Osječki matematički list 24 (2024), 1–18

Elementarne funkcije i neelementarni integrali

Marija Miloloža Pandur*, Ivan Vuković†

Sažetak

U ovome radu bavimo se integralima koje nije moguće riješiti metodama koje se uče na prvoj godini preddiplomskih studija. Definiramo elementarne i neelementarne integrale. Iskazujemo teoreme o elementarnoj integrabilnosti i navodimo poznate primjere neelementarnih integrala.

Ključne riječi: *elementarna funkcija, elementarno polje, neelementarni integral, Liouvilleov teorem, Gaussov integral, logaritamski integral*

Elementary functions and nonelementary integrals

Abstract

In this paper, we deal with integrals that cannot be solved by the methods that are taught to the freshmen. We give the definition of elementary and nonelementary integrals. We state theorems for elementary integrability and list well-known examples of nonelementary integrals.

Keywords: *elementary function, elementary field, nonelementary integral, Liouville's theorem, Gaussian integral, logarithmic integral*

*Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mmiloloz@mathos.hr

†Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ivukovic@mathos.hr

1 Uvod

Većina studenata koji na prvoj godini preddiplomskih studija slušaju kolegije Diferencijalni račun, Matematika 1 i slično, prvi puta se susreću s derivacijama. Bez obzira što im je to potpuno novo gradivo vrlo brzo postanu vješti u deriviranju. Naime, nauče pravila derivacije zbroja, umnoška, kvocijenta i kompozicije funkcija te logaritamsko deriviranje. Uz tablicu derivacija elementarnih funkcija vrlo brzo mogu odrediti derivaciju bilo koje funkcije. Na kolegiju Integralni račun, Matematika 2, i slično, stvari više ne idu tako jednostavno. Potrebno je naučiti svojstva integrala, tablicu osnovnih integrala te savladati metode i tehnike integriranja. Uče se sljedeće tri metode integracije: metoda direktne integracije, metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije [4, str. 257.–268.]. Spomenimo četiri tehnike integriranja: integriranje racionalnih funkcija, binomni integral, integriranje iracionalnih funkcija, integriranje trigonometrijskih funkcija [4, str. 270.–281.]. Bez obzira na spomenute metode i tehnike integriranja, neki će integrali biti nerješivi studentima prve godine. U ovome radu cilj nam je opisati takve integrale, koje nazivamo neelementarnim integralima[1]. Jedan od sljedeća dva vrlo slična integrala je neelementaran (Možeš li pogoditi koji?):

$$\text{a)} \int xe^x \mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \int \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x.$$

2 Riemannov integral

Motivacija za uvođenje integrala je računanje površine lika ispod grafa nenegativne omeđene funkcije. Za definiciju određenog integrala potrebno je konstruirati Darbouxove sume te donji i gornji Riemannov integral [5, str. 126.–127.].

Definicija 2.1. *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Ako je donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ jednak gornjem Riemannovom integralu funkcije f na segmentu $[a,b]$, onda kažemo da je funkcija f* ***integrabilna u Riemannovom smislu*** *ili* ***R-integrabilna na segmentu*** *$[a,b]$, a ta zajednička vrijednost naziva se* ***određeni integral*** *funkcije f na $[a,b]$ i označavamo ju $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Po Riemannovom teoremu [4, str. 242.], svaka neprekidna funkcija na segmentu ujedno je i R-integrabilna na tom segmentu.

U nastavku pokazujemo na koji se način računaju integrali.

[1] Radi boljeg razumijevanja ovog rada preporučujemo prvo detaljno pročitati [6].

Definicija 2.2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazan otvoren interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$.* ***Primitivna funkcija*** *ili* ***antiderivacija funkcije*** *f na skupu I je svaka funkcija $G\colon I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom*

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Sjetimo se da su sve primitivne funkcije dane funkcije f jednake do na konstantu, prema tome dovoljno je poznavati jednu takvu funkciju. Sljedeći teoremi povezuju derivacije i integrale.

Teorem 2.1 (O primitivnoj funkciji [5, str. 139.]). *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazan otvoren interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna na I, te neka je $G\colon I \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a \in I.$$

Tada je funkcija G derivabilna na I i vrijedi

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Dakle, svaka neprekidna funkcija ima svoju primitivnu funkciju.

Teorem 2.2 (Newton-Leibnitzova formula [5, str. 139.]). *Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i G bilo koja primitivna funkcija funkcije f na I, onda za svaki segment $[a, b] \subset I$ vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Prethodnim teoremom dobivena je formula za računanje određenog integrala. Potrebno je samo naći jednu primitivnu funkciju zadane funkcije što općenito nije lagan posao. Koristimo uobičajenu oznaku za **neodređeni integral** funkcije f u obliku integrala bez granica $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Ta oznaka predstavlja skup svih primitivnih funkcija funkcije f.

3 Neelementarni integrali

Pri integriranju realne funkcije realne varijable koristimo se svojstvima integrala te različitim metodama ili tehnikama integriranja, kako bismo složeniji integral sveli na jednostavnije integrale koje poznajemo iz tablica osnovnih integrala odnosno tablica integrala elementarnih funkcija. Tehnika integriranja ovisi o podintegralnoj funkciji, dok je metoda integracije općenitiji pojam. U nastavku opisujemo integrale koje nije moguće riješiti tim postupcima. Zbog toga će od sada naša podintegralna funkcija biti kompleksna funkcija realne varijable [1]. Kompleksnu funkciju realne varijable $f\colon I \to \mathbb{C}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazan otvoren interval, možemo zapisati pomoću njezinog realnog i imaginarnog dijela:

$$f(x) = f_{Re}(x) + i f_{Im}(x),$$

gdje su $f_{Re}, f_{Im}\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ realne funkcije realne varijable. Tada je f neprekidna/derivabilna/R-integrabilna ako su f_{Re} i f_{Im} neprekidne/derivabilne/R-integrabilne. Pri tome vrijedi:

$$f'(x) = f'_{Re}(x) + i f'_{Im}(x), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_{Re}(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b f_{Im}(x)\mathrm{d}x, \quad [a,b] \subset I. \tag{2}$$

Za kompleksnu funkciju realne varijable f kažemo da je **analitička** ako su joj realni i imaginarni dio analitičke funkcije kao realne funkcije realne varijable. Kvocijent dvije kompleksne analitičke funkcije, od kojih djelitelj nije nul-funkcija, na fiksnom nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ nazivamo **meromorfnom** funkcijom na intervalu I. Prelazak na kompleksne funkcije realne varijable daje nam kompaktnu definiciju elementarne funkcije. Naime, u radovima [3, 6] dana je definicija elementarnih funkcija kao kompleksnih funkcija realne varijable. Podsjetimo se, meromorfna funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$, na nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, je **elementarna funkcija** ako je element nekog elementarnog polja[2]. Prisjetimo se sljedeće dvije definicije iz [3, 6].

Definicija 3.1. *Neka su $f_0, \dots, f_n\colon I \to \mathbb{C}$ zadane funkcije na nekom fiksnom nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako su $f_0, \dots, f_n$ meromorfne funkcije na intervalu I, onda s $\mathbb{C}_I(f_0, \dots, f_n)$ označavamo[3] skup svih meromorfnih funkcija h na intervalu I oblika*

$$h = \frac{P(f_0, \dots, f_n)}{Q(f_0, \dots, f_n)} = \frac{\sum a_{i_0,\dots,i_n} f_0^{i_0} \cdots f_n^{i_n}}{\sum b_{j_0,\dots,j_n} f_0^{j_0} \cdots f_n^{j_n}},$$

gdje su P i Q polinomi od $n+1$ varijable nad poljem $\mathbb{C}$:

$$P(X_0, \dots, X_n) = \sum a_{i_0,\dots,i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n},\ Q(X_0, \dots, X_n) = \sum b_{j_0,\dots,j_n} X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n},$$

$a_{i_0,\dots,i_n}, b_{j_0,\dots,j_n} \in \mathbb{C}$ te $Q(f_0, \dots, f_n)$ nije nul-polinom.

---

[2] Pojam elementarne funkcije može se proširiti na kompleksne funkcije kompleksne varijable [9, 11]. Zbog višeznačnosti takvih funkcija potrebno je za domenu uzeti neko područje (neprazan povezan otvoren skup) u $\mathbb{C}$ te promatrati meromorfne funkcije [1].

[3] Kada imamo funkcije od kojih se barem jedna teško može zapisati bez označavanja njenih varijabli, na primjer $f_0(x) = x$, $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2 = \ln$, skup $\mathbb{C}_I(f_0, f_1, f_2)$ označavamo $\mathbb{C}_I(x, \sqrt[3]{x}, \ln x)$ ili $\mathbb{C}_I(x, \sqrt[3]{x}, \ln)$.

Skup $\mathbb{C}_I(f_0, \dots, f_n)$ je polje s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja funkcija. Polje $\mathbb{C}_I(x)$ označava polje svih racionalnih kompleksnih funkcija u realnoj varijabli x s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$ definiranih na intervalu I. To polje dobivamo iz prethodne definicije za $n = 0$ i funkciju inkluzije $x \mapsto x + 0\,i$. Obično ne naglašavamo na koji interval I mislimo, pa koristimo kraću oznaku $\mathbb{C}(f_0, \dots, f_n)$, odnosno $\mathbb{C}(x)$.

Definicija 3.2. *Neka su $f_1, \dots, f_n$ meromorfne funkcije na nekom fiksnom nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Polje $K = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$ meromorfnih funkcija na I je* ***elementarno polje*** *ako za svaku funkciju f_i, $i = 1, \dots, n$, vrijedi da je (za $i = 1$ uzimamo $K_0 : = \mathbb{C}(x)$)*

1. *f_i eksponent nekog elementa[4] polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili*

2. *f_i logaritam nekog elementa[5] polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili*

3. *f_i algebarska nad K_{i-1}, odnosno postoji polinom P u varijabli X s koeficijentima a_j iz polja K_{i-1}, $j = 0, \dots, m-1$, $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0$, takav da je $P(f_i) = 0$.*

Posebno, kažemo da je $K_0 = \mathbb{C}(x)$ elementarno polje.

Navedimo nekoliko primjera elementarnih polja te elementarnih funkcija. Polja

$$\mathbb{C}(x, e^{\frac{x}{2x-i}}), \quad \mathbb{C}(x, \ln(3x^2 - 2)), \quad \mathbb{C}(x, \sqrt[4]{x^3 + 5}, e^x),$$

su elementarna polja na nekom otvorenom intervalu na kojemu su sve funkcije definirane. Na primjer, zbog zatvorenosti polja na zbrajanje i množenje, funkcija

$$x \mapsto (5 + 7i)\frac{x^3 - 2ix^2 - 6}{4x^8 + 25} + e^{\frac{5x}{2x-i}} - ix^3 e^{\frac{x}{2x-i}}$$

je elementarna funkcija jer je element elementarnog polja $\mathbb{C}(x, e^{\frac{x}{2x-i}})$. Slično, funkcija

$$x \mapsto \frac{xe^x + \sqrt[4]{(x^3+5)^7} + e^{5x} + 2}{4x^3 e^{7x}\sqrt[4]{(x^3+5)^{11}}}$$

je elementarna funkcija jer je element elementarnog polja $\mathbb{C}(x, \sqrt[4]{x^3 + 5}, e^x)$.

[4] Ovdje mislimo na kompoziciju neke funkcije i kompleksne eksponencijalne funkcije $z \mapsto e^z$.
[5] Ovdje mislimo na kompoziciju neke funkcije i glavne grane kompleksne logaritamske funkcije $z \mapsto \ln z$.

Napominjemo da je funkcija $x \mapsto \sin x$, kao funkcija s otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$ elementarna funkcija jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, e^{ix})$. Naime, vrijedi

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}}. \tag{3}$$

Uočimo da je slika te funkcije neki podinterval segmenta $[-1, 1] \subset \mathbb{C}$. Jedan od razloga zašto gledamo kompleksne funkcije realne varijable je taj što se sve trigonometrijske i ciklometrijske funkcije mogu prikazati preko kompleksnih eksponencijalnih i logaritamskih funkcija.

Teorem 3.1 **([3]).** *Ako je K elementarno polje, onda je zatvoreno na deriviranje.*

Prema ovom teoremu, elementarna polja su primjeri diferencijalnih polja: derivacija bilo koje funkcije iz polja je neka funkcija iz istoga polja. Stoga je derivacija bilo koje elementarne funkcije opet elementarna funkcija. No, što se događa kada integriramo funkciju?

Definicijom 2.2 definirali smo primitivnu funkciju realne funkcije realne varijable, a teoremom 2.2 izrekli smo formulu za rješavanje određenog integrala realne funkcije realne varijable pomoću njene primitivne funkcije. Integriranje kompleksne funkcije realne varijable svodi se na integriranje dviju realnih funkcija realne varijable (vidi formulu (2)). Stoga, uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.3. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazan otvoren interval i $f \colon I \to \mathbb{C}$.* ***Primitivna funkcija*** *ili* ***antiderivacija funkcije*** *f na skupu I je svaka funkcija $G \colon I \to \mathbb{C}$ sa svojstvom*

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{4}$$

Neka je $f = f_{Re} + i f_{Im}$ te $G = G_{Re} + i G_{Im}$. Prema (1) i (4) slijedi

$$G' = G'_{Re} + i G'_{Im} = f_{Re} + i f_{Im}.$$

Stoga je G_{Re} primitivna funkcija od f_{Re}, te G_{Im} primitivna funkcija od f_{Im} (kao realnih funkcija realne varijable). Dakle, rješavanje integrala kompleksne funkcije realne varijable svodi se na traženje njene primitivne funkcije, odnosno na traženje primitivnih funkcija njenog realnog i imaginarnog dijela. Sve meromorfne funkcije, pa tako i elementarne funkcije, su neprekidne (na odgovarajućem intervalu), stoga su i R-integrabilne, odnosno imaju primitivnu funkciju. Do problema dolazi kada podintegralna elementarna kompleksna funkcija realne varijable nema primitivnu funkciju koja je elementarna[6].

Definicija 3.4. *Meromorfna funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$, na nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ je **elementarno integrabilna**, odnosno $\int f(x)\mathrm{d}x$ je **elementaran integral** ako vrijedi $G' = f$ za neku elementarnu funkciju G.*

Prema teoremu 3.1, zbog zatvorenosti elementarnog polja na deriviranje, samo elementarna funkcija može biti elementarno integrabilna.

Definicija 3.5. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{C}$ elementarna funkcija na nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Neodređeni integral $\int f(x)\mathrm{d}x$ je **neelementaran integral** ako f nema primitivnu funkciju koja je elementarna. U tome slučaju, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, za $a, b \in I$, $a < b$, zovemo **neelementaran određeni integral** funkcije f na $[a, b]$.*

Primjer 3.1. *Svaka kompleksna racionalna funkcija realne varijable je elementarno integrabilna jer je njena primitivna funkcija suma sljedećih elementarnih funkcija [4, odjeljak 7.5.1], [10]: racionalne funkcije, linearne kombinacije kompozicija racionalnih funkcija i logaritama, te arkus tangensa. Štoviše, primitivna funkcija kompleksne racionalne funkcije realne varijable jednaka je sumi neke racionalne funkcije i konačne linearne kombinacije kompozicija racionalnih funkcija i logaritama jer se arkus tangens može zapisati preko logaritamske funkcije:*

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-x}{i+x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Radeći s kompleksnim umjesto s realnim funkcijama, dali smo općenitiju definiciju elementarne funkcije nego kako je ona definirana kao realna funkcija realne varijable [3, 6] te ojačali značenje teorema o elementarnoj integrabilnosti (teoremi 3.2 i 3.3). Naime, dokažemo li da npr. elementarna funkcija $x \mapsto e^{-x^2} + 0\,i$ nije elementarno integrabilna u smislu definicije 3.4 (koja dopušta kompleksne funkcije), tada ona sigurno nije podložna „elementarnoj" integrabilnosti u bilo kojem razumnom smislu kao realna funkcija.

Pokažimo sada da neelementaran integral nije moguće riješiti metodama integracije.

Kada za realnu funkciju g kažemo da je (ne)elementarna, odnosno da je integral $\int g(x)\mathrm{d}x$ (ne)elementaran, smatramo da na g gledamo kao na kompleksnu funkciju realne varijable (iako joj je slika unutar skupa $\mathbb{R}$).

[6] Primitivne funkcije neke funkcije se razlikuju samo za konstantu, stoga ako je jedna od njih elementarna onda su sve elementarne. Dakle, ako neka elementarna funkcija ima primitivnu funkciju koja nije elementarna, onda niti jedna njezina primitivna funkcija nije elementarna.

Neka je f elementarna kompleksna funkcija realne varijable. Posebno gledamo integral njenog realnog dijela f_{Re}, a posebno integral njenog imaginarnog dijela f_{Im}. Ako je barem jedan od njih neelementaran integral, uz prethodni dogovor o realnim funkcijama, onda je integral funkcije f neelementaran.

- U metodi direktne integracije podintegralnu funkciju zapisujemo pomoću sume nekoliko drugih funkcija i primjenjujemo pravilo aditivnosti integrala. Zadani je integral jednak sumi nekoliko integrala koje znamo riješiti. Neka se dana elementarna podintegralna funkcija može zapisati kao suma nekoliko elementarnih funkcija. Ako svaka od tih funkcija ima elementarnu primitivnu funkciju, onda je zadani integral elementaran integral (jer je suma elementarnih funkcija opet elementarna funkcija). Kontrapozicijom dobivamo: ako je integral sume elementarnih funkcija neelementaran, onda barem jedan sumand nema elementarnu primitivnu funkciju.

- Metoda supstitucije sastoji se u tome da se podintegralna funkcija „prepozna“ kao umnožak kompozicije dviju funkcija $h \circ \varphi$, i derivacije φ', te vrijedi

$$\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= \int h(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

  Dakle, integral u (5) je neelementaran ako i samo ako je integral u (6) neelementaran.

- Kod parcijalne integracije koristimo formulu:

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

  Neka su u i v elementarne funkcije definirane na istom intervalu. Tada je i njihov umnožak elementarna funkcija na tom intervalu. Ako je lijevi integral u (7) elementaran, onda postoji elementarna funkcija F_1 koja je primitivna funkcija funkcije $x \mapsto u'(x)v(x)$. Neka je F_2 primitivna funkcija funkcije $x \mapsto u(x)v'(x)$. Sada imamo:

$$\underbrace{F_1(x) + c_1}_{elementarna} = \underbrace{u(x)v(x)}_{elementarna} - F_2(x) - c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

  Kako se elementarne funkcije nalaze u nekom elementarnom polju, zbog zatvorenosti polja na zbrajanje funkcija slijedi da je i funkcija F_2

iz toga istog elementarnog polja pa je i sama elementarna funkcija. Dakle, i desni integral u (7) je elementaran. Slično, ako je desni integral u (7) elementaran onda je i lijevi integral u (7) elementaran. Stoga su ili oba gornja integrala elementarna ili su oba neelementarna.

Joseph Liouville (1809.–1882.), francuski matematičar

Maxwell Rosenlicht (1924.–1999.), američki matematičar

Matematičari su se kroz povijest susretali s funkcijama koje nisu mogli integrirati te su tražili odgovor na pitanje zašto neke funkcije nemaju elementarnu primitivnu funkciju. U prvoj polovici 19. stoljeća Joseph Liouville je dokazao nekoliko teorema o elementarnoj integrabilnosti. Liouvilleov teorem 3.2 tvrdi da elementarne funkcije koje su elementarno integrabilne imaju poseban oblik. U 20. stoljeću su Alexander Markowich Ostrowski, Joseph Fells Ritt i Maxwell Rosenlicht poopćili Liouvilleove rezultate. Maxwell Rosenlicht je dokazao teorem sličan teoremu 3.2, ali koristeći apstraktnu algebru i diferencijalna polja [8]. Robert Henry Risch je implementirao tzv. Rischov algoritam koji se koristi u računalnim programima za rješavanje neodređenih integrala [7], a temelji se na Liouvilleovom teoremu. Detaljnije o povijesnom pregledu teorije integrala vidi npr. u [10].

Teorem 3.2 (Liouville). *Neka je K elementarno polje koje sadrži funkciju f. Funkcija f je elementarno integrabilna, tj. ima elementarnu primitivnu funkciju u nekom elementarnom proširenju[7] L polja K ako i samo ako postoje funkcija $h \in K$, ne-nul funkcije $g_1, \ldots, g_m \in K$ i konstante $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi:*

$$f = h' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{g_i'}{g_i}. \tag{9}$$

Tada je

$$h + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(g_i) \tag{10}$$

primitivna funkcija od f.

Elementarna primitivna funkcija od f se zbog (10) nalazi ili u polju K (u slučaju $m = 0$) ili u nekom elementarnom proširenju L polja K nastalog konačnim brojem elementarnih proširivanja logaritamskom funkcijom (u slučaju $m > 0$). Dakle, jedine elementarne primitivne funkcije su one

[7] Do elementarnog polja L dolazi se postupnim proširenjem polja K (uz odgovarajuće suženje intervala I) novom funkcijom koja je ili logaritam neke funkcije iz prethodnog polja, ili eksponent neke funkcije iz prethodnog polja ili neka funkcija koja je algebarska nad prethodnim poljem. Svako takvo proširenje zovemo **elementarnim proširenjem** bilo kojeg prethodno generiranog elementarnog polja.

koje se mogu zapisati kao suma jedne elementarne funkcije i konačne linearne kombinacije kompozicija nekih elementarnih funkcija i logaritamske funkcije.

Primjer 3.2. *Neka je funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$ zadana s*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

na nekom otvorenom intervalu I. Pokažimo, koristeći Liouvilleov teorem, da je f elementarno integrabilna na tome intervalu.

Rješenje. Funkcija f je najjednostavnija „prava" racionalna funkcija. Definirajući $h'(x) := 0$ za $x \in I$, $m := 1$, $c_1 := 1$ i $g_1(x) := x$ za $x \in I$, za funkciju f vrijedi jednakost (9). Zbog $h(x) = c$, $c \in \mathbb{C}$, za elementarno polje K (koje sadrži f, h i g_1) možemo uzeti $\mathbb{C}(x)$. Stoga je f elementarno integrabilna. Iz (10) slijedi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = c + \ln x, \quad c \in \mathbb{C}\,.$$

Najmanje elementarno proširenje polja $K = \mathbb{C}(x)$ koje sadrži primitivnu funkciju od f je elementarno polje $L = \mathbb{C}(x, \ln x)$. ◀

Primjer 3.3. *Neka je funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$ zadana s*

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2i}{x^4 - x^3 - x + 1},$$

gdje je I neki otvoreni interval. Pokažimo, koristeći Liouvilleov teorem, da je f elementarno integrabilna na tome intervalu.

Rješenje. Funkcija f je racionalna funkcija te ju možemo prikazati kao sumu polinoma i parcijalnih razlomaka. Nakon sređivanja dobivamo izraz

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{7+2i}{3(x-1)^2} + \frac{2(4-i)}{3(x-1)} + \frac{1-2x+i(2+2x)}{3(x^2+x+1)} \\ &= x + \frac{7+2i}{3(x-1)^2} + \frac{2(4-i)}{3(x-1)} + \\ &\quad \frac{\frac{2}{9}(-3+3i-(1-2i)\sqrt{3})}{2x+1+i\sqrt{3}} + \frac{\frac{2}{9}(-3+3i+(1-2i)\sqrt{3})}{2x+1-i\sqrt{3}}, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Definirajući (funkcije definiramo na intervalu I)

$$\begin{aligned} h'(x) &:= x + \frac{7+2i}{3(x-1)^2}, \quad m := 3, \\ g_1(x) &:= x-1, \quad c_1 := \frac{2(4-i)}{3}, \\ g_2(x) &:= 2x+1+i\sqrt{3}, \quad c_2 := \frac{1}{9}(-3+3i-(1-2i)\sqrt{3}), \\ g_3(x) &:= 2x+1-i\sqrt{3}, \quad c_3 := \frac{1}{9}(-3+3i+(1-2i)\sqrt{3}), \end{aligned}$$

dobivamo da za našu funkciju f vrijedi jednakost (9). Zbog

$$h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{7+2i}{3}\frac{1}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

slijedi da za elementarno polje K (koje sadrži f, h, g_i, $i = 1,2,3$) možemo uzeti $\mathbb{C}(x)$. Stoga je f elementarno integrabilna na I. Iz (10) slijedi

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x = {} & \frac{x^2}{2} - \frac{7+2i}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2(4-i)}{3}\ln(x-1) + \\ & + \frac{1}{9}(-3+3i-(1-2i)\sqrt{3})\ln(2x+1+i\sqrt{3}) + \\ & + \frac{1}{9}(-3+3i+(1-2i)\sqrt{3})\ln(2x+1-i\sqrt{3}) + c, \quad c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Uočimo da je primitivna funkcija od f iz nekog elementarnog proširenja L polja K. Za L možemo uzeti npr. elementarno polje

$$\mathbb{C}(x, \ln(x-1), \ln(2x+1+i\sqrt{3}), \ln(2x+1-i\sqrt{3})),$$

što je u skladu sa zadnjom rečenicom u primjeru 3.1.

Raspis funkcije f u obliku jednakosti (9) nije jedinstven. Naime, za

$$\widetilde{h}'(x) := \frac{1-2x+i(2+2x)}{3(x^2+x+1)}, \tag{11}$$

$m := 3$, $\widetilde{c}_1 := 1$, $\widetilde{g}_1(x) := e^{\frac{x^2}{2}}$, $\widetilde{c}_2 := \frac{2(4-i)}{3}$, $\widetilde{g}_2(x) := x-1$, $\widetilde{c}_3 := \frac{7+2i}{3}$ i $\widetilde{g}_3(x) := e^{\frac{-1}{x-1}}$ vrijedi

$$f(x) = \widetilde{h}'(x) + \sum_{i=1}^{3} \widetilde{c}_i \frac{\widetilde{g}_i'(x)}{\widetilde{g}_i(x)}, \quad \forall x \in I.$$

Integriranjem (11) dobivamo formulu za $\widetilde{h}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(x) &= \frac{1}{9}(-3+3i-(1-2i)\sqrt{3})\ln(2x+1+i\sqrt{3})+ \\ &+ \frac{1}{9}(-3+3i+(1-2i)\sqrt{3})\ln(2x+1-i\sqrt{3})+c, \quad c \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Sada za elementarno polje $\widetilde{K}$ (koje sadrži $f, \widetilde{h}, \widetilde{g}_i$, $i = 1, 2, 3$) možemo uzeti elementarno polje

$$\mathbb{C}(x, e^{\frac{x^2}{2}}, e^{\frac{-1}{x-1}}, \ln(2x+1+i\sqrt{3}), \ln(2x+1-i\sqrt{3})),$$

dok za njegovo elementarno proširenje $\widetilde{L}$, koje sadrži primitivnu funkciju od f, možemo uzeti elementarno polje

$$\mathbb{C}(x, e^{\frac{x^2}{2}}, e^{\frac{-1}{x-1}}, \ln(2x+1+i\sqrt{3}), \ln(2x+1-i\sqrt{3}), \ln(x-1))$$

jer sadrži sve potrebne funkcije. ◀

Primjer 3.4. *Pokažimo da je funkcija f elementarno integrabilna ako je*

$$f(x) = \sin^2 x \cos x. \tag{12}$$

Rješenje. Koristeći (3), i slično za kosinus, slijedi da je $f(x)$ jednako

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}-e^{ix}-e^{-ix}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+\frac{1}{e^{3ix}}-e^{ix}-\frac{1}{e^{ix}}\right).\end{aligned}$$

Definirajući

$$h'(x) := -\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}-e^{ix}-e^{-ix}\right) \text{ i } m := 0$$

za funkciju f vrijedi $f = h'$, tj. vrijedi (9). Zbog

$$\begin{aligned}h(x) &= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{3ix}}{3i}-\frac{e^{-3ix}}{3i}-\frac{e^{ix}}{i}+\frac{e^{-ix}}{i}\right)+c, \\ &= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{3ix}}{3i}-\frac{1}{3ie^{3ix}}-\frac{e^{ix}}{i}+\frac{1}{ie^{ix}}\right)+c, \quad c \in \mathbb{C},\end{aligned}$$

slijedi da za elementarno polje K (koje sadrži f i h) možemo uzeti $\mathbb{C}(x, e^{ix})$. Stoga je f elementarno integrabilna. U ovome primjeru su i f i njena primitivna funkcija h iz istog elementarnog polja, pa se h nalazi i u bilo kojem elementarnom proširenju od K. Uočimo da je

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sin^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

kao što dobivamo tehnikom integriranja trigonometrijskih funkcija. ◀

Teorem 3.2 ima za posljedicu još jedan važan teorem.

Teorem 3.3 (Liouvilleov kriterij). *Neka su $f, g \colon I \to \mathbb{C}$ racionalne funkcije na nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, takve da $f \neq 0$ i $g' \neq 0$. Funkcija $x \mapsto f(x)e^{g(x)}$, za $x \in I$, je elementarno integrabilna ako i samo ako postoji racionalna funkcija $R \in \mathbb{C}(x)$ takva da vrijedi*

$$R'(x) + g'(x)R(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{13}$$

Dokaz teorema 3.3 vidi u [3, 8]. Čitatelji koji nisu eksperti u apstraktnoj algebri lakše će razumjeti dokaz u [3, odjeljak 5]. Primijetimo da smisao ovog teorema nije samo postojanje kompleksne funkcije realne varijable R koja je rješenje diferencijalne jednadžbe (13), već da to rješenje jest *racionalna funkcija* realne varijable. (Za bilo koju takvu funkciju $R \in \mathbb{C}(x)$ je $x \mapsto R(x)e^{g(x)}$ elementarna primitivna funkcija od $x \mapsto f(x)e^{g(x)}$.) U specifičnim primjerima se može dokazati da *ne postoji* kompleksna racionalna funkcija realne varijable x koja rješava diferencijalnu jednadžbu (13). Tako se dokazuje da neke funkcije $x \mapsto f(x)e^{g(x)}$ nisu elementarno integrabilne niti na jednom nepraznom otvorenom intervalu.

4 Primjeri neelementarnih integrala

U ovome odjeljku navodimo neke poznatije neelementarne integrale, i za nekoliko njih dajemo dokaze njihove neelementarnosti.

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{16}$$

$$\int e^{e^x}\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\ln x}\, \mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$\int \ln(\ln\, x)\, \mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$\int \sin x^2\, \mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$\int \cos x^2\, \mathrm{d}x, \tag{21}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x, \tag{22}$$

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, \mathrm{d}x, \tag{23}$$

pri čemu je R racionalna funkcija dvije varijable, a P polinom trećeg ili četvrtog stupnja s jednostrukim nultočkama.

Integral (14) pojavljuje se u teoriji vjerojatnosti [2] u definiciji funkcije distribucije

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R},$$

standardne normalne slučajne varijable. Određeni integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ može se izračunati, jednak je $\sqrt{\pi}$ i naziva se **Gaussov integral**.

Integral (18) naziva se **logaritamski integral**. Njegova primjena dolazi iz teorije brojeva. Neka je $x \mapsto \pi(x)$ funkcija koja daje broj prostih brojeva manjih ili jednakih x, $x \in \mathbb{R}^+$. Može se pokazati da vrijedi $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$, za $x \to \infty$ (vidi npr. [12]), odnosno da vrijedi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1,$$

pri čemu je

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}t, \quad x > 2.$$

Uočimo da supstitucijom $u = \ln t$ dobivamo

$$\int \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}t = \int \frac{e^u}{u}\, \mathrm{d}u. \tag{24}$$

Integrali (20) i (21) nazivaju se Fresnelovi integrali i primjenjuju se u računanju zakrivljenosti autocesta [15]. Određeni integral oblika (22) naziva se sinusni ili Dirichletov integral [13], a za dokaz njegove neelementarnosti vidi npr. [9]. Integral (23) naziva se eliptički integral jer se pojavljuje u računanju duljine luka elipse [14].

Primjer 4.1. *Pokažimo da funkcija* $x \mapsto e^{-x^2}$ *nije elementarno integrabilna niti na jednom nepraznom otvorenom intervalu, odnosno da je* $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ *neelementaran.*

Rješenje. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan neprazan otvoren interval. Prema teoremu 3.3 za našu funkciju $F\colon I \to \mathbb{C}$ zadanu s $F(x) = e^{-x^2}$ je $f(x) = 1$ i $g(x) = -x^2$ za $x \in I$. Treba pokazati da diferencijalna jednadžba

$$R'(x) - 2xR(x) = 1 \tag{25}$$

nema rješenja u $\mathbb{C}(x)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da racionalno rješenje $x \mapsto R(x)$ prethodne jednadžbe postoji. Ono sigurno nije konstantna funkcija, ali nije ni kompleksni polinom u varijabli x, jer bi u slučaju polinoma stupnja $n > 0$, izraz s lijeve strane jednakosti bio polinom stupnja $n+1$, koji nije identički jednak 1. Tada mora vrijediti da je $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P i Q ne-nul relativno prosti kompleksni polinomi u varijabli x, pri čemu Q nije konstantna funkcija. Sada jednadžba (25) glasi:

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' - 2x\frac{P(x)}{Q(x)} = 1,$$

odnosno vrijedi

$$\frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} - 2x\frac{P(x)}{Q(x)} = 1. \tag{26}$$

Množenjem (26) s $Q^2(x)$ dobivamo

$$P(x)Q'(x) = (P'(x) - 2xP(x) - Q(x))Q(x). \tag{27}$$

Kako je Q polinom barem prvog stupnja, po *Osnovnom teoremu algebre* ima barem jednu nultočku $\lambda \in \mathbb{C}$ kratnosti $m \geq 1$. Razvijmo polinom Q po potencijama od $x - \lambda$. Tada je $Q(x) = (x-\lambda)^m S(x)$, za neki polinom S kojemu λ nije nultočka. Budući da je desna strana u (27) djeljiva s $(x-\lambda)^m$ i lijeva strana u (27) mora biti djeljiva s $(x-\lambda)^m$. Uočimo, $Q'(x) = m(x-\lambda)^{m-1}T(x)$, gdje je T polinom kojemu λ nije nultočka. Kako λ nije nultočka od P jer su P i Q relativno prosti, $P(x)$ ne možemo prikazati kao $(x-\lambda)M(x)$, gdje je M neki polinom, stoga lijeva strana $P(x)Q'(x)$ u (27) ne može biti djeljiva s $(x-\lambda)^m$. Dakle, došli smo do kontradikcije, pa diferencijalna jednadžba (25) nema rješenja u $\mathbb{C}(x)$, odnosno funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$ nije elementarno integrabilna niti na jednom nepraznom otvorenom intervalu. ◀

Primjer 4.2. *Potpuno analogno kao u prethodnom primjeru se dokazuje da je* $\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ *neelementaran integral promatrajući diferencijalnu jednadžbu* $R'(x) + 2xR(x) = 1$.

Primjer 4.3. *Pokažimo da funkcija* $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ *nije elementarno integrabilna niti na jednom nepraznom otvorenom intervalu, odnosno da prema* (24)*, logaritamski integral nije elementaran.*

Rješenje. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan neprazan otvoren interval. Prema teoremu 3.3 za našu funkciju $F\colon I \to \mathbb{C}$ zadanu s $F(x) = \frac{e^x}{x}$ je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = x$. Tada treba pokazati da diferencijalna jednadžba

$$R'(x) + R(x) = \frac{1}{x}$$

nema rješenja u $\mathbb{C}(x)$. Pretpostavimo da rješenje R postoji. Ako je $R \in \mathbb{C}(x)$ rješenje, očito je da ne može biti polinom, dakle mora vrijediti $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P i Q ne-nul relativno prosti kompleksni polinomi, pri čemu je Q stupnja barem 1 i ima barem jednu nultočku $\lambda \in \mathbb{C}$ kratnosti $m \geq 1$. Tada imamo

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' + \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x}$$

odnosno

$$\frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} + \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x}. \tag{28}$$

Koristeći zapis $Q(x) = (x-\lambda)^m S(x)$, gdje je S polinom takav da $S(\lambda) \neq 0$, $Q'(x) = m(x-\lambda)^{m-1}T(x)$, gdje je T polinom takav da $T(\lambda) \neq 0$, i $P(\lambda) \neq 0$, iz (28) slijedi

$$\frac{A(x)}{(x-\lambda)^{m+1}S^2(x)} = \frac{1}{x} \tag{29}$$

gdje je A polinom takav da $A(\lambda) \neq 0$. Zbog jednakosti racionalnih funkcija u (29), jedini pol koji dolazi u obzir je $\lambda = 0$. Stoga dolazimo do kontradikcije jer je lijeva strana u (29) racionalna funkcija kojoj je 0 pol reda $m + 1 \geq 2$, a desna strana je racionalna funkcija kojoj je 0 pol reda 1. Zaključujemo da funkcija $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ nije elementarno integrabilna niti na jednom nepraznom otvorenom intervalu.

Želimo li izbjeći korištenje polova, dokaz možemo provesti koristeći argument djeljivosti kao u primjeru 4.1, ali razmatrajući dva slučaja: a) $\lambda \neq 0$ i b) $\lambda = 0$. ◀

Primjer 4.4. *Supstitucijom* $x = e^t$ *u integralu* (16) *dobivamo da je integral* $\int e^{e^t}\,\mathrm{d}t$ *iz* (17) *neelementaran integral.*

Primjer 4.5. *Primjenjujući parcijalnu integraciju u integralu* (19) ($u = \ln(\ln x)$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$) *i neelementarnost integrala* (18)*, slijedi da je i* $\int \ln(\ln x)\mathrm{d}x$ *neelementaran.*

5 Zaključak

Iako su neelementarni određeni integrali nerješivi studentima prve godine preddiplomskih studija, oni nisu nerješivi studentima viših godina. Naime, postoje različiti načini na koji se ti određeni integrali mogu riješiti: Laplaceovom transformacijom, dvostrukim integralom, krivuljnim integralom, volumnim integralom, specijalnim funkcijama... Također, koristeći numeričku integraciju dobivamo približne vrijednosti odgovarajućih određenih integrala.

Uobičajeno se na predavanjima navedu neki primjeri neelementarnih integrala, ali se ne daje dokaz njihove neelementarnosti. Iako se ne može ići u samu dubinu problema, šteta je da studenti prve godine ostanu u potpunosti zakinuti po pitanju elementarne integrabilnosti. Predlažemo da se studentima navede Liouvilleov kriterij i dokaže neelementarnost nekih integrala, koristeći derivacije i znanje o polinomima koje je dobro poznato tim studentima [10].

Literatura

[1] Lj. Arambašić, G. Muić, P. Pandžić, *Kompleksna analiza*, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2023., `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Kompleksna_analiza.pdf`

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014., `https://www.mathos.unios.hr/wp-content/uploads/uploads/31.pdf`

[3] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, 1991.

[4] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet u Osijeku, Osijek, 1994.

[5] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2* , Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018., https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf

[6] M. Miloloža Pandur, I. Vuković, *Elementarne funkcije i elementarna polja*, Osječki matematički list, **23**(2) (2023), 101–114, https://hrcak.srce.hr/file/450487

[7] R. H. Risch, *The solution of the problem of integration in finite terms*, Bulletin of the American Mathematical Society, **76** (1970), 605–608

[8] M. Rosenlicht, *Liouville's theorem on functions with elementary integrals*, Pacific Journal of Mathematics **24**(1) (1968), 153–161

[9] M. Rosenlicht, *Integration in finite terms*, The American Mathematical Monthly **79**(9) (1972), 963–972

[10] M. K. Siu, *Integration in finite terms: From Liouville's work to the calculus classroom of today*, Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, edited by R. Calinger, MAA (1996), 321–330

[11] D. P. Williams, *Nonelementary antiderivatives*, Department of Mathematics, Bradley Hall, Dartmouth College, Hanover, 1993.

[12] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, The American Mathematical Monthly **104**(8) (1997), 705–708

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_integral

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral