direktna — dok su se Roberval i Pascal obraćali Descartesu preko Mersennea, Descartes je (da se osigura da mu odgovori ne budu iskrivljeni) odgovarao šaljući pisma Claudeu Mydorgeu s molbom da zadrži originale, a proslijedi kopije. U proljeće 1638. Descartes je ujedno zatražio da se po ovom pitanju zatraži mišljenje Mydorgea, Claude Hardyja te Girarda Desarguesa (1591.–1661.), poznatog kao oca projektivne geometrije. Desargues u pismu Mersenneu u travnju 1638. tvrdi „G. Descartes je u pravu, a g. de Fermat nije u krivu" — cijeli sukob je samo nesporazum. Sam Fermat je pak svoju metodu objasnio i doradio u pismima Mersenneu u travnju, lipnju i srpnju 1638., iz kojih je vidljivo da u osnovi i on i Descartes tvrde isto. Već prije toga, u veljači, pisao je Mersenneu požalivši se na Descartesov oštar ton u pismu iz siječnja, ali i izrazivši spremnost da ne ulazi dalje u sukob ako to previše uznemiruje Descartesa. Descartes je na to, opet preko Mersennea uzvratio u pomirljivi-

[6] Fermat je rješenje tog zadatka zapisao nekoliko godina kasnije.

jem tonu, vjerojatno i zato što je u međuvremenu zasigurno primijetio kako opći miran pristup Fermata tako i činjenicu da se Fermat ne protivi nikojoj od njegovih osnovnih postavki. Nakon dodatnih Fermatovih objašnjenja u pismu iz svibnja, Descartes je stvar smatrao razriješenom i u srpnju je u pismu Fermatu rekao „vidjevši posljednju metodu koju koristite za nalaženje tangenti na krivulje, na nju ne mogu odgovoriti drugačije doli tako da kažem da je vrlo dobra i da, da ste ju na ovaj način objasnili odmah u početku, ne bih joj se nikad bio protivio" [9].

Time stvar ipak nije sasvim završila. Naime, Descartes je ispočetka pretpostavljao da Fermat nije imao dovoljan uvid u njegovu metodu, no na kraju se ispostavilo da ne samo da to nije točno, nego da je Fermatova metoda bila jednostavnija u primjeni. To vidimo i danas u modernom pristupu — Fermatova metoda je praktički identična računanju derivacija preko eksplicitnog izračunavanja definicijskog limesa. No, Descartesov ponos ga je spriječio da to i javno prizna te je usprkos spomenutom pomirljivom pismu Fermatu sljedećih godina i dalje napadao Fermata, primjerice 1640. u pismu Mersenneu govori da je Fermat nesposoban matematičar i mislioc. Posljedično su ne samo Descartes, nego i drugi nastavili tražiti precizni dokaz korektnosti metode od Fermata, što je potonji naposlijetku i učinio u pismu Pierre Brûlart de Saint-Martinu upućenom preko Mersennea u travnju 1643., iz kojeg se nazire da je već počeo oformljavati temeljne ideje diferencijalnog računa, no nikad ih kasnije nije razradio ni zapisao [9].

Da zaključimo: Descartes i Fermat svakako spadaju u važne neposredne prethodnike otkrića deriviranja, o njihovom ostalim doprinosima matematici da ne govorimo. No, iako je njihov sukob oko metode određivanja tangenti na krivulje u osnovi bio rezultat nesporazuma, Descartesova ponosa i poneke nesretne okolnosti, da ga nije bilo pitanje je bismo li danas imali uvid u Fermatovu metodu kakav nam je ostao u pismima u kojima postepeno argumentira i precizira istu.

Literatura

[1] Evelyne Barbin, *Universality versus generality: an interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat*. U K. Chemla, R. Chorlay, D. Rabouin (ur.), *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, str. 413–432. Oxford University Press, 2016.

[2] Brittanica. `https://www.britannica.com/`. Pristupljeno 2. 12. 2023.

[3] Franka Miriam Brückler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2014.

[4] Franka Miriam Brückler, *Matematički dvoboji*. Školska knjiga, Zagreb, 2011.

[5] Franka Miriam Brückler, *Geschichte der Mathematik Kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum, 2017.

[6] Franka Miriam Brückler, *Prijateljski brojevi*, Osječki matematički list, **23**(1) (2023), 73–81.

[7] Internet Encyclopedia of Philosophy, *René Descartes* (*1596–1650*). `https://iep.utm.edu/rene-descartes/`. Pristupljeno 30. 11. 2023.

[8] Shashank Kumar, *Fermat, Descartes, and The Dawn of Differential Calculus*. Cantor's Paradise. `https://www.cantorsparadise.com/fermat-descartes-and-the-dawn-of-differential-calculus-80472d35c0c1`, 2021.

[9] Michael Sean Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665*, Princeton University Press, 1994.

[10] MacTutor History of Mathematics Archives. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`. Pristupljeno 17. 10. 2023.

[11] Wilson L. Miser, *Descartes' Method of Tangents*, Mathematics News Letter **7** (1933) 16–21.

[12] Kenneth M. Monks, *Fermat's Method for Finding Maxima and Minima: A Mini-Primary Source Project for Calculus 1 Students*. `https://maa.org/book/export/html/3574832`, pristupljeno 8. 12. 2023.

[13] Jason Ross, *Descartes Did Not See the Light*. EIR 35 (2008.) 53–55, `https://larouchepub.com/eiw/public/2008/eirv35n15-20080411/eirv35n15-20080411_053-fermat_and_least_time_descartes.pdf`

[14] Gabriela R. Sanchis, *Historical Activities for Calculus — Module 2: Tangent Lines Then and Now*. Convergence, `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/historical-activities-for-calculus-module-2-tangent-lines-then-and-now`, 2014.

[15] Wikipedia (na engleskom). `https://en.wikipedia.org/wiki/`, pristupljeno 1. 12. 2023.