

## Bohrov pogled na Bohrov model atoma

Mihael S. Grbić, Katarina Jeličić, Zoran Rukelj, Ivica Friščić, Ivan Kupčić<sup>1</sup>

### Uvod

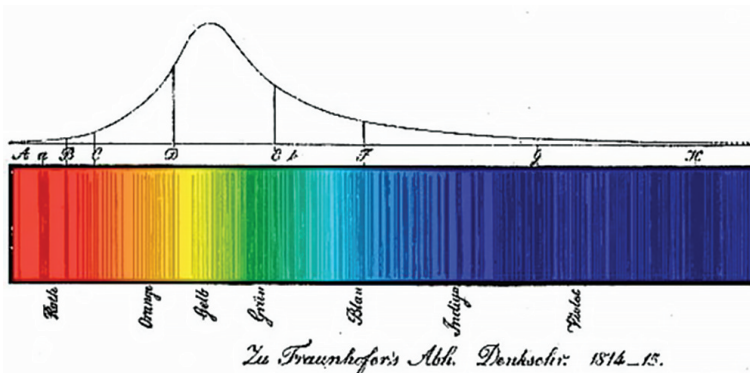
Bohrov model atoma se ističe kao prvi korak u razmatranju atoma kao kvantnog objekta. Iako se kasnije pokazao kao netočan, udžbenici nam kažu kako je model bio revolucionarno drugačiji od ostalih u to vrijeme jer je prvi uveo kvant u svoj izračun i omogućio objašnjenja postojećih eksperimentalnih opažanja. Taj značajan skok u razmatranju sastavnih elemenata našeg svijeta je razlog zašto se i danas, čak 111 godina od objave, Bohrov model atoma predaje u srednjoj školi, a i na fakultetima. Obično se on ubacuje u povijesni kontekst pa se prije njega prezentiraju Thomsonov i Rutherfordov model. Međutim, s ciljem sažetog prikaza često se prezentiraju povijesne i znanstvene činjenice koje su potpuno drugačije od stvarnosti. Na primjer, Rutherfordov model atoma se često zove planetarnim, iako on to nikad nije predložio, te se pogrešno navodi kako je Bohr postulirao kružne putanje elektrona i kvantiziran angularni moment. Kada je počeo taj iskrivljeni narativ nije posve jasno, no može se vidjeti da to nije boljša samo hrvatskih udžbenika; i strani moderni udžbenici također sadrže iste krive činjenice koje se dalje perpetuiraju. Time dolazimo u opasnost da Bohrov model izgubi svoju transparentnost, općeniti koncept modela svoje značenje, i u konačnici da znanost ispadne ezoterična i transcendentna. Pogledajmo stoga ponovno povijesne činjenice kroz originalne radove, te što je to Bohr rekao o svom razumijevanju atoma. S razvojem interneta i svijesti o znanosti, mnogi revolucionarni znanstveni članci su postali dostupni široj javnosti, te je drugi cilj ovog teksta formirati listu radova koji su čovječanstvo u konačnici doveli do Bohrovog modela atoma te motivirati čitatelje da sami krenu u potragu za istinom.

### Znanja uoči objave Bohrovog rada

Početakom 19. stoljeća J. R. von Fraunhofer (1787. – 1826.) je promatrao Sunčevu svjetlost kroz prizmu. Vidio je kako se ona po izlasku iz prizme i padom na paravan iza razdvaja na kontinuirani spektar duginih boja. Ali pored toga 1814. uočava kako na pojedinih dijelovima spektra postoje tamne linije (tzv. Fraunhoferov spektar, slika 1). Usavršavanjem stakla od kojeg je izrađena prizma potvrđuje da te tamne linije nisu defekti, već stvarne strukture u svjetlosti. Dodatnim razradama ovog instrumenta (danas zvanog spektrometar) popisuje više od 500 tamnih linija [1]. Promatranjem svjetlosti s drugih zvijezda, koja je također sadržavala svoje tamne linije (ali na pomalo izmijenjenim položajima) dolazi do zaključka kako je svaki takav spektar specifičan za pojedinu zvijezdu, iako uzrok tamnih linija nije u potpunosti razumio. Za vrijeme njegova života, 1805. formiran je Daltonov model o strukturi materije koji kaže kako je sva tvar sastavljena od atoma kao nedjeljivih građevnih jedinica. Ali proteći će skoro 50 godina poslije Fraunhoferova otkrića (1859.) kad G. Kirchoff i R. Bunsen (koji su nam danas poznati po Kirchoffovim zakonima i Bunsenovom plameniku) otkrivaju da su tamne linije zapravo potpis kemijskih

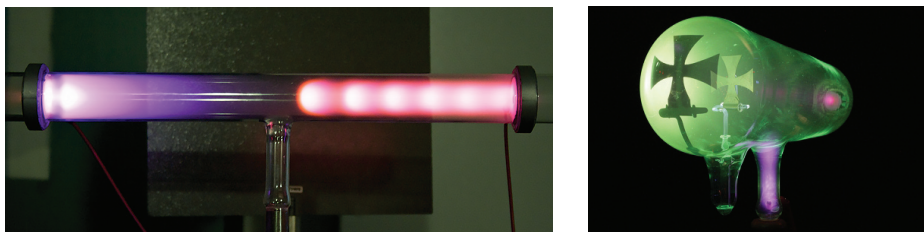
<sup>1</sup> Autori su s Fizičkog odsjeka PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: mgrbic.phy@pmf.hr

elementa sadržanih u prostoru između izvora svjetlosti i prizme [2]. Oni su uočili da će svaka tvar pobuđenjem emitirati specifične frekvencije svjetlosti (tzv. emisijski spektar), te da će bijela svjetlost prolaskom kroz tu istu materiju dobiti tamne linije na tim istim frekvencijama (tzv. apsorpcijski spektar) jer biva apsorbirana od te tvari. Na taj način se razumljelo kako su tamne linije koje je opazio Fraunhofer zapravo svjetlost koju su apsorbirali elementi i molekule Sunčeve i Zemljine atmosfere.



Slika 1. Fraunhoferov spektar intenzitetom zračenja (gore) i istaknutim tamnim linijama (dolje) iz rada [1].

M. Faraday je pokušavao naći način da vizualizira magnetske silnice, te je proučavao kako svjetlost interagira s materijom. Godine 1838. uočava [3] da ako u cijev s određenim plinom i elektrodama na krajevima cijevi narine visoki napon, u cijevi se pojavi svjetlost. Svjetlost pritom ima neobičnu strukturu – izrazito jarko sja blizu elektroda, ali je na sredini bila tamna zona (tzv. Faradayev taman prostor, slika 2). Dodatnim istraživanjem H. Geisslera i W. Crooksa razvija se tehnologija visokog vakuuma u cijevima s elektrodama. W. Crooks 1870-ih uočava da pri visokom vakuumu ( $10^{-6}$  atm) tamno područje proširi na cijelu cijev, ali pritom metalna pozitivna elektroda (anoda) na sasvim drugom dijelu cijevi počne sjati [4]. Dapače, ako se između dviju elektroda stavi mali predmet, tada će sjaj na anodi dobiti oštru sjenu predmeta (slika 2). Očito da, iako nevidljivo ljudskom oku, nešto putuje od katode do anode. Postojale su dvije teze oko toga što to jest: Crooks je smatrao da su to čestice materije, tj. nabijeni atomi, a H. Hertz da se radi o novom obliku elektromagnetskog zračenja. J. J. Thomson pokušava dokazati da se radi o česticama materije, te na osnovu topline koju su proizvodile kad bi udarile u metu i radijusa zakretanja u magnetskom polju 1897. pokazuje [5] da se radi o nekoj sitnoj čestici (*korpuskuli*) koja je 1000 puta lakša od atoma vodika. Dapače, uočava da uvijek dobije jednako malu masu bez obzira na materijal od kojeg je *korpuskula* došla. Stoga zaključuje da atomi nisu nedjeljivi i da postoje manje čestice koje ih sačinjavaju. Godine 1904. formira svoj model atoma [6] prilikom čega je *korpuskula* nazvana elektronom, a atom prikazuje kao sferu razmazane pozitivno nabijene tvari u kojoj se nalaze kompaktni elektroni. Točnije, Thomson u svom radu navodi kako su elektroni razmješteni u prstenove (“The corpuscles form a series of rings, the corpuscles in one ring being approximately in a plane. . .”) tako da se nekoliko elektrona nalazi u pojedinom prstenu, a ravnine prstenova su pod određenim kutom kako bi se uravnotežile odbojne sile. Kad atomi čine materiju, elektroni se raspodijele u moru pozitivnog naboja, tzv. model pudinga od šljiva. Thomson je smatrao da su samo elektroni kompaktni jer su pri eksperimentu s katodnom cijevi samo elektroni izljetali iz tvari.

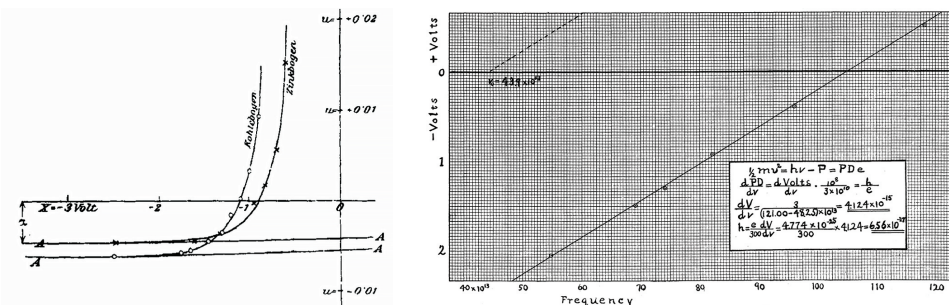


Slika 2. Lijevo: Vakuumska cijev s Faradayevim tamnim prostorom u sredini. Lijevo i desno od tamnog prostora sja ionizirani plin. Desno: Crooksova cijev s predmetom između dviju elektroda koji baca sjenu na anodu. Zelena svjetlost dolazi od fluorescirajuće tvari koja je postavljena na kraj cijevi kako bi se pojačao kontrast.

Godine 1860. G. Kirchoff na osnovu spoznaje o tamnim linijama, tj. da će svaki materijal apsorbirati svjetlost frekvencija koju emitira, objavljuje rad [7] u kojem teoretizira o savršenom materijalu koji će apsorbirati i emitirati svjetlost svih frekvencija. Takav materijal proziva *crno tijelo*, te predviđa da će emisijski spektar ovisiti o temperaturi. Ovaj misaoni “problem” crnog tijela je u konačnici riješio M. Planck, iako ne u jednom pokušaju kako se to često prikazuje [8]. Najprije je Planck objavio rad kojim je teorijski objasnio eksperimentalna opažanja Wienovog zakona, a zatim ga je 1900. korigirao jer je uočeno kako postoje odstupanja pri niskim frekvencijama. Novi poboljšani izraz za energiju zračenja  $E$  imao je oblik

$$E = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{c/\lambda T} - 1}, \quad (1)$$

gdje su  $\lambda$  i  $T$  valna duljina zračenja i temperatura, a  $C$  i  $c$  konstante koje tek treba odrediti. Ovaj izraz izrazito podsjeća na Planckov zakon zračenja, ali je dobiven generaliziranjem Wienovog zakona promatrajući  $n$  malih oscilatora, iako tada M. Plancku nije bilo jasno zašto bi fizikalni opis trebao biti takav. Naime, taj izračun nije bio izveden iz početnih principa već slijedeći svoju intuiciju s obzirom na to da je u to vrijeme nekoliko znanstvenika uočilo odstupanje od Wienovog zakona. Nakon što je tada već proveo nekoliko godina u pokušaju da kompletno razumije problem crnog tijela, Planck odustaje od pokušaja da dođe do rješenja preko kontinuuma zračenja i okreće se matematičkoj analizi diskretnih paketa energije – kvantima. Godine 1901. objavljuje rad [8] koji danas poznajemo kao Planckov zakon zračenja. Planckova interpretacija kvanata je bio da se radi o matematičkom prikazu stvarnosti koji nema veze s pravim fizikalnim svojstvima.



Slika 3. Lijevo: originalni rezultati P. Lenarda [10]. Desno: usavršena mjerenja fotoelektričnog efekta R. A. Milikana iz 1916. koja se danas često koriste u udžbenicima kao ilustracija [11].

Godine 1887. H. Hertz otkriva fotoelektrični efekt [9] kada uočava da nabijeni objekt brže gubi naboj ako ga se obasja svjetlom. Njegov student, P. Lenard je 1902. g. napravio precizna mjerenja [10] kojima je pokazao kako postoji kritična vrijednost frekvencije svjetla ispod koje višak naboja neće nestajati. Fenomen fotoelektričnosti je teorijski pojasnio A. Einstein 1905. [12] kroz vrlo jednostavan izraz  $E_K = \phi - hv$  gdje je  $E_K$  kinetička energija elektrona koji izlijeće iz materije, a  $\phi$  tzv. radna funkcija, tj. energija vezanja elektrona za materiju. Time je dokazao kako kvant  $hv$  kao nedjeljiva energijska jedinica elektromagnetskog zračenja ipak jest fizikalno opisan opis zračenja, tj. da svjetlost interagira s materijom kroz kvante energije.

Godine 1885. matematičar J. J. Balmer, tada profesor u školi u Baselu, na prijedlog kolege proučava vodikove linije (koje je ranije vrlo precizno izmjerio A. J. Ångström) i uočava [13] da se frekvencije empirijski mogu zapisati kao

$$\lambda = \text{const.} \frac{n^2}{n^2 - m^2}, \quad (2)$$

gdje su  $n = 3, 4, 5, 6$ ,  $m = 2$  i  $\text{const.} = 364.56 \text{ nm}$ , odnosno kao

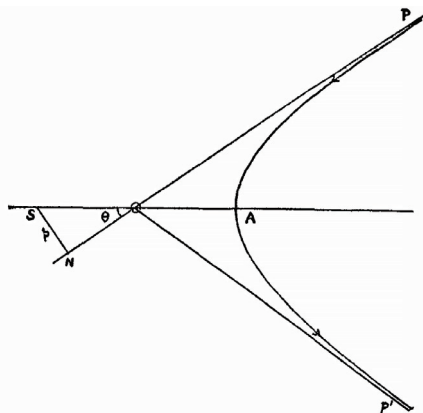
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{\text{const.}} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3)$$

gdje je  $4/\text{const.} = 13.6 \text{ eV}$ .

Godine 1889. je fizičar J. Rydberg razvio [16] generalnu formulu za elemente s atomskim brojem  $Z$

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4)$$

koja se mogla primijeniti na sve atome, a ne samo na vodik. Time je konstanta  $4/\text{const.}$  dobila fizikalno značenje i zove se Rydbergova konstanta  $R$ . Godine 1906. i 1908., su redom, T. Lyman [14] i F. Paschen [15] pronašli vodikove linije u UV dijelu i u infracrvenom dijelu spektra, koje slijede Rydbergov izraz za  $m = 1$  i  $m = 3$ .



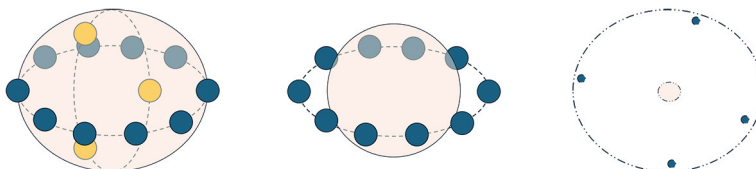
Variation of Scattering with Angle. (Collected results.)

I. Angle of deflexion, $\phi$ .	II.	III. SILVER.		V. GOLD.	
	$\frac{1}{\sin^4 \phi/2}$	Number of scintillations, N.	$\frac{N}{\sin^4 \phi/2}$	Number of scintillations, N.	$\frac{N}{\sin^4 \phi/2}$
150 .....	1.15	22.2	19.3	33.1	28.8
135 .....	1.38	27.4	19.8	43.0	31.2
120 .....	1.79	33.0	18.4	51.9	29.0
105 .....	2.53	47.3	18.7	69.5	27.5
75 .....	7.25	136	18.8	211	29.1
60 .....	16.0	320	20.0	477	29.8
45 .....	46.6	989	21.2	1435	30.8
37.5 .....	93.7	1760	18.8	3300	35.3
30 .....	223	5260	23.6	7800	35.0
22.5 .....	690	20300	29.4	27300	39.6
15 .....	3445	105400	30.6	132000	38.4
30 .....	223	5.3	0.024	3.1	0.014
22.5 .....	690	16.6	0.024	8.4	0.012
15 .....	3445	93.0	0.027	48.2	0.014
10 .....	17330	508	0.029	200	0.0115
7.5 .....	54650	1710	0.031	607	0.011
5 .....	276300	...	...	3320	0.012

Slika 4. Lijevo: Skica iz Rutherfordovog članka [17] iz 1911. koji pojašnjava izračun vjerojatnosti za određeni upadni i izlazni kut dviju nabijenih čestica: jedna na položaju  $O$ , a druga s upadom na liniji  $PO$  i odbijanjem na liniji  $P'O$ . Desno: prikaz izmjerenih raspršenja (stupci III. i V.) u ovisnosti o kutu  $POP'$  (stupac I) i usporedba s predviđanjima iz izračuna (stupci IV. i VI.) iz članka iz 1913. Donji dio tablice prikazuje vrijednosti za manje kutove kada je intenzitet zračenja bio atenuiran.

Kroz niz eksperimenata od 1905. do 1913. su E. Rutherford, H. Geiger i E. Marsden pokazali kako je Thomsonov model atoma neispravan i da je priroda materije drugačija [17]. Rutherfordov model atoma (1911.) je potvrđen s više eksperimenata na tankim folijama zlata, srebra, aluminija, bakra, kositra, olova i platine (radovi iz 1909. i 1913.). Sve je upućivalo na to da su u središtu atoma pozitivno nabijene masivne jezgre okružene velikim praznim prostorom oko kojeg se gibaju elektroni. Identičan model atoma je prvotno predložio J. B. Perrin (koji je dobio Nobelovu nagradu na osnovu nekoliko značajnih otkrića, među ostalim: dokaz Brownovog gibanja, određivanje Avogadrove konstante, itd.), ali nije organizirao eksperiment kojim bi dokazao svoju tezu o prirodi atoma. Također je potrebno napomenuti kako Rutherford nije formuirao teoriju koja bi objasnila predloženi opis atoma, i to je eksplicite naglasio jer je on pokušavao objasniti eksperimente koji su davali oprečne rezultate od onog što se očekivalo od Thomsonovog modela. U svom radu gdje je pokazao kako su jezgre također kompaktni masivni objekti navodi: “The question of the stability of the atom proposed need not be considered at this stage, for this will obviously depend upon the minute structure of the atom, and on the motion of the constituent charged parts.” Njegov izračun je gledao mehaniku gibanja dviju čestica u Coulombovom potencijalu (koji se danas standardno uči na drugoj godini studija fizike) i vjerojatnost da se dobije izmjerena kutna ovisnost odbijenih čestica. U članku on ne sugerira da je struktura atoma planetarna, već se dapače, referira na “saturnijanski model” atoma koji je 1904. predložio Hantaro Nagaoka, inspiriran Maxwellovim razmatranjem da su Saturnovi prstenovi sačinjeni od sitnih čestica. Kako je priča o Rutherfordovom modelu atoma dovoljno bogata sama po sebi, ovdje nećemo dodatno ulaziti u detalje već ćemo samo istaknuti povijesnu činjenicu da je Rutherfordov prikaz atoma kao masivne jezgre u središtu i laganih elektrona oko nje N. Bohru bio motiv za formuliranje teorije koja bi mu dala fizikalnu pozadinu.

N. Bohr je u svom pristupu svakako bio revolucionaran. Ali treba ispraviti krivu percepciju koja se stekne čitajući srednjoškolske udžbenike koja ga izolira od ostatka zajednice: Bohr nije bio “usamljeni jahač” koji je *ad hoc* inspiracijom došao do revolucionarne ideje stacionarnih orbita. Prije njega je slično sjedinjenje opisa atoma i eksperimentalnih opažanja pokušalo niz znanstvenika. Neke od njih smo ranije naveli, ali nisu dobili rezultate koje se moglo potvrditi eksperimentom. Bohrov uspjeh je što je on savladao prepreku koju drugi nisu uočili.



Slika 5. Korektni prikazi modela atoma prije pojave Bohrovog modela. Rozo je pozitivan naboj, a žuto i plavo su elektroni u raznim stanjima. Lijevo: Thomsonov model gdje se elektroni slažu u prstenove raznih promjera koji kruže po površini razmazane pozitivne pozadine. Sredina: Nagaokin saturnijski model gdje je u sredini mnogo pozitivnog naboja a elektroni su u prstenu oko njega. Desno: Rutherfordov koncept atoma gdje je sav pozitivni naboj u središtu atoma, a elektroni su daleko od njega.

Pored danas poznatih modela atoma, u ovom razdoblju se pojavilo nekoliko drugih modela koji su se pokazali neuspješnima. Kako bismo dobili bolji uvid u ideje koje su se u to vrijeme razrađivale, ovdje ćemo navesti neke od “propalih” modela:

- P. Lenard 1903. – Model *dinamida* se fokusirao na važnost električne interakcije, stoga ne čudi da je njegovo viđenje atoma bilo da je sastavljen od parova pozitivnog i negativnog naboja (*dinamida*). Atomska masa je jednaka broju dinamida – za vodik je to jedan par, helij dva para, itd. Vezu između dinamida nije pojasnio. Ovaj koncept



je objasnio periodni sustav elemenata i kako elektroni mogu izletjeti kroz sudare, ali ne i Rybergovu formulu ili pak zašto pozitivni naboj ne izlijeće.

- Lord Rayleigh 1906. – model elektronske tekućine – elektroni su također oblak naboja raspodijeljeni oko pozitivnog oblaka. Kada elektronski oblak oscilira javljaju se diskretni modovi (kao u kapljici vode), što uzrokuje opažene spektre. Ipak, izračunati modovi nisu reproducirali Rydbergove frekvencije. Pored ovih, još su postojali i J. H. Jeans, Model vibrirajućih elektrona (1906.); G. A. Schott, Model širećeg elektrona (1906.); J. Stark, Archion model (1910.), G. N. Lewis kubični atom (1916.) i drugi.

Bohr je 1911. (u dobi od 26 godina) prvotno došao do J. J. Thomsona na Cambridgeu (koji je 1906. dobio Nobelovu nagradu za otkriće elektrona) kako bi radio vrhunsku znanost u vrhunskoj grupi. Međutim, njihov odnos se nije razvijao kako se on nadao i pored toga je shvatio da bi mu znanstvena karijera mogla bolje napredovati ako surađuje s Rutherfordovom grupom (Rutherford je dobio Nobelovu nagradu 1908. za doprinos razumijevanju radioaktivnosti) na Sveučilištu u Manchesteru što je i učinio 1912. Relativno je brzo shvatio da eksperimentalan rad nije za njega, ali se zato posvetio teorijskim razmatranjima Rutherfordovih rezultata. Planckov zakon zračenja i Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta je pokazalo kako pri malim dimenzijama elektromagnetsko zračenje treba gledati pomoću kvantata, a ne kao kontinuum energije. Stoga je Bohr odlučio provjeriti kako bi se to moglo primijeniti na Rutherfordov atom. U svom radu [18] iz 1913. kaže: “This paper is an attempt to show that the application of the above ideas to Rutherford’s atom-model affords a basis for a theory of the constitution of atoms. . . . I wish here to express my thanks to Prof. Rutherford for his kind and encouraging interest in this work.”

---

## Model atoma

---

Sada ćemo krenuti s pregledom originalnog Bohrovog rada [18], pri čemu ćemo ga iznijeti tako da će poredak iznesenih jednačbi i razmatranja ostati isti. Kako bi izlaganje bilo kompaktno, neke digresijske diskusije i popratne izraze ćemo preskočiti te se fokusirati na prikaz atoma. Ovo često nije smjer koji se prezentira u udžbenicima, što čini cijeli model bezrazložno kompleksnim. U opisu prikazanih izraza slijedimo njegova pojašnjenja. U početku članka Bohr iznosi (tada) prisutan problem s gibanjem elektrona oko jezgre kroz pogled klasične fizike. Ako samo kruži oko jezgre, elektron će polako zračiti energiju i približavati se sve više jezgri dok u konačnici ne upadne u nju. No pogledamo li što se događa ako ne dolazi do zračenja energije, tada ćemo vidjeti da se elektron nalazi u *eliptičnoj* putanji oko jezgre gdje je  $f_v$  frekvencija kruženja, a  $a$  poluos putanje (Bohr za  $f_v$  koristi oznaku  $\omega$  koja se danas koristi za oznaku kružne frekvencije, pa smo ju radi jasnoće ovdje izmijenili). Treba uočiti da Bohr nije postulirao kružne putanje, već itekako razmatra eliptične putanje, ali kasnije eksplicitno ustvrđuje da njegov model funkcionira bez obzira na oblik putanje pa u sve račune uzima kružnu putanju zbog jednostavnosti. Vrijednost  $f_v$  određuje količinu energije  $W$  koju je potrebno uložiti da bi se elektron odvojio od jezgre do beskonačne udaljenosti. Ako s  $-e$  i  $E$  označimo naboj elektrona i jezgre, te s  $m$  masu elektrona

$$2a = \frac{Ee}{W}, \quad f_v = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W^{3/2}}{eE\sqrt{m}}, \quad (5)$$

pri čemu treba imati na umu da je Bohr jednačbe pisao u “cgs” sustavu jedinica (gdje je  $c = \text{cm}$ ,  $g = \text{gram}$  i  $s = \text{sekunda}$ , a Coulombova konstanta  $k$  je 1).

Može se pokazati da je srednja vrijednost kinetičke energije u periodu kruženja elektrona jednaka  $W$ , tj. ako je  $W$  nula tada neće postojati rješenje koje će imati konačne vrijednosti  $f_v$  i  $a$ .

Ako sad dozvolimo elektronu da zrači, on će polako padati do jezgre i izračiti ogromnu količinu energije (veću od rentgenske), što svakako nije opaženo u prirodi. S jedne strane znamo da su dimenzije atoma u stabilnom stanju fiksne, i također znamo da kad kroz pobudu sustav izbaci određenu energiju (npr. Balmerove linije) on će se vratiti u ravnotežno stanje s početnim dimenzijama. Bohr zatim nastavlja razmatranje za kružnu elektronsku orbitu zbog jednostavnosti modela, ali napominje da “. . . this assumption will, however, make no alteration in the calculations for system containing only a single electron”. S tim na umu u daljnjim jednadžbama  $2a$  pišemo kao  $2R$ , gdje je  $R$  radijus kružne putanje.

Planckova teorija je pokazala da se zračenje odvija u paketima  $nh\nu$ . Stoga, pogledajmo koja bi bila veza između energije zračenja i gibanja elektrona: pretpostavimo da je prilikom dovođenja elektrona iz beskonačnosti u stacionarno stanje došlo do emisije zračenja frekvencije  $\nu$  koja je jednaka polovini frekvencije kruženja elektrona u konačnoj orbiti  $f_v$ . Ovu pretpostavku Bohr pravda time da je to srednja vrijednost kruženja jer je na početku ovog procesa  $f_v = 0$  (iako kasnije daje i dodatno pojašnjenje). Tada će to zračenje nositi energiju  $nh\nu$  (Bohr u svom radu za cijeli broj  $n$  koristi oznaku  $\tau$ ). Drugim riječima, tada je

$$W = nh\frac{f_v}{2}, \quad (6)$$

te ubacimo li to u ranije izraze slijedi

$$W = \frac{2\pi^2me^2E^2}{n^2h^2}, \quad f_v = \frac{4\pi^2me^2E^2}{n^3h^3}, \quad 2R = \frac{n^2h^2}{2\pi^2meE}. \quad (7)$$

Iz ovih izraza se vidi kako  $W$ ,  $f_v$  i  $R$  ovise o  $n$ , tj. prikazuju različite konfiguracije (stanja) sustava. Pretpostavka je da su ta stanja zapravo stacionarna u kojima nema zračenja energije dokle god sustav nije izvana pobuđen. Ubacimo li  $n = 1$ , te za jezgru  $E = e$  (što odgovara za vodikov atom) dobije se da je  $2R = 1.1 \text{ \AA}$  i  $W = 13 \text{ eV}$ , što je ispravnog reda veličine s dimenzijama atoma i energijama ionizacije.

Bohr zatim eksplicitno navodi dvije glavne pretpostavke preko kojih su napravljeni ovi izračuni (zbog raznih oblika njihovih formulacija u udžbenicima za srednju školu, ovdje ćemo ih direktno citirati):

(1) *That the dynamical equilibrium of the systems in the stationary states can be discussed by help of the ordinary mechanics, while the passing of the systems between different stationary states cannot be treated on that basis.*

(2) *That the latter is followed by the emission of a homogeneous radiation, for which the relation between the frequency and the amount of energy emitted is the one given by Planck's theory.*

Kao što smo i ranije rekli on ne postulira isključivo kružne putanje, a kao što se vidi iz onog što je dosad prikazano ne postulira ni kvantiziran angularni moment.

U izlaganju do ove točke Bohr je pokazao što će se dogoditi ako dovedemo elektron iz beskonačnosti u stabilnu orbitu oko jezgre. Sad kreće prikaz da iz ovih razmatranja možemo reproducirati vodikove linije. Dakle, ukoliko sustav prelazi iz višeg stanja koje odgovara  $n_1$  u niže stanje koje odgovara  $n_2$ , tada je energija zračenja za slučaj vodika jednaka

$$W_{n_2} - W_{n_1} = \frac{2\pi^2me^4}{h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (8)$$

Ako i dalje uzimamo da je to zračenje monokromatsko (Bohr kaže homogeno) tada će vrijediti

$$W_{n_2} - W_{n_1} = h\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (9)$$

Iz ovoga slijedi da se, za slučaj da je  $n_2 = 2$  i vrijednosti  $n_1 = 3, 4, 5$  i  $6$ , dobiju Balmerove linije. Ako je  $n_2 = 3$  dobiju se Paschenove linije.

Zatim se Bohr vraća na svoju prvotnu vezu o odnosu frekvencije kruženja elektrona i frekvencije zračenja, te pokazuje da je ono matematička posljedica principa korespondencije, tj. očekivanja da se atom ponaša kvantno pri malim dimenzijama i na energijama osnovnih stanja, ali da se pri visokim energijama ponaša klasično.

Pretpostavimo da je ovisnost energije  $W$  o frekvenciji  $f_\nu$  neka općenita funkcija  $W = f(n) \cdot hf_\nu$ . Tada ćemo ponavljajući isti izvod kao ranije doći do jednadžbi

$$W = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^2 f^2(n)}, \quad f_\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^3 f^3(n)}, \quad (10)$$

s kojima ćemo dobiti da je frekvencija zračenja  $\nu$  pri prelasku iz višeg stanja  $n_1$  u niže stanje  $n_2$

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^3} \left( \frac{1}{f^2(n_2)} - \frac{1}{f^2(n_1)} \right). \quad (11)$$

Da bismo dobili isti izraz kao Balmer, tada mora slijediti da je  $f(n) = c \cdot n$ . Pri prelasku iz stanja  $n = N$  u stanje  $n = N - 1$ , uz  $f(n) = c \cdot n$  slijedi da je frekvencija zračenja

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2c^2 h^3} \frac{2N - 1}{N^2 (N - 1)^2}, \quad (12)$$

a frekvencije rotacije elektrona prije i poslije zračenja će biti

$$f_\nu(N) = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2c^3 h^3 N^3}, \quad f_\nu(N - 1) = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2c^3 h^3 (N - 1)^3}. \quad (13)$$

Kada je  $N$  jako velik, tada je omjer  $f_\nu(N)/f_\nu(N - 1)$  vrlo blizu 1, što je u skladu s klasičnom elektrodinamikom. Jednako tako, za  $N \rightarrow \infty$  će vrijediti kako omjer  $\nu/f_\nu(N) \rightarrow 1$ , ponovno u skladu s klasičnom elektrodinamikom. Ali to će biti ispunjeno samo ako je  $c = 1/2$ . Stoga, da bismo imali korespondenciju s klasičnim sustavima  $c = 1/2$  je nužan uvjet, a ono će dati naše prvotne izraze za stacionarna stanja.

Tek nakon što je kompletno formulirao svoj model atoma, i vezu s klasičnom fizikom i eksperimentom, on razmatra što gornji izrazi daju za angularni moment. Za kružnu orbitu će vrijediti da je

$$W = \frac{1}{2} I (2\pi f_\nu)^2 = \pi f_\nu L. \quad (14)$$

Iz čega zatim slijedi da je i angularni moment kvantiziran:

$$L = \frac{W}{\pi f_\nu} = \frac{nh\nu}{\pi f_\nu} = \frac{nh}{\pi} \frac{f_\nu}{2} = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar. \quad (15)$$

Dakle, izraz  $L = n\hbar$  nije postuliran – on je posljedica prvotno postavljenih postulata do kojeg se došlo izračunom. Jedan od mogućih uzroka zašto se zadnji izraz doživljava kao postulat jest što se Bohrov prvi postulat o postojanju stacionarnih stanja također može interpretirati kao postulat o *konstantnom* angularnom momentu dok je sustav u ravnoteži. Ali to ne znači da je postuliran i cjelobrojna vrijednost kvocijenta  $L/\hbar$ .



---

## Zaključak

---

Ovo izlaganje ne treba se shvatiti kao sugestija da se upravo na ovaj način učenicima i studentima predaje Bohrov model i povijest razvoja atoma, već da se istaknu nagomilane greške u prikazu povijesnih i znanstvenih činjenica kako bi se iste ubuduće izbjegle. Želimo li da se znanost tretira kao disciplina vrijedna poštovanja zbog predanosti činjeničnoj istini, tada moramo i sami stremiti potiskivanju netočnosti u njezinoj prezentaciji. Kao što je vidljivo iz opisa, Bohrov model je rezultat sustavnog i preciznog praćenja znanstvenih spoznaja koje su se prikupljale tijekom 99 godina, krenemo li od prvotnog Fraunhoferovog opažanja. Kako bi se nove spoznaje nastavile otkrivati, moramo osigurati da postojeća znanja tvore zdrave temelje na kojima se dalje gradi.

---

## Literatura

---

- [1] J. R. VON FRAUNHOFER, *Denkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München*, **5**: 193 (1814.–1815.).
- [2] G. KIRCHOFF, *Monatsbericht der Königlich Preussische kademie der Wissenschaften zu Berlin*, **662** (1859).
- [3] M. FARADAY, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **128**, 125–168 (1838).
- [4] W. CROOKS, *Phil. Trans.*, **170**, 135–164 (1878).
- [5] J. J. THOMSON, *Philosophical Magazine*, **44**, 293–316 (1897).
- [6] J. J. THOMSON, *Philosophical Magazine*, **7**, 237 (1904).
- [7] G. KIRCHOFF, *Annalen der Physik und Chemie*, **109**, 275 (1860).
- [8] M. PLANCK, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, **5**: 440–480 (1899); *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. 2, 202 (1900).; *Annalen der Physik* 309, 553 (1901).
- [9] H. HERTZ, *Ann. Phys.*, **267**, 983 (1883).
- [10] P. LENARD, *Ann. Phys.*, **313**, 149 (1902).
- [11] R. A. MILLIKAN, *Phys. Rev. B*, **7**, 355 (1916).
- [12] A. EINSTEIN, *Ann. Phys.*, **322**, 132 (1905)
- [13] J. J. BALMER, *Annalen der Physik und Chemie*, **25**, 80–5 (1885).
- [14] T. LYMAN, *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, New Series, **13**, 125 (1906).
- [15] F. PASCHEN, *Ann. Phys.*, **332**, 537 (1908).
- [16] J. R. RYDBERG, *Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, **23**, 1 (1889).
- [17] H. GEIGER, E. MARSDEN, *Royal Society of London*, **82**, 499 (1909); E. Rutherford, *Philosophical Magazine* 21, 671 (1911); H. Geiger, E. Marsden, *Philosophical Magazine* 25, 604 (1913).
- [18] N. BOHR, *Philos. Mag.*, **26**, 1 (1913).
- [19] F. CARUSO, V. OGURI, *The Old and New Concepts of Physics VI*, **139** (2009).