

## MATEMATIČKA KREATIVNOST: PREGLED METODA ZA POTICANJE I VREDNOVANJE KREATIVNOSTI

Ljerka Jukić Matić<sup>1</sup>, Diana Moslavac Bičvić<sup>2</sup>

Primljen: 3. 11. 2023.  
Prihvaćen: 22. 2. 2024.

*U 21. stoljeću kreativnost se, uz kritičko mišljenje, suradnju i komunikaciju, prepoznaje kao ključna vještina za pripremu učenika za buduće poslove i nepredvidive društvene izazove. Nije dovoljno samo poticati kreativnost u obrazovanju, već ju je važno i procjenjivati jer procjena kreativnosti pomaže u identifikaciji i razumijevanju kreativnih sposobnosti učenika. U ovom radu usmjerili smo se na matematičku kreativnost, povezujući ju s općim definicijama kreativnosti. Detaljno istražujemo i analiziramo metode koje potiču matematičku kreativnost i omogućuju njezino procjenjivanje, ističući inovacije koje proizlaze iz primjene tih metoda. Metode koje razmatramo usmjerene su na pristupe postavljanja i rješavanja problema, uključujući zadatke otvorenoga tipa. Rezultati pokazuju da te metode ne samo da potiču matematičku kreativnost učenika, već doprinose povezanijem matematičkom znanju i poboljšavaju sposobnosti rješavanja problema.*

**Ključne riječi:** matematička kreativnost; metode za vrednovanje matematičke kreativnosti; postavljanje problema; rješavanje problema; zadatci otvorenoga tipa

---

<sup>1</sup> Ljerka Jukić Matić, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, 31000 Osijek, Hrvatska; [ljukic@mathos.hr](mailto:ljukic@mathos.hr), <https://orcid.org/0000-0002-8947-6333>

<sup>2</sup> Diana Moslavac Bičvić, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Ul. cara Hadrijana 10, 31000 Osijek, Hrvatska; [dmoslavac@foozos.hr](mailto:dmoslavac@foozos.hr)

## 1. Uvod

Kreativnost, kao jedna od ključnih vještina 21. stoljeća, uz kritičko mišljenje, suradnju i komunikaciju, ističe se kao ključna u pripremi učenika za buduće poslove, nepredvidive društvene izazove i uporabu tehnologija koje još nisu izumljene (OECD, 2019a). Prepoznajući kreativnost kao vještinu koja potiče inovativno mišljenje i rješavanje problema u radnom okruženju, ona postaje središnjim elementom obrazovnih politika kako bi se povećala zapošljivost i globalna konkurentnost (Lucas *et al.*, 2013). U tom kontekstu, matematički kurikuli mnogih zemalja ne samo da prepoznaju kreativnost kao integralni dio matematičkoga obrazovanja nego i priznaju doprinos matematičke kreativnosti u poticanju dubokoga razumijevanja i praktične primjene matematike (Hadar i Tirosh, 2019). Unatoč njezinoj važnosti, prakse vrednovanja kreativnosti nisu usklađene s njezinim statusom, posebno kada se uspoređuju s drugim vještinama poput čitanja ili matematičkih kompetencija. Primjerice, standardizirani testovi, koji su često alat za ocjenjivanje matematičkih sposobnosti, zanemaruju kreativne komponente, ostavljajući prazninu u razumijevanju učeničkih kreativnih potencijala (Czarnocha, 2014). U svjetlu toga raskoraka, brojne međunarodne organizacije usmjerile su svoje napore prema inicijativama i programima koji vrednuju različite dimenzije kreativnosti (OECD, 2019b; Chu *et al.*, 2017). Jedan od izazova leži u preciznom definiranju kreativnosti, osobito kada se suočavamo s predrasudama koje kreativnost često povezuju isključivo s disciplinama poput glazbene i likovne umjetnosti. No, važno je da se kreativnost ne samo potiče nego i primjereno vrednuje unutar obrazovnoga procesa. Lucas *et al.* (2013) ističu važnost sustavnoga vrednovanja kreativnosti jer takva praksa pruža učiteljima dublje razumijevanje kreativnoga procesa, a učenicima omogućava konstruktivne povratne informacije, motivirajući ih za daljnje razvijanje kreativnih vještina. S druge strane, kvalitetno osmišljene procjene kreativnosti postaju most prema boljem razumijevanju obrazovnih iskustava. Kroz takve procjene, možemo izraditi sveobuhvatne kurikule, uključujući one matematičke, koji će jasno istaknuti ulogu kreativnosti unutar obrazovnoga konteksta (Beghetto i Kaufman, 2009), omogućujući tako učiteljima i roditeljima prepoznavanje i uvažavanje kreativnoga doprinosa svakoga učenika.

Rad je strukturiran na sljedeći način: na početku dajemo osvrt na kreativnost, a zatim na matematičku kreativnost usko je povezujući s poznatim definicijama kreativnosti. U nastavku se usredotočujemo na metode koje potiču matematičku kreativnost i omogućuju njezino vrednovanje te detaljno opisujemo i analiziramo odabrane metode u kontekstu postavljanja i rješavanja matematičkih problema, navodeći inovacije koje su rezultat uporabe tih metoda.

## 2. Kreativnost

Kako bismo razumjeli koncept matematičke kreativnosti, prvo razmotrimo višedimenzionalni pojam kreativnosti. Naime, kreativnost se može promatrati iz različitih perspektiva, kao što je filozofska, umjetnička, psihometrijska, obrazovna i druge. Uobičajeno se kreativnost povezuje s dva glavna značenja: (a) kreativnost kao proces stvaranja novih i originalnih djela u različitim područjima ljudskoga djelovanja i (b) kreativnost kao osobina ili skupina osobina koje doprinose, potiču ili izazivaju kreativan rezultat (Plucker i Beghetto, 2004). Primjerice, Csikszentmihalyi (1988) razlikuje kreativnost kao malo  $k$  (kreativnost) i veliko  $K$  (Kreativnost). Veliko  $K$  odnosi se na značajna znanstvena, tehnološka, društvena ili umjetnička dostignuća, dok je svakodnevna proizvodnja novih rješenja za male probleme primjer za malo  $k$  kreativnosti. S druge strane, promatrajući kreativnost kao osobinu, možemo ju promatrati kao kombinaciju divergentnoga i konvergentnoga mišljenja (Guilford, 1950). Konvergentno je mišljenje usmjereno na pronalaženje jednog rješenja problema, dok je divergentno mišljenje usmjereno na iznalaženje više raznovrsnih rješenja (Petz, 2005). Torrance (1974, u: Elgrably i Leikin, 2021) je ponudio psihometrijsku definiciju kreativnosti koja kombinira divergentno mišljenje i vještine rješavanja problema, ocjenjujući ih prema njihovoj fluentnosti (ukupan broj interpretabilnih, smislenih i relevantnih ideja generiranih kao odgovor na podražaj), fleksibilnosti (broj različitih kategorija relevantnih odgovora), originalnosti (statistička rijetkost odgovora među ispitanicima) i elaboraciji (količina detalja u odgovoru).

Danas se kreativnost često analizira koristeći se konceptualnim okvirom 4P koji je započeo Rhodes (1961, u: Runco, 2004). Rhodes je skupio različite definicije kreativnosti i uočio da se one ne isključuju,

već često preklapaju i međusobno prožimaju. Naglasio je da kreativnost nije jednostavna niti jednodimenzionalna; umjesto toga, kreativnost se može vidjeti kao karakteristika osobe, procesa, uvjeravanja ili proizvoda. Kada se govori o kreativnosti osoba, središte je na osobi kao pojedincu i njihovim karakteristikama (primjerice, znatiželja, intuicija, tolerancija na dvosmislenost, ustrajnost, otvorenost iskustvu, samostalnost...). Procesi se odnose na načine razmišljanja, tj. slijed misli ili akcija koje dovode do kreativnog produkta (primjerice Torranceove karakteristike fluentnost, fleksibilnost, originalnost i elaboracija—karakteriziraju kreativni proces). Rhodes upotrebljava riječ ‘pritisak’ tj. ‘uvjeravanje’ kako bi naglasio interakciju između pojedinca i okoline, tvrdeći da ljudi u vakuumu ne mogu biti kreativni; oni reaguju na vanjske pritiske (primjerice, pojedinac treba uvjeriti društvo u značaj svog rada te ukazati na korist i vrijednost njegovog kreativnog produkta za zajednicu). Četvrti aspekt, proizvod, usmjeren je na novost i pripisuje kreativnost ishodima ili proizvodima (primjerice, ideje ili teorije, ali i različite tehničke inovacije, novo jelo). Međutim, ti aspekti nisu odvojeni jedan od drugoga te Rhodes naglašava koliko je važno da istraživači jasno komuniciraju koje aspekte istražuju.

U pregledu literature o kreativnosti, Plucker i Beghetto (2004) ustanovili su da se gotovo sve definicije kreativnosti eksplicitno ili implicitno odnose na čin stvaranja nečega novog. Nadalje, ustvrdili su da su novost i korisnost, odnosno da su specifične, smislene, relevantne, prikladne i vrijedne kreacije, dvije temeljne komponente kreativnosti. S obzirom na te dvije komponente, u akademskim krugovima vode se polemike o transferu kreativnosti: neki stručnjaci smatraju da kreativnost u jednom području može sadržavati kreativnost u drugim područjima, dok drugi to osporavaju (Runco, 2004). Mogući transfer kreativnosti sporan je čak i između srodnih područja poput poezije i kratke proze (Collard i Looney, 2014). Važno je napomenuti da je ta debata posebno relevantna u kontekstu obrazovanja. Ako se kreativnost može prenijeti iz jednoga područja u drugo, obrazovne intervencije mogu se usmjeriti na jačanje općih kreativnih sposobnosti učenika. S druge strane, ako je kreativnost specifična za određeno područje, obrazovne strategije trebale bi biti usmjerene na razvijanje kreativnih vještina unutar pojedinih disciplina.

## 2.1. Matematička kreativnost

Matematičku kreativnost često povezujemo s produktivnim matematičarima znanstvenicima jer njihova profesija nužno uključuje identifikaciju i rješavanje novih i kompleksnih problema (Sriraman, 2005). Tako se matematička kreativnost može shvatiti kao sposobnost kreiranja praktičnih rješenja s pomoću matematičkoga modeliranja (Chamberlin i Moon, 2005) ili kao sposobnost za generiranje originalnih matematičkih ideja (Sriraman, 2009). Ključna istraživanja u području matematičke kreativnosti usko su povezana s radovima H. Poincaréa i J. Hadamarda (Sriraman, 2009). Hadamard (1945, u: Sriraman, 2009) je razvio Poincaréove (1945, u: Sriraman, 2009) ideje koristeći se Wallasovim konceptualnim okvirom kako bi oblikovao teoriju o fazama kreativnosti. Ta teorija do danas ostaje jedna od najdosljednijih i najuvjerljivijih u interpretaciji procesa matematičke inovacije. Wallas je kao gestalt psiholog razradio kreativni proces u četiri faze: priprema, inkubacija, iluminacija i verifikacija (1926, u: Kunac, 2015). Priprema je faza u kojoj se problem definira i priprema za rješavanje, inkubacija predstavlja razdoblje bez svjesnoga razmišljanja o problemu, iluminacija je trenutak u kojem se pojavljuje rješenje, dok je verifikacija faza provjere rješenja. Faza pripreme jest ključna za generiranje emocionalne napetosti koju olakšava kreativno prosvjetljenje, tj. iluminacija poznata još kao aha-trenutak. Silver (1997) je bio kritičan prema naglašavanju spontane iluminacije ako je to značilo zanemarivanje vrijednosti napornoga rada i obrazovanja. Naglašavao je da je matematička kreativnost rezultat dugih razdoblja rada i razmišljanja koje postaje sve fleksibilnije tijekom toga vremena, a ne samo proizvod izoliranih aha-trenutaka.

Haylock (1987) je definirao matematičku kreativnost u školskom kontekstu kao sposobnost divergentnog mišljenja unutar matematičkih situacija. No, u suvremenim empirijskim istraživanjima iz područja matematičkoga obrazovanja identificirano je pet glavnih poimanja kreativnosti (Joklitschke *et al.*, 2022): (1) kreativnost kao kombinacija fluentnosti, fleksibilnosti i/ili drugih karakteristika kao originalnosti, novosti, korisnosti; (2) kreativnost kao divergentno mišljenje; (3) kreativnosti kao slijed faza; (4) kreativnost kao kreativno matematičko zaključivanje te (5) kreativnost temeljena na osobi, proizvodu, procesu i/ili uvjeravanju. Joklitschke *et al.* (2022) ističu da najjasnija veza postoji između kreativnosti kao kombinacije fluentnosti, fleksibilnosti,

originalnosti i kreativnosti kao divergentnoga mišljenja. Ta se veza temelji na zajedničkoj teorijskoj osnovi koja seže do Guilforda (1950) i Torrancea (1974, u: Elgrably i Leikin, 2021). Poimanje kreativnosti kao slijeda faza potječe iz matematike, a u njemu se očituje utjecaj Hadamarda (1945, u: Sriraman, 2009). Poimanje kreativnosti kao kreativnog matematičkog zaključivanja definirao je Lithner (2008), oslanjajući se na Silverov (1997) i Haylockov (1987) koncept divergentnog mišljenja, dok je implicitno prisutan utjecaj Guilforda (1950). Poimanje kreativnosti temeljeno na osobi, proizvodu, procesu i/ili pritisku, tj. model 4P, ima dvostruku funkciju: s jedne strane povezuje sva poimanja kreativnosti, a s druge strane predstavlja poimanje kreativnost u slijedu faza kao zaseban pojam koji se odnosi na posebna svojstva jednoga ili više aspekata 4P (Joklitschke *et al.*, 2022).

U školskom okruženju matematička kreativnost bitno se razlikuje od one prisutne u znanstvenoj matematici; matematička kreativnost u školi procjenjuje se u odnosu na prethodna iskustva i izvedbu drugih učenika sa sličnim obrazovnim okruženjem (Sriraman, 2005). Naime, na školskoj razini od učenika se obično ne očekuju djela izuzetne kreativnosti, no učenici su sposobni ponuditi nove i pronicljive uvide u matematički problem (Leikin, 2009). Silver (1997) je smatrao da se matematička kreativnost može podučavati i oblikovati. S tim se slaže i Grégoire (2016) koji ističe da je važno stvoriti okruženje koje potiče kreativnost jer postoji veza između kreativnoga potencijala (osobina i intelektualnih sposobnosti pojedinca), obrazovanja, okoline i kreativne izvedbe.

### **3. Metode koje potiču i omogućuju procjenu matematičke kreativnosti**

U kontekstu obrazovanja, procjena ili vrednovanje kreativnosti služi kao sredstvo za identifikaciju i razumijevanje kreativnih potencijala među učenicima (Suherman i Vidakovich, 2022). Cilj je ne samo prepoznati kreativna rješenja ili metode rješavanja nego i razumjeti kako učenici pristupaju kreativnosti i razvijaju svoje kreativne vještine. Poimanje matematičke kreativnosti s obzirom na fluentnost, fleksibilnost i originalnost omogućuje procjenu *proizvoda* kreativnosti, dok se poimanje kreativnosti kao divergentnoga mišljenja, uglavnom odnosi

na *procesu* ili *karakteristike* ljudi i više je usmjereno na karakterizaciju kreativnosti (Leikin, Roza i Pitta-Pantazi, 2013). S obzirom na postojanje izrazito bliske veze između tih dvaju poimanja kreativnosti, Jolischke *et al.* (2022) identificiraju fluentnost, fleksibilnost, originalnost i elaboraciju kao elemente divergentnoga mišljenja i ističu da primjena tih elementa omogućuje procjenu *procesa* matematičke kreativnosti.

Bicer (2021) je u svom radu dao pregled istraživanja u kojima su predložene metode za poticanje kreativnosti učenika u matematici. Nastavne metode koje su identificirane odnose se na: rješavanje problema, postavljanje problema, zadatke otvorenoga tipa, zadatke s višestrukim rješenjima, zadatke s višestrukim načinom rješavanja, modeliranje i aktivnosti stvaranja modela, integracija tehnologije (konkreta, računala i grafičkih kalkulatora), zadatke proširivanja i naglašavanje apstraktnosti matematike. Iz naše perspektive, većina kategorija koje je Bicer (2021) pronašao u sustavnom pregledu mogu se integrirati na način koji opisujemo dalje u radu. Stoga, naš pregled literature kombinira koncepte postavljanja i rješavanja problema s konceptom zadataka otvorenoga tipa. Štoviše, zadatci otvorenoga tipa mogu se promatrati kao sveobuhvatna kategorija koja uključuje tri glavna tipa problema koji se temelje na otvorenosti početne situacije (zadan je cilj, a početna situacija nije), otvorenosti ciljne situacije (zadana je početna situacija, a nije zadan cilj) definirane zadatkom te kombinacije otvorenosti početne situacije i otvorenosti ciljne situacije (nije zadana ni početna situacija niti cilj, ali su zadani neki podatci) (Leikin, 2018; Pehkonen, 1997). Rad na takvim zadacima može se prepoznati kao postavljanje i rješavanje problema.

### **3. 1. Matematička kreativnost i rješavanje problema**

Rješavanje problema prepoznato je kao ključna komponenta matematičkoga obrazovanja tijekom posljednjih triju desetljeća, a u 21. stoljeću ističe se kao sredstvo poticanja matematičke kreativnosti jer su kreativnost i sposobnost rješavanja problema usko povezani (Silver, 1997). Runco (2004) vidi kreativnost kao ključnu komponentu u rješavanju problema jer kreativno mišljenje znači gledanje izvan uobičajenih okvira, pronalaženje novih rješenja i stalno preispitivanje onoga što znamo. Kako Runco i Sakamoto (1999) naglašavaju, način na koji vidimo i opisujemo problem može utjecati na to koliko smo kreativ-

ni u njegovu rješavanju. U matematici je važno znati kada se koristiti poznatim metodama, a kada se osloniti na kreativnost jer matematička kreativnost nije samo pitanje inventivnosti nego i sinteza konvergentnoga (fokusiranog) i divergentnoga (otvorenog) mišljenja (Pehkonen, 1997). Stoga, poticanje kreativnosti u matematičkom obrazovanju stvara fleksibilne i inovativne mislioce spremne za razne izazove. Za posebne vrste problema kreirani su modeli kojima se može procjenjivati matematička kreativnost. Takve su vrste problema zadatci otvorenoga tipa što opisujemo i proučavamo u nastavku. Zadatci otvorenoga tipa imaju prednost pred onim što nazivamo ‘klasičan problem’ jer nailaze na manji otpor kod učenika (Russo i Minas, 2020).

### 3.1.1. Zadatci s višestrukim načinom rješavanja

Zadatci s višestrukim načinom rješavanja (eng. *multiple solution task*, MST) matematički su zadatci otvorenoga tipa koji sadrže *izričit zahtjev da se riješe na što više načina*, različitim metodama. Leikin (2009) je rabila takve zadatke kako bi uvela operativnu definiciju matematičke kreativnosti u školskom kontekstu: matematička kreativnost može se smatrati (mentalnom) fleksibilnošću (1) za rješavanje određenoga problema s više metoda, (2) za primjenu strategija iz različitih matematičkih domena i (3) za stvaranje domišljatih rješenja za dani problem. U nastavku dajemo primjer MST-a preuzet iz Tabach i Friedlander (2013):

Kino nudi dvije vrste ulaznica:

- Ron je član kino kluba i plaća članarinu 240 \$ godišnje i 10 \$ za svaki film koji pogleda.
- John nije član kino kluba i plaća 25 \$ za svaki film koji pogleda.

Tijekom cijele godine Ron i John pogledali su iste filmove i iznenadili su se kada su otkrili da su obojica platili isti ukupni iznos. Koliko je filmova svaki od njih pogledao te godine? Objasnite svoje rješenje. Zadatak riješite na više različitih načina.

Naslanjajući se na Torranceov pristup, Leikin je razvila model za vrednovanje matematičke kreativnosti primjenom MST zadataka. Da bi se mogla procijeniti matematička kreativnost pojedine osobe, potrebno je razmotriti tri vrste prostora rješenja danoga MST zadataka (Leikin, 2009): individualni, kolektivni i ekspertni. Individualni prostor rješenja



predstavlja sva rješenja koja je neka osoba generirala; prostor kolektivnoga rješenja predstavlja rješenja koja je generirala skupina sudionika; ekspertni prostor rješenja predstavlja rješenja koja su izradili stručnjaci matematičari (Levav-Waynberg i Leikin, 2012). Model koji je kreirala Leikin (2009) uključuje shemu bodovanja temeljenu na trima kriterijima: fluentnost, fleksibilnost i originalnost. Fluentnost se procjenjuje kao broj svih odgovarajućih metoda rješavanja u individualnom prostoru rješenja nekoga učenika. Fleksibilnost ( $Flx_i$ ) se procjenjuje prema broju različitih pristupa rješavanju problema unutar učenikova individualnoga prostora rješenja. Originalnost učenikove metode rješavanja ( $Or_i$ ) mjeri se time koliko je rijetka ta metoda unutar prostora kolektivnoga rješenja odnosno skupine kojoj učenik pripada. Učenikov ukupni rezultat originalnosti na problemu jest zbroj originalnosti metoda rješavanja u učenikovom individualnom prostoru za rješavanje. Kreativnost pojedine metode rješenja ( $Cr_i$ ) umnožak je njezine originalnosti i fleksibilnosti ( $Cr_i = Flx_i \cdot Or_i$ ). Ukupni rezultat kreativnosti učenika na MST-u zbroj je rezultata kreativnosti za svaku metodu rješavanja u individualnom prostoru rješenja.

Neki su istraživači doveli u pitanje model koji je osmislila Leikin, pitajući se treba li uopće kombinirati ta tri rezultata i treba li nekoj komponenti dati veću težinu pri procjeni kreativnosti (Levenson *et al.*, 2018; Molad *et al.*, 2020). Unatoč tomu, MST je rabljen za proučavanje i poticanje matematičke kreativnosti učenika u raznim istraživanjima. Primjerice, longitudinalna studija Levav-Waynberg i Leikin (2012) istraživala je dugoročni učinak MST-a na učenje geometrije i na komponente matematičke kreativnosti. Usporedba između kontrolne i eksperimentalne skupine pokazala je da sustavna provedba MST-a u nastavi geometrije poboljšava razumijevanje geometrije, ostvaruje povezanije i koherentnije znanje te povećava fluentnost i fleksibilnost učenika u rješavanju zadataka. Dodatno, MST se pokazao učinkovitim za razvoj sposobnosti rješavanja problema. Tabach i Friedlander (2018) u svojem su istraživanju upotrijebili MST zadatke kako bi potaknuli učenike na uporabu mišljenja više razine u kontekstu algebarskih postupaka. Ti zadatci uključivali su simboličke manipulacije algebarskih izraza i rješavanje jednadžbi, integrirajući proceduralno znanje i konceptualno razumijevanje. Rezultati istraživanja pokazali su značajne pomake u matematičkoj kreativnosti učenika, s posebnim naglaskom na visoku

razinu fluentnosti i fleksibilnosti. U drugom kontekstu, MST je iskorišten za analizu kreativnih procesa tijekom rješavanja matematičkih problema, pružajući uvid u to gdje je smještena iluminacija unutar kreativnoga procesa i koji se mehanizmi aktiviraju kod nastanka inovativnih ideja (Schindler i Lilienthal, 2020).

### 3.1.2. Zadatci s višestrukim rješenjima

Zadatci s višestrukim rješenjima (eng. *multiple outcome tasks*, MOT) predstavljaju zadatke otvorenoga tipa koji od pojedinaca traže da generiraju *što veći broj rješenja*. Za analizu komponenti matematičke kreativnosti rabeći MOT zadatke, Molad *et al.* (2020) predlažu sljedeće: procjenu fluentnosti na temelju broja točnih odgovora, procjenu fleksibilnosti na osnovi kategorizacije odgovora te procjenu originalnosti temeljenu na učestalosti i domišljatosti. Općenito, originalnim se smatra odgovor koji je prisutan u 15 % ili manje rješenja. U nastavku dajemo primjer MOT-a preuzet iz studije iz studije Molad *et al.* (2020):

Zadatak 1. Nacrtajte što više različitih likova čija je površina 15 kvadratnih jedinica.

Zadatak 2. Na svakoj geoploči nacrtajte mnogokut čija je površina 2 kvadratne jedinice tako da niti jedan od nacrtanih mnogokuta nije međusobno sukladan.

Kako Levenson *et al.* (2018) ističu, MOT zadatci pružaju izvanredne prilike za poticanje fleksibilnoga mišljenja u matematičkom okruženju, posebno u osnovnoj školi. Naime, u osnovnim školama razredi su često heterogeni, a učenici imaju različite sposobnosti i predznanja. MOT zadatci nemaju unaprijed određeni ekspertni prostor rješenja te omogućuju procjenu kreativnosti s obzirom na rezultate prikupljene u određenom okruženju.

MOT zadatci rabljeni su za ispitivanje matematičke kreativnosti učenika viših razreda osnovne škole u individualnom i suradničkom okruženju (Molad *et al.*, 2020). Oni učenici koji su radili u skupini pokazali su veću fluentnost i fleksibilnost, ali ne i originalnost. Nalaz o suradnji jedan je od najvažnijih ishoda studije; učenici koji su radili u skupini stekli su dodatna matematička znanja koja su im kasnije pomogla u samostalnom radu. Ti su učenici imali priliku naučiti o različitim konceptima i strategijama rješavanja problema, kritički ispitati različite

načine razmišljanja i steći dublje razumijevanje matematičkih koncepata. Levenson i Molad (2022) upotrijebili su MOT zadatke kako bi ispitali matematičku kreativnost u suradničkom okruženju. Prema njihovoj studiji, suradničke skupine mogu generirati nova, neočekivana rješenja. Kada skupina učenika surađuje, kolektivna fleksibilnost može se značajnije poboljšati. Štoviše, i kolektivna fluentnost poboljšava se kada u skupini postoje učenici različitih karakteristika i kada oni surađuju tako da svatko nečim može doprinijeti.

Tabach i Levenson (2018) naglašavaju da ključ uspješnoga rješavanja MOT zadataka leži u kombiniranju divergentnoga i konvergentnoga mišljenja, što može dovesti do otkrića novih strategija i pristupa problemima. S obzirom na sve navedeno, važno je prepoznati potencijal MOT zadataka u kontekstu nastave matematike. Oni ne samo da pružaju priliku za poticanje i procjenu kreativnosti kroz konvergentno i divergentno mišljenje nego i omogućuju razvoj kritičkoga mišljenja i fleksibilnosti kod učenika.

### 3.1.3. Zadatci modeliranja

Matematičko modeliranje posebna je vrsta rješavanja problema u kojima se rješavaju matematički problemi povezani sa svakodnevnim životnim situacijama (Voskoglou, 2021). Također, zadatci modeliranja predstavljaju složene, otvorene i nekonvencionalne probleme koji se oslanjaju na razne kontekste iz stvarnoga svijeta, a prikladni su za učenike različitih razina (Wessels, 2014). Problemi vezani uz matematičko modeliranje često se odlikuju različitim stupnjevima otvorenosti i (ne) određenosti odnosno karakteriziraju ih podatci koji nedostaju (npr. nemaju jasne upute na koji način riješiti zadatak) pa učenici moraju sami stvoriti vlastite pretpostavke o načinu rješavanja (vidi primjerice Sliku 3). Ta svojstva pružaju učenicima fleksibilnost u pristupu problemu, omogućavajući im da istraže različite metode i dođu do širokoga spektra rješenja (Schukajlow *et al.*, 2015). Otvorenost i neodređenost zadanoga problema potiču učenike na kreativnost, potrebu za pojednostavljenje kompleksnih situacija i stvaranje prikladnih pretpostavki. U cijeli postupak modeliranja moguće je integrirati kreativnost; naime može se vrednovati ne samo opća kompetentnost modeliranja nego i specifične

komponente kreativnosti s naglaskom na originalnost. U nastavku prikazujemo primjer zadatka modeliranja preuzet iz Lu i Kaiser (2022a):

Gospodin Lin živi u Šangaju. Najbliža benzinska postaja u Šangaju udaljena je 20 km od njegovog doma, a najbliža u Soochowu udaljena je 80 km. Gospodin Lin obično se vozi u Soochow kako bi natočio gorivo u svoj Volkswagen CC1.8T jer je cijena goriva 7.61 RMB/L na benzinskoj postaji u Soochowu, a 8.04 RMB/L na postaji u Šangaju.

U tablici su dane neke informacije o automobilu gospodina Lina CC1.8T:

Visina × Duljina × Širina	4799 × 1855 × 1417	Masa automobila (kg)	1535
Potrošnja goriva (L/100km)	7.8	Zapremina spremnika za gorivo (L)	70
Jamstvo	2 godine 60 000 km	Zapremina prtljažnika (L)	532

Ispitati li se gospodinu Linu natočiti benzin u Soochowu? Iznesite svoje mišljenje i obrazložite.

Lu i Kaiser (2022a) razvili su model za vrednovanje matematičke kreativnosti u kontekstu matematičkoga modeliranja. Uvažavajući specifičnosti matematičkoga modeliranja, integrirali su korisnost kao posebnu kreativnu komponentu. No, izostavili su fleksibilnost, smatrajući da je njezino vrednovanje izazovno zbog mogućih modifikacija i prilagodbi u procesu modeliranja. Model za vrednovanje kreativnosti u zadacima modeliranja sastoji se od triju ključnih komponenti: korisnosti, fluentnosti i originalnosti. Korisnost se fokusira na vrednovanje učinkovitosti pristupa kojima se učenici koriste prilikom modeliranja. Fluentnost se odnosi na sposobnost generiranja različitih rješenja. Originalnost se vrednuje prema jedinstvenosti matematičkih pristupa koje učenici rabe u odnosu na ostale učenike u skupini koja se promatra. Jedinstveni matematički pristupi oni su koji se pojavljuju kod manje od 10 % učenika.

Osim samoga modela vrednovanja, važno je analizirati i praktične rezultate njegove primjene. Rezultati studija u kojima su rabljeni zadaci modeliranja s fokusom na kreativnost (Lu i Kaiser, 2022a, 2022b) pokazali su izraženu povezanost kompetencija modeliranja i različitih aspekata kreativnosti kao što su korisnost i fluentnost. Lu i Kaiser

(2022a) smatraju da taj pristup ne doprinosi samo sveobuhvatnoj procjeni strategija modeliranja nego i preciznijem vrednovanju specifičnih podkompetencija vezanih za modeliranje. Stoga, zadatci modeliranja imaju značajne implikacije za obrazovne prakse, posebno u kontekstu razvijanja kreativnih vještina učenika unutar STEM područja.

### **3.2. Matematička kreativnost i postavljanje problema**

Postavljanje problema može se opisati kao proces gdje učenici stvaraju vlastite interpretacije određenih situacija te ih oblikuju u matematičke probleme temeljeći se na svojim prethodnim matematičkim iskustvima (Stoyanova i Ellerton, 1996). U tom kontekstu, pojedinac treba kreirati formulacije problema, koje mu predstavljaju novost, koristeći se zadanim uvjetima (Silver *et al.*, 1996). Dakle, postavljanje problema može se shvatiti kao oblik zadatka otvorenoga tipa (Klein i Leikin, 2020; Pehkonen, 1995). Stoyanova i Ellerton (1996) identificirali su tri vrste situacija postavljanja problema: slobodno — stvaranje problema bez ograničenja ili u širokom rasponu situacija; polustrukturirano — dovršavanje otvorenoga scenarija koristeći se prethodnim matematičkim znanjem i iskustvom; i strukturirano — preoblikovanje prethodno riješenoga problema ili mijenjanje uvjeta ili pitanja zadanih problema.

Postavljanje problema nosi sa sobom brojne prednosti. Primarno, to je snažan alat za procjenu učeničkoga znanja. Stvaranje smislenoga matematičkog problema može pokazati učeničko razumijevanje matematičkih koncepata, dok problemi koji su loše osmišljeni mogu uputiti na slabije razumijevanje (npr. Chang *et al.*, 2011). Dobro definiran problem sadržava sve nužne informacije i kontekstualne detalje. Ako učitelji omoguće učenicima da postavljaju probleme, mogu dobiti dragocjen uvid u alternativna matematička gledišta učenika i njihovo prethodno znanje (Kılıç, 2017). Osim toga, poticanje učenika na postavljanje problema ne samo da pojačava njihove vještine rješavanja problema nego ih i više angažira u stvarnim matematičkim aktivnostima te ih motivira za prihvaćanje novih ideja i metoda (Singer i Voica, 2017).

Veza između postavljanja problema i matematičke kreativnosti također je privukla više pozornosti posljednjih godina. Postavljanje problema predstavlja zadatak otvorenoga tipa, stoga može poslužiti kao

metoda za poticanje kreativnosti, posebno kada postoji izričit zahtjev da osoba koja postavlja problem *postavi što više problema za danu situaciju*. Pri postavljanju problema učenici se moraju koristiti kreativnim mišljenjem i dubljim razumijevanjem matematičkih koncepata nego što je to pri rješavanju tekstualnih zadataka (Bevan i Capraro, 2021). To zahtijeva da učenici razmišljaju kritički i fleksibilno. Prema Bonotto i Dal Santo (2015), polustrukturirane ili nestrukturirane situacije potiču matematičku kreativnost više od strukturiranih jer takve situacije potiču osjetljivost učenika na problem.

Iako u tom kontekstu razlikujemo postavljanje problema od rješavanja problema, istraživanja poput onih Browna i Waltera (2005) sugeriraju da je postavljanje problema povezano s rješavanjem problema. Stoga nije iznenađujuće da aspekti matematičke kreativnosti evidentni prilikom rješavanja problema, poput fluentnosti, fleksibilnosti i originalnosti, mogu biti identificirani i tijekom postavljanja problema. Van Harpen i Sriraman (2013) koristili su se upravo tim komponentama za vrednovanje kreativnosti. Fluentnost se može odnositi na broj postavljenih problema, fleksibilnost na raznolikost postavljenih problema (npr. u smislu različitih matematičkih ideja ili strategija koje treba primijeniti), a originalnost na rijetkost postavljenih problema u usporedbi s rješenjima iste skupine učenika (problem nije originalan ako ga je predložilo 10 % ili više sudionika u toj skupini). Samostalne učeničke procjene prikladnosti vlastitih kreiranih problema mogle bi biti još jedan koristan pokazatelj njihove kreativnosti (Kontorovich *et al.*, 2012).

O kreativnosti kao rezultatu postavljanja problema također se raspravljalo iz perspektive organizacijske teorije, rabeći okvir kognitivne fleksibilnosti (Singer *et al.*, 2017; Singer i Voica, 2017). Kognitivna fleksibilnost odražava sposobnost pojedinca da prilagodi svoje metode rada u skladu sa zahtjevima zadataka. Ključne karakteristike kognitivne fleksibilnosti uključuju kognitivnu raznolikost (broj različitih postavljenih problema), kognitivnu novost (broj jedinstvenih pristupa problemu) i promjene u načinu sagledavanja problema (Singer i Voica, 2017). Važno je napomenuti kako osoba može biti sklonija kognitivnom uokvirivanju, tj. sagledavanju problema temeljenom na prethodnim iskustvima, naročito ako su bila uspješna. To se manifestira upornošću u primjeni već uvježbanih strategija prilikom suočavanja s novim problemima, kao u sljedećem primjeru preuzetom iz Singer i Voica (2015):

### 1. Aktivnost postavljanja problema

- a) U kutijama za nakit princeze Ružice nalaze se safiri, smaragdi i rubini. 27 dragulja nisu rubini, 31 nisu smaragdi, a 32 nisu safiri. Ukupno ima 45 dragulja. Koliko dragulja svake vrste ima princeza Ružica?

### 2. Aktivnost postavljanja problema

- a) U kutijama za nakit princeze Ružice nalaze se safiri, smaragdi i rubini. 39 dragulja nisu rubini, 61 nisu smaragdi, a 50 nisu safiri. Ukupno ima 75 dragulja. Koliko dragulja svake vrste ima princeza Ružica?
- b) U kutiji se nalazi 75 kuglica, žute, crvene i plave. Od toga je ukupno 39 crvenih i žutih kuglica, 61 plavih i crvenih, te 50 plavih i žutih kuglica. Koliko je kuglica svake boje u kutiji?

U ekstremnim slučajevima to može dovesti do algoritamske fiksacije (Haylock, 1987), gdje je potrebno mijenjati gledište kako bi se problem premostio. Pokazatelj te komponente uključuju broj postavljenih, ali ispravnih problema i promjene u mentalnom pristupu tijekom traženja rješenja ili prepoznavanja novih problema. Singer i Voica (2015) smatraju da je uporaba modela kognitivne fleksibilnosti učinkovitija za otkrivanje karakteristika matematičke kreativnosti koje su manje vidljive pri uporabi drugih modela.

Međutim, nisu sve aktivnosti postavljanja problema kognitivno izazovne i stoga ne zahtijevaju kreativnost. Iako postavljeni problemi ne moraju uvijek biti matematički smisleni, odnosno valjani, nužno je postojanje kriterija za prihvaćanje postavljenoga problema kao valjanoga. Singer i Voica (2017) ističu da se valjanost može ocijeniti na temelju koherentnosti i dosljednosti. Koherentnost se odnosi na sintaksu problema; točnije, odnosi se na pravila i načela koji upravljaju strukturom matematičkoga problema. Primjerice, na jasnu definiciju novih stavki koje je predlagatelj dodao u početnu konfiguraciju. Problem se može smatrati koherentnim ako su njegove komponente eksplicitno definirane ili istaknute na slici kako bi se uklonila dvosmislenost. Dosljednost problema odnosi se na njegovu semantiku; konkretno, odnosi se na prisutnost matematički značajnih veza između komponenti problema. Dosljednost također podrazumijeva razumnu korelaciju između novopostavljenih problema i postavki na kojima se temelji početna situacija.

U svjetlu rasprave o važnosti postavljanja problema u matematičkom obrazovanju, nekoliko istraživanja donosi ključne uvide. Iako je broj studija koje istražuju vezu između postavljanja problema i matematičke kreativnosti ograničen, dostupna literatura konzistentno upu-

čuje na pozitivne učinke postavljanja problema na matematičku kreativnost (Bevan i Capraro, 2021; Bicer *et al.*, 2020; Singer i Voica, 2017; Van Harpen i Presmeg, 2013; Van Harpen i Siraman, 2013), što kao posljedicu ima pozitivan utjecaj na matematičko mišljenje, vještine rješavanja problema, dublje razumijevanje matematičkih koncepta, samopouzdanje u matematici i oblikovanje pozitivnih stavova prema matematičkom obrazovanju (Bonotto, 2013; Singer i Voica, 2017; Van Harpen i Presmeg, 2013; Van Harpen i Siraman, 2013). Primjerice, metoda postavljanja problema učinkovit je alat za poticanje i procjenu matematičke kreativnosti, posebno među mlađim učenicima, kao što je istaknuto u istraživanju Bicer *et al.* (2020). Rana izloženost postavljanju problema bila je povezana s višim rezultatima matematičke kreativnosti za djecu u skupini koja je postavljala probleme, dok su učenici koji nisu bili izloženi postavljanju problema imali niže rezultate matematičke kreativnosti.

U nastavku prikazani su primjeri aktivnosti postavljanja problema preuzeti iz Yuan i Sriraman (2011):

Zadatak 1. U redu stoji 10 djevojčica i 10 dječaka. Postavite što više problema koji koriste dane informacije na neki način.

Zadatak 2. Sinoć je bila zabava kod vaših rođaka i zvono je zazvonilo 10 puta. Prvi put kad je zazvonilo na vratima, došao je samo jedan gost. Svaki put kad bi na vratima zazvonilo zvono, stiglo je troje gostiju više nego kod prethodnog zvonjenja.

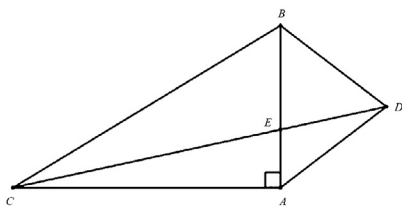
- a) Koliko će gostiju stići na 10. zvono? Objasnite kako ste pronašli odgovor.
- b) Postavite što više pitanja koja su na neki način povezana s ovom situacijom.

Zadatak 1 predstavlja slobodnu situaciju postavljanja problema, a Zadatak 2 predstavlja strukturiranu situaciju postavljanja problema. Za razliku od Zadatka 1, u Zadatku 2 većina učenika postavila je probleme slične potpitanju a. Većina problema bila je trivijalna, a uključivali su hranu, piće ili odjeću. Ti nalazi podupiru ideju Bonotto i Dal Santo (2015) o poticanju kreativnosti nestrukturiranim ili polustrukturiranim zadatcima.



### **3.3. Matematička kreativnost u kombinaciji s rješavanjem i postavljanjem problema**

U modernom matematičkom obrazovanju, istraživački pristup i rješavanje problema prepoznaju se kao vitalni elementi za duboko razumijevanje matematike (Cai *et al.*, 2015). S druge strane, Cifarelli i Sevim (2015) ističu da se postavljanje problema ne smije promatrati izolirano, već kao ključan aspekt procesa rješavanja problema. U procesu rješavanja problema učenici stalno procjenjuju smislenost svojih ciljeva i preinačuju ili redefiniraju svoje strategije sukladno potrebama zadatka. Na taj način, postavljanje problema postaje kontinuirani proces preinake početnoga problema, gdje svaka nova definicija problema označava korak prema rješenju i otvara put za dublje razumijevanje osnovne problematike. U svjetlu tih karakteristika, Leikin (2015) ističe metodu postavljanja problema s pomoću istraživanja (PPI) kao inovativan alat za poticanje matematičke kreativnosti. PPI predstavlja složenu matematičku aktivnost koja obuhvaća: (a) Istraživanje geometrijskog lika (iz problema s dokazom) koristeći alate dinamične geometrije (eksperimentiranje, stvaranje pretpostavke i testiranje pretpostavke) kako bi se otkrila bitna svojstva danog lika (najmanje 2), kao i srodnih likova koji nastaju iz pomoćnih konstrukcija. Bitno svojstvo je ono čiji dokaz zahtijeva najmanje 3 koraka; (b) postavljanje nekoliko novih problema na osnovi provedenih istraživanja (barem 2) te njihovo rješavanje (dokazivanje) (Leikin i Elgrably, 2022). Ključna odlika PPI zadataka jest njihova otvorenost. Zadatak se smatra dovršenim tek nakon što je autor uspješno riješio sve izazove koje je postavio (primjerice vidi Sliku 1). Kako bi se objektivno vrednovala matematička kreativnost unutar PPI-a, Leikin i Elgrably (2020) osmislili su model bodovanja za MST, koju je izvorno formulirala Leikin (2009). Prema tom modelu, vrednovanje kreativnosti obuhvaća: (a) fluentnost (ukupan broj prepoznatih svojstava), (b) fleksibilnost (ukupan broj otkrivenih svojstava različitih vrsta) te (c) originalnost (novost i rijetkost otkrivenih svojstava). Sve probleme koje pojedinac postavi temeljem tih kriterija možemo definirati kao individualni prostor rješenja.



Trokut  $ABC$  je pravokutan.

Trokut  $ABD$  jednakokračan.

Dužina  $\overline{CD}$  siječe dužinu  $\overline{AB}$  u točki  $E$ .

- Pronađite nova svojstva koristeći alat dinamične geometrije.
- Za danu sliku, osmislite nove probleme i riješite ih.

**Slika 1.** Primjer PPI zadatka preuzet iz studije Lekin i Elgrably (2020).

Lekin i Elgrably (2020) istraživali su kako potaknuti matematičku kreativnost studenata te vezu između matematičkoga znanja, vještina rješavanja problema i kreativnih vještina. U okviru sveučilišnoga kolegija o euklidskoj geometriji buduće su učitelje matematike izložili zadacima poput PPI zadataka. Na kraju su kolegija budući učitelji matematike pokazali značajne promjene u matematičkoj kreativnosti, što je utjecalo i na vještine rješavanja problema i vještine vezane uz dokazivanje matematičkih tvrdnji.

#### 4. Povezanost metoda za poticanje kreativnosti i afektivnih karakteristika učenika

Razmatranja u prethodnim odjeljcima pokazuju da opisani zadatci otvorenoga tipa predstavljaju kreativno usmjerene aktivnosti jer potiču i zahtijevaju mentalnu fleksibilnost te pružaju višestruke mogućnosti za stvaranje novih ideja. No, prednosti takvoga pristupa nisu samo kognitivne prirode. Emocionalna komponenta obrazovanja, često zanemarena, postaje očita kad učenici prođu kroz takav kreativni proces. Osjećaj postignuća, snažna motivacija i obnovljeni interes za matematiku važne su posljedice toga pristupa (Tabach i Levenson, 2018; Leikin, 2014; Pehkonen, 1997). Umjesto da se oslanjaju isključivo na propisane algoritme i postupke, takav dinamičan način učenja potiče učenike na veći angažman, potiče njihovu znatiželju i potiče dublje razumijevanje matematičkih koncepta (Schukajlow i Krug, 2014). Primjerice, učenici koji se uključe u proces kreiranja matematičkih problema često razvijaju veće samopouzdanje u svoje sposobnosti, što je potvrđeno brojnim istraživanjima (npr. Liu *et al.*, 2020). Važno je napomenuti da primjena

svih navedenih metoda zahtijeva promišljen pristup. Primjerice, Ni *et al.* (2017) upozoravaju da nije svaka upotreba MST zadataka korisna. Ključ uspjeha leži u ispravnoj primjeni. U njihovom konkretnom istraživanju problem je nastao kada su učitelji koristili MST primarno kako bi poticali verbalnu aktivnost učenika, a ne njihovo duboko razumijevanje matematičkih pojmova.

## 5. Zaključak

U ovom radu predstavljene su metode za poticanje i vrednovanje matematičke kreativnosti s obzirom na rješavanje i postavljanje problema, tj. određenih tipova zadataka otvorenog tipa. Rezultati uporabe tih metoda pokazuju da one ne samo da potiču matematičku kreativnost učenika nego također doprinose povezanijem matematičkom znanju i poboljšavaju sposobnosti rješavanja problema. No, svjesni smo da postoji mnoštvo pristupa koji potiču matematičku kreativnost, a njihovi rezultati nisu uvijek mjerljivi. U današnjem obrazovnom kontekstu, koji ističe odgovornost i mjerljivost ishoda učenja (Brookhart, 2013), donositelji obrazovnih politika upotrebljavaju podatke iz standardiziranih testova ne samo za procjenu učeničkoga napretka nego i za ocjenjivanje kvalitete nastavnika i obrazovnih institucija. Današnja dominacija evaluacije i kvantifikacije u obrazovanju rezultirala je marginalizacijom onoga što nije izravno mjerljivo ili se čak percipira kao nebitno (Czarnocha, 2014). U tom kontekstu, ključno je njegovati i promovirati metode učenja i kreativnosti koje premašuju standardna mjerenja.

S druge strane, važno je ne samo teorijski razumjeti aspekte kreativnosti nego ih i praktično primjenjivati u nastavi jer se kreativnost sve više pojavljuje u službenim obrazovnim dokumentima. Ovaj rad, kao pregled suvremenih metoda, može poslužiti kao izvor za profesionalni razvoj učitelja. Učitelji imaju ključnu ulogu u poticanju matematičke kreativnosti pažljivo odabranim i primijenjenim nastavnim aktivnostima (Freiman, 2009). Međutim, istraživanja upućuju na činjenicu da najbolje prakse vrednovanja kreativnosti još uvijek nisu široko prihvaćene u učionicama (Long *et al.*, 2022). Zanimljivo je primijetiti da su zadatci otvorenoga tipa već integrirani u matematičke udžbenike zbog njihove sposobnosti da potiču duboko mišljenje (npr. Bingolbali, 2020; Klein i Leikin, 2020; Glasnović Gracin, 2018). Budući da udžbenici često

određuju sadržaj i metode u nastavi (Schmidt, 2012), postoji značajna prilika za daljnju integraciju tih zadataka u nastavne planove. Učitelji mogu započeti s poticanjem razvoja matematičke kreativnosti tako što će u početku tražiti samo dva različita rješenja ili dvije različite metode pristupa problemima. Sam odmak od jednoga rješenja ili jedne metode potiče matematičku kreativnost (Jukić Matić i Sliško, 2022).

Prije nego što zaključimo ovaj rad istaknimo otvorena pitanja koja smo uočili proučavajući literaturu. Koliko je u praksi jednostavno primijeniti te metode u svakodnevnom nastavnom kontekstu? Osim toga, jesu li te metode prilagođene svim učenicima bez obzira na njihove individualne sposobnosti? Postoje li metode kojima se može poticati i vrednovati matematička kreativnost i marginaliziranih učenika? Ti izazovi traže dodatna istraživanja i prilagodbe kako bi se osiguralo da se matematička kreativnost potiče na inkluzivan i efikasan način. Naime, većina istraživanja koja se doticala metoda predstavljenih u ovom radu često je usmjerena na darovite učenike ili one s posebnim interesom za matematiku. No, u realnom svijetu, razredne klupe popunjavaju učenici s različitim predznanjima, sposobnostima i iskustvima. Czarnocha (2014) ističe nužnost za širim pristupom proučavanju matematičke kreativnosti, podržavajući demokratizaciju toga područja, tj. pronalaženje alata i jezika kojima se može opisati, analizirati i potaknuti kreativnost učenika koji imaju prethodno oblikovane negativne stavove prema matematici. S druge strane, potrebno je raditi na podizanju svijesti među učiteljima o važnosti i prednostima poticanja matematičke kreativnosti. Daljnji rad na tom području može osigurati da svaki učenik ima priliku razviti svoj kreativni potencijal u matematici, a ne samo daroviti ili oni s posebnim interesom za matematiku.

## Literatura

- Beghetto, Ronald A. i Kaufman, James C. (2009), »Do we all have multicreative potential?«, *ZDM Mathematics Education*, 41(1–2), str. 39–44. <http://doi.org/10.1007/s11858-008-0143-7>
- Bevan, Danielle i Capraro, Mary M. (2021), »Posing creative problems: A study of elementary students' mathematics understanding«, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0654. <https://doi.org/10.29333/iejme/11109>
- Bicer, Ali (2021), »A systematic literature review: Discipline-specific and general instructional practices fostering the mathematical creativity of students«, *In-*

- ternational Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 9(2), str. 252–281. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1254>
- Bicer, Ali; Lee, Yujin; Perihan, Celal; Capraro, Mary M. i Capraro, Robert M. (2020), »Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity«, *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), str. 457–485. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8>
- Bingolbali, Erhan (2020), »An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks«, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), str. 669–687. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1606949>
- Bonotto, Cinizia (2013), »Artifacts as sources for problem-posing activities«, *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), str. 37–55. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5)
- Bonotto, Cinizia i Dal Santo, Lisa (2015), »On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school«, u: Singer, Mihaela Florence; Ellerton, Nerida i Cai, Jinfa (ur.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, New York: Springer, str. 103–123.
- Brookhart, Susan M. (2013), »The use of teacher judgement for summative assessment in the USA«, *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 20(1), str. 69–90, <https://doi.org/10.1080/0969594X.2012.703170>
- Brown, Stephen i Walter, Marion (2005), *The art of problem posing (3rd ed.)*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cai, Jinfa; Hwang, Stephen; Jiang, Chunlian i Silber, Steven (2015), »Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions«, u: Singer, Mihaela Florence; Ellerton, Nerida i Cai, Jinfa (ur.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, New York: Springer, str. 3–34.
- Chamberlin, Scott A. i Moon, Sidney (2005), »Model-eliciting activities: An introduction to gifted education«, *Journal of Secondary Gifted Education*, 17, str. 37–47.
- Chang, Kuo-En; Wu, Lin-Jung; Weng, Sheng-En i Sung, Yao-Ting (2011), »Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning«, *Computers & Education*, 58(2), str. 775–786. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.002>
- Chu, Samuel K. W.; Reynolds, Rebecca B.; Tavares, Nicole J.; Notari, Michele i Lee, Celina W. Y. (2017), »Twentyfirst century skills and global education roadmaps«, u: Chu, Samuel K. W.; Reynolds, Rebecca B.; Tavares, Nicole J.; Notari, Michele i Lee, Celina W. Y. (ur.), *21st century skills development through inquiry-based learning*, New York: Springer, str. 17–32.
- Cifarelli, Victor V. i Sevim, Volkan (2015), »Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving«, u: Singer, Florence, Mihaela; Ellerton, Nerida i Cai, Jinfa (ur.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, New York: Springer, str. 177–194.

- Csikszentmihalyi, Mihaly (1988), »Society, culture, and person: A systems view of creativity«, u: Sternberg, Robert J., (ur.), *The nature of creativity*, New York: Cambridge University Press, str. 325–339.
- Collard, Paul i Looney, Janet (2014), »Nurturing creativity in education«, *European Journal of Education*, 49(3), str. 348–364. <http://doi.org/10.1111/ejed.12090>
- Czarnocha, Bronislaw (2014), »O kulturi kreativnosti u matematičkom obrazovanju«, *Inovacije u nastavi: časopis za savremenu nastavu*, 27(3), str. 31–45. <https://doi.org/10.5937/inovacije1403031C>
- Elgrably, Haim i Leikin, Roza (2021), »Creativity as a function of problem solving expertise: Posing new problems through investigations«, *ZDM Mathematics Education*, 53(4), str. 891–904. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3>
- Freiman, Viktor (2009), »Mathematical enrichment: Problem-of-the-week model«, u: Leikin, Roza; Berman, Avi i Koichu, Boris (ur.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, Rotterdam: Sense Publishers, str. 367–382.
- Glasnović Gracin, Dubravka (2018), »Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples«, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), str. 1003–1024. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>
- Grégoire, Jacques (2016), »Understanding creativity in mathematics for improving mathematical education«, *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 15(1), str. 24–36. <https://doi.org/10.1891/1945-8959.15.1.24>
- Guilford, Joy Paul (1950), »Creativity«, *American Psychologist*, 5, str. 444–454. <https://doi.org/10.1037/h0063487>
- Hadar, Linor L. i Tirosh, Mor (2019), »Creative thinking in mathematics curriculum: An analytic framework«, *Thinking Skills and Creativity*, 33, 100585. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2019.100585>
- Haylock, Derek (1987), »A framework for assessing mathematical creativity in school children«, *Educational Studies in Mathematics*, 18, str. 59–74.
- Joklitschke, Julia; Rott, Benjamin i Schindler, Maike (2022), »Notions of creativity in mathematics education research: a systematic literature review«, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(6), str. 1161–1181. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10192-z>
- Jukić Matić, Ljerka i Sliško, Josip (2022), »An empirical study of mathematical creativity and students' opinions on multiple solution tasks«, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2129496>
- Kılıç, Çiğdem (2017), »A new problem-posing approach based on problem-solving strategy: Analyzing pre-service primary school teachers' performance«, *Educational Sciences: Theory and Practice*, 17(3), str. 771–789.
- Klein, Sigal i Leikin, Roza (2020), »Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel?«, *Educational Stu-*

- dies in Mathematics*, 105(3), str. 349–365. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y>
- Kontorovich, Igor; Koichu, Boris; Leikin, Roza i Berman, Avi (2012), »An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups«, *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), str. 149–161. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002>
- Kunac, Sanela (2015), »Kreativnost i pedagogija«, *Napredak*, 156 (4), 423–446.
- Leikin, Roza (2009), »Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks«, u: Leikin, Roza, Berman, Avi i Koichu, Boris (ur.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, Rotterdam: Sense Publishers, str. 129–135.
- Leikin, Roza (2014), »Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry«, u: Li, Yeping; Silver, Edward A. i Li, Shiki (ur.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, Cham: Springer, str. 59–80.
- Leikin, Roza (2015), »Problem posing for and through investigations in a dynamic geometry environment«, u: Singer, Mihaela Florence; Ellerton, Nerida i Cai, Jinfa (ur.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, New York: Springer, str. 373–391.
- Leikin, Roza (2018), »Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students«, u: Amado, Nelia; Carreira, Susana i Jones, Keith (ur.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect*, New York: Springer, str. 387–397.
- Leikin, Roza i Elgrably, Haim (2020), »Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers«, *International Journal of Educational Research*, 102, 101424, <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- Leikin, Roza i Elgrably, Haim (2022), »Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: focusing on problem posing through investigations«, *ZDM Mathematics Education*, 54(1), str. 35–49. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01319-1>
- Leikin, Roza i Pitta-Pantazi, Demetra (2013), »Creativity and mathematics education: The state of the art«, *ZDM Mathematics Education*, 45, str. 159–166. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1>
- Levav-Waynberg, Anat i Leikin, Roza (2012), »The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry«, *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), str. 73–90.
- Levenson, Esther i Molad, Osnat (2022), »Analyzing collective mathematical creativity among post high-school students working in small groups«, *ZDM Mathematics Education*, 54(1), str. 193–209. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01321-7>
- Levenson, Esther; Swisa, Riki i Tabach, Michal (2018), »Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: Definitions and measurements«,

- Research in Mathematics Education*, 20(3), str. 273–294. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1450777>
- Lithner, Johan (2008), »A research framework for creative and imitative reasoning«, *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), str. 255–276.
- Liu, Qimeng; Liu, Jian; Cai, Jinfa i Zhang, Zhikun (2020), »The relationship between domain and task specific self-efficacy and mathematical problem-posing: A large-scale study of eighth-grade students in China«, *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 407–431. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09977-w>
- Long, Haiying; Kerr, Barbara; Emler, Trina E. i Birdnow, Max (2022), »A critical review of assessments of creativity in education«, *Review of Research in Education*, 46(1), str. 288–323. <https://doi.org/10.3102/0091732X221084326>
- Lu, Xiaoli i Kaiser, Gabriele (2022a), »Creativity in students' modelling competencies: Conceptualisation and measurement«, *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), str. 287–311. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y>
- Lu, Xiaoli i Kaiser, Gabriele (2022b), »Can mathematical modelling work as a creativity-demanding activity? An empirical study in China«, *ZDM – Mathematics Education* 54(1), str. 67–81. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>
- Lucas, Bill; Claxton, Guy i Spencer, Ellen (2013), »Progression in student creativity in school: First steps towards new forms of formative assessments«, *OECD Education Working Papers*, No. 86, Paris: OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/5k4dp59msdsk-en>
- Molad, Osnat; Levenson, Esther i Levy, Sigal (2020), »Individual and group mathematical creativity among post-high school students«, *Educational Studies in Mathematics*, 104(2), str. 201–220. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09952-5>
- Ni, Yujing; Zhou, De-Hui Ruth; Cai, Jinfa; Li, Xiaoqing, Li, Qiong i Sun, Iris X. (2017), »Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive demand«, *The Journal of Educational Research*, 111(6), str. 1–16. <https://doi.org/10.1080/00220671.2017.1402748>
- OECD (2019a). *OECD future of education and skills 2030: OECD learning compass 2030*, OECD Publishing.
- OECD (2019b). *PISA 2021 creative thinking framework*, OECD Publishing. Dostupno na: <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-creative-thinking-framework.pdf>
- Pehkonen, Erkki (1995), »Introduction: Use of open-ended problems«, *ZDM Mathematics Education*, 27(2), str. 55–57.
- Pehkonen, Erkki (1997), »The state-of-art in mathematical creativity«, *ZDM Mathematics Education*, 29(3), str. 63–67.
- Petz, Boris (2005), *Psihologijski rječnik*, Jastrebarsko: Naklada Slap.
- Plucker, Johnatan i Beghetto, Ronald A. (2004), »Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter«,



- u: Sternberg, Robert J.; Grigorenko, Elena i Singer, Jerome (ur.), *Creativity: From potential to realization* Washington, DC: American Psychological Association, str. 153–168.
- Runco, Mark A. (2004), »Creativity«, *Annual Review of Psychology*, 55(1), str. 657–687. <http://doi.org/10.1146/annurev.psych.55.090902.141502>
- Runco, Mark A. i Sakamoto, Shawn Okuda (1999), »Experimental studies of creativity«, u: Sternberg, Robert J. (ur.), *Handbook of creativity*, Cambridge: Cambridge University Press, str. 62–92.
- Russo, James i Minas, Michael (2020), »Student attitudes towards learning mathematics through challenging, problem solving tasks: ‘It’s so hard—in a good way’«, *International Electronic Journal of Elementary Education*, 13(2), str. 215–225. <https://doi.org/10.26822/iejee.2021.185>
- Schindler, Maike i Lilienthal, Achim (2020), »Students’ creative process in mathematics: Insights from eye-tracking-stimulated recall interview on students’ work on multiple solution tasks«, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(8), str. 1565–1586. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10033-0>
- Schmidt, William (2012), »Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking«, u: Gueudet, Ghislaine; Pepin, Birgit i Trouche, Luc (ur.), *From text to ‘lived’ resources: Mathematics curriculum materials and teacher development*, New York: Springer, str. 143–160.
- Schukajlow, Stanislaw i Krug, Andre (2014), »Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy«, *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(4), str. 497–533.
- Schukajlow, Stanislaw; Krug, Andre i Rakoczy, Katarin (2015), »Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students’ performance«, *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), str. 393–417.
- Silver, Edward A. (1997), »Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing«, *ZDM Mathematics Education*, 29(3), str. 75–80.
- Silver, Edward A.; Mamona-Downs, Joanna; Leung, Shukkwon i Kenny, Patricia Ann (1996), »Posing mathematical problems: An exploratory study«, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), str. 293–309.
- Singer, Florence M. i Voica, Cristian (2015), »Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity?«, u: Singer, Mihaela Florence; Ellerton, Nerida i Cai, Jinfā (ur.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, New York: Springer, str. 141–174.
- Singer, Florence M. i Voica, Cristian (2017), »When mathematics meets real objects: How does creativity interact with expertise in problem solving and posing«, u: Leikin, Roza Sriraman, Bharath (ur.), *Creativity and giftedness. Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*, New York: Springer, str. 75–103.
- Singer, Florence M.; Voica, Cristian i Pelczer, Ildiko (2017), »Cognitive styles in posing geometry problems: Implications for assessment of mathemati-

- cal creativity«, *ZDM Mathematics Education*, 49(1), str. 37–52. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0820-x>
- Sriraman, Bharath (2005), »Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms«, *The Journal of Secondary Gifted Education*, str. 17, 20–36.
- Sriraman, Bharath (2009), »The characteristics of mathematical creativity«, *ZDM Mathematics Education*, 41(1–2), str. 13–27. <http://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z>
- Stoyanova, Elena i Ellerton, Nerida (1996), »A framework for research into students' problem posing«, u: Clarkson, Phillip (ur.), *Technology in mathematics education*, Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, str. 518–525.
- Suherman, Suherman i Vidakovic, Tibor (2022), »Assessment of mathematical creative thinking: A systematic review«, *Thinking Skills and Creativity*, 44, 101019, <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2022.101019>
- Tabach, Michal i Friedlander, Alex (2013), »School mathematics and creativity at the elementary and middle grade level: How are they related?«, *ZDM-Mathematics Education*, 45(2), str. 227–238.
- Tabach, Michal i Friedlander, Alex (2018), »Instances of promoting creativity with procedural tasks«, u: Singer, Michaela Florence (ur.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students* New York: Springer, str. 83–114.
- Tabach, Michal i Levenson, Esther (2018), »Solving a task with infinitely many solutions: Convergent and divergent thinking in mathematical creativity«, u: Amado, Nelia; Carreira, Susana i Jones, Keith (ur.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect*, New York: Springer, str. 219–242.
- Van Harpen, Xianwei i Presmeg, Norma (2013), »An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge«, *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), str. 117–132. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0>
- Van Harpen, Xianwei i Sriraman, Bharath (2013), »Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA«, *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), str. 201–221. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5>
- Voskoglou, Michael Gr. (2021), »Problem solving and mathematical modelling«, *American Journal of Educational Research*, 9(2), str. 85–90.
- Wessels, Helena (2014), »Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities«, *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(9), str. 22–40.
- Yuan, Xianwei i Sriraman, Bharath (2011), »An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities – Comparing Chinese and U.S students«, u: Sriraman, Bharath i Lee, Keyong Hwa (ur.), *The elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, Rotterdam: Sense Publishers, str. 5–28.

## MATHEMATICAL CREATIVITY: AN OVERVIEW OF METHODS FOR PROMOTING AND ASSESSING CREATIVITY

Ljerka Jukić Matić, Diana Moslavac Bičević

*Along with critical thinking, collaboration and communication, creativity is considered a crucial skill to prepare students for uncertain societal challenges and future jobs in the twenty-first century. Therefore, it is not enough to just encourage creativity in education, but it is also important to assess it, because assessing creativity helps to recognise and understand students' creative abilities. In this paper, we focus on mathematical creativity and link it to general definitions of creativity. We thoroughly investigate and analyse methods that foster mathematical creativity and enable its assessment, highlighting innovations that result from the application of these methods. The methods we consider focus on approaches to problem posing and problem solving, including open-ended tasks. The results show that these methods not only enhance students' mathematical creativity, but also contribute to more connected mathematical knowledge and improve problem-solving skills.*

**Keywords:** *mathematical creativity; methods for assessing mathematical creativity; problem posing; problem solving; open-ended tasks*