Trokuti, Steinerove elipse i Mardenov teorem

Darko Veljan[1]

Uvod

Za Mardenov sam teorem saznao nedavno, čitajući šarmantnu knjižicu o matematičkoj analizi profesora Ivice Martinjaka [1] o kojoj sam govorio na predstavljanju knjige. Taj teorem povezuje kompleksnu analizu, polinome, analizu i geometriju na impresivan način. Ukratko i uvodno, odavno je poznato da postoje opisana (i upisana) elipsa trokuta, tzv. Steinerove elipse, kao što postoje opisana (i upisana) kružnica svakog trokuta (a što je ekvivalentno Euklidovom V. postulatu). Te se elipse dobiju afinom transformacijom ravnine kao kompozicije od nekoliko translacija, rotacija i sličnosti. Ime su dobile prema švicarsko-njemačkom matematičaru Jakobu Steineru (1796. – 1863.) koji ih je među prvima dubinski proučavao. Bilo koji trokut je afina slika jednakostraničnog trokuta, a opisana i upisana kružnica prelaze u te elipse. Pretpostavimo da polinom $P(z)$ trećeg stupnja s kompleksnim koeficijentima ima tri nekolinearne nultočke (korijene) koji čine vrhove trokuta T u kompleksnoj ravnini. Tada postoji jedinstvena elipsa upisana u taj trokut koja u polovištima dira stranice trokuta T, čiji su fokusi (žarišta) nultočke derivacije $P'(z)$, a središte elipse u nultočki druge derivacije $P''(z)$ koja je težište G trokuta T. Ta tzv. unutarnja Steinerova elipsa homotetična je s tzv. vanjskom Steinerovom elipsom koja prolazi vrhovima od T, a središte joj je također u G. Obje su te elipse homotetične sa središtem u G, a s koeficijentom sličnosti jednakim 2.

Tu je tvrdnju prvi opisao Jörg Siebeck još 1864., a ponovo ju je razmatrao u nekoliko članaka i knjiga od 1945. do 1966. Morris Marden (1905. – 1991.), pa se opisana tvrdnja po njemu tako i zove: Mardenov teorem. Elementarni, ali duži dokaz dao je D. Kalman u [2], rabeći među ostalim i optičko ili zrcalno svojstvo elipse, naime da se zraka svjetlosti iz jednog fokusa reflektira preko tangente u drugi fokus (v. [3], str. 386–388); zato se i zovu fokusi. Suvremena knjiga o elipsama i uopće o čunjosječnicama (ili konikama) je [4].

Podsjetimo se da za polumjere R i r trokutu opisane i upisane kružnice vrijedi Eulerova nejednakost $R \geq 2r$ (iz 1765.) s jednakošću samo za jednakostranični trokut. U tom su slučaju obje Steinerove elipse zapravo kružnice (fokusi se podudaraju) i homotetične su iz središta trokuta s koeficijentom 2, pa je tada (i samo tada) $R = 2r$. Zanimljivo je da su u nekom smislu Steinerove elipse bolje od kružnica jer su one homotetične s koeficijentom homotetičnosti 2 za svaki trokut, a ne samo za jednakostranični. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, u [5] je Eulerova nejednakost profinjena na (unutarnji) način tako da je

$$\frac{R}{r} \geq \frac{abc + a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \geq 2$$

(posljednja nejednakost je posljedica aritmetičko-geometrijske nejednakosti) i slično, ali puno složenije za tetraedre i za više dimenzije. Upravo zato me je i zainteresirao Mardenov teorem.

---

[1] Autor je redoviti profesor u miru s Matematičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu;
e-pošta: `darko.veljan@gmail.com`

Mardenov teorem

Prije nego iskažemo Mardenov teorem, izrecimo teorem koji će nam trebati.

Gauss-Lucasov teorem (oko 1830.). Ako je $P(z)$ polinom (s kompleksnim koeficijentima) koji nije konstanta različita od 0, onda su sve nultočke derivacije $P'(z)$ u konveksnoj ljusci skupa svih nultočaka (korijena) samog polinoma $P(z)$.

Nećemo dokazivati teorem u pojedinostima, nego ćemo samo razjasniti neke pojmove. Konveksna ljuska nekog skupa točaka je presjek svih konveksnih (izbočenih) skupova koji sadrže taj skup. Neki skup K je konveksan ako ima svojstvo da ako sadrži neke dvije točke onda sadrži i dužinu koja ih spaja. Konveksna ljuska skupa S (u kompleksnoj ravnini i općenitije) označava se s $\operatorname{conv}(S)$ i pokazuje se da se svaka točka iz $\operatorname{conv}(S)$ može prikazati kao tzv. konveksna suma, tj. konačna suma oblika $\sum a_i s_i$, gdje su $s_i \in S$, a realni brojevi $a_i \in [0, 1]$ čija je suma jednaka 1. Ideja dokaza Gauss-Lucasovog teorema je da se $P(z)$ napiše kao produkt linearnih faktora $a\prod_{i=1}^{k}(z - z_i)$, gdje su z_i sve nultočke od $P(z)$. Tada se pođe od logaritamske derivacije $0 = P'(z)/P(z)$ i uz malo računanja se dobije da je z konveksna suma kompleksnih brojeva z_i.

Jedan posebni slučaj Gauss-Lucasovog teorema je svima dobro poznat. Ako je $P(x) = ax^2+bx+c$, onda je nultočka derivacije $P'(x) = 2ax+b$ na polovištu korijena (nultočaka) od $P(x)$. U tome je slučaju konveksna ljuska dvaju korijena od P dužina koja spaja ta dva korijena i polovište leži na toj dužini. Ako je $P(x)$ realni polinom stupnja n i ima n različitih realnih korijena $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, tada se pomoću Rolleovog teorema lako dokaže da su korijeni derivacije $P'(x)$ u segmentu $[x_1, x_n]$ što je konveksna ljuska svih korijena od $P(x)$.

Sada konačno iskažimo glavni teorem.

Mardenov teorem. Neka je $P(z)$ kompleksni polinom trećeg stupnja čije tri nultočke z_1, z_2, z_3 nisu kolinearne, tj. ne leže sve na jednom pravcu. Označimo ih s A, B, C. Tada (zbog Gauss-Lucasovog teorema) korijeni od derivacije $P'(z)$ leže u trokutu $T = ABC$. Postoji jedinstvena elipsa E upisana u trokut ABC koja dira stranice trokuta T u polovištima stranica od T. Ta se elipsa zove Steinerova unutarnja ili inelipsa od T. Fokusi Steinerove inelipse su korijeni derivacije $P'(z)$, a korijen druge derivacije $P''(z)$ je središte Steinerove inelipse i podudara se s težištem G trokuta $T = ABC$. Nadalje, postoji jedinstvena elipsa E' koja prolazi kroz sva tri vrha A, B, C i ima središte u težištu G, a zove se vanjska ili opisana Steinerova vanjska elipsa trokuta T. Elipse E i E' su homotetične sa središtem homotetije u G i koeficijentom 2. Površina elipse E' jednaka je (sjetimo se da je površina elipse produkt duljina njenih poluosi i π) $p(T)\cdot\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, gdje je $p(T)$ površina trokuta T, i stoga je 4 puta veća od površine elipse E. E' ima najmanju površinu od svih opisanih elipsa trokuta T, a E najveću površinu od svih upisanih elipsa trokuta T. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta $T = ABC$ onda su velika, odnosno mala poluos opisane Steinerove elipse

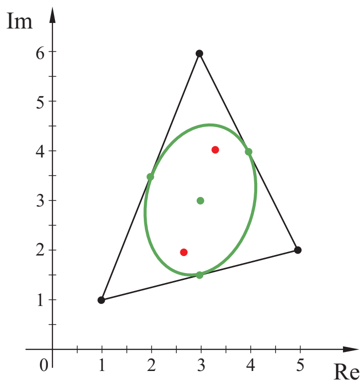
$$\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \pm 2Z}.$$

Pritom je $Z \geq 0$ dan sa

$$Z = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - (ab)^2 - (bc)^2 - (ca)^2},$$

a žarišna daljina je $\frac{2}{3}\sqrt{Z}$. Te se žarišne točke katkad nazivaju Bickardove točke trokuta. Svaka od njih ima svojstvo da cevijane kroz njih imaje jednake duljine. Cevijane kroz točku trokuta su dužine od vrha do suprotne stranice trokuta; dobile su ime prema talijanskom matematičaru koji ih je među prvima proučavao: Giovanni Ceva (1648. – 1734.).

Primjer. Na slici je trokut T čiji su vrhovi (crne točke) kompleksni brojevi $1+i$, $5+2i$, $3+6i$. Neka je $P(z)$ polinom trećeg stupnja kome su ti vrhovi nultočke. Polovišta stranica trokuta su dirališta Steinerove upisane elipse (inelipse) trokuta T. Nultočke derivacije $P'(z)$ su fokusi (žarišta) te elipse (crvene točke), a nultočka druge derivacije $P''(z)$ je središte elipse (zelena točka) koja je ujedno i težište trokuta T. Pokušajte se na ovom primjeru uvjeriti u sve te tvrdnje. Steinerova vanjska elipsa E' prolazi vrhovima trokuta T i homotetična je s upisanom elipsom s koeficijentom homotetije 2 i sa zajedničkim središtem. Pokušajte je konstruirati.



Dokaz. Dokazat ćemo samo glavnu (prvu) tvrdnju teorema, dok se ostale dokazuju lakše. Očito je da afinim preslikavanjem možemo dovesti koordinatni sustav u bilo koji položaj čime ne gubimo općenitost. Stoga pođimo od bilo kojeg trokuta s upisanom elipsom čije su poluosi a i b na koordinatnim osima sa središtem elipse u ishodištu O i fokusima u točkama $(-c,0)$ i $(c,0)$, $c^2=a^2-b^2$. (Ove a, b, c razlikujte od onih pri kraju iskaza teorema.) Neka su $z_j=x_j+iy_j$, $j=1,2,3$ vrhovi trokuta, korijeni polinoma $P(z)$. Razvucimo linearno os Oy za b/a, čime elipsa prelazi u kružnicu, a vrhovi trokuta u vrhove $z'_j=x'_j+iy'_j$, tako da je $x_j=x'_j$, $y_j=(b/a)y'_j$. Polovišta početnog trokuta prelaze u polovišta novog trokuta kojemu je upisana elipsa zapravo kružnica pa je taj trokut jednakostraničan (zašto?). Stoga je $\sum z'_j=0$ (zato je također i $\sum z_j=0$). Za početni trokut stoga imamo $P(z)=z^3+pz+q$. Dalje, z'_j stoga moraju biti korijeni jednadžbe $z^3=M$ (za neko M), odakle imamo $\sum z'_j z'_{j+1}=0$, pa je i $\sum {z'}_j^2=0$. Slijedi $\sum {x'}_j^2=\sum {y'}_j^2$ te $\sum x'_j y'_j=0$. Kako je a polumjer upisane kružnice u jednakostraničnom trokutu, imamo $(x'_j)^2+(y'_j)^2=(2a)^2$, a odavde $\sum (x'_j)^2=\sum (y'_j)^2=(1/2)\cdot 3\cdot(2a)^2=6a^2$ i stoga $\sum x_j^2=(a^2/b^2)\sum y_j^2=6a^2$.

Stoga je $2p=2\sum z_j z_{j+1}=(\sum z_j)^2-\sum z_j^2=-\sum z_j^2=-\sum x_j^2+\sum y_j^2-2i\sum x_j y_j=-6c^2$. Stoga $P'(z)$ iščezava u točkama za koje je $3z^2=-p=3c^2$, tj. $z=c$ ili $z=-c$. Time je prvi i najvažniji dio Mardenovog teorema dokazan. □

Zaključak

Osim vrlo korisnog Mardenovog teorema, koji je već našao primjene u samoj matematici (primjerice u teoriji dinamičkih sustava), teorijskoj fizici, računalstvu i drugdje, jedna od Mardenovih poznatih slutnji iz kompleksne analize još iz 1960-ih godina (koja se katkad pripisuje B. Sendovu 10-ak godina ranije) glasi ovako: Ako su sve nultočke kompleksnog polinoma $P(z)$ unutar jediničnog kruga $|z| < 1$ i ako je w jedna od njih onda postoji barem jedna kritična točka od $P(z)$ koja je unutar kruga $|z-w| < 1$, tj. kruga oko w polumjera 1. Podsjetimo se da je kritična točka od $P(z)$ točka u u kojoj je derivacija $P'(u) = 0$ ili tu nije definirana. Neke je prodore 2022. u svezi Mardenove slutnje učinio poznati australsko-američki matematičar T. Tao, ali slutnja i dalje ostaje općenito neriješena, barem do sada.

S obzirom na rad [5], možemo se upitati što bi uopće bio neki višedimenzionalni analogon Mardenovog teorema, gdje umjesto trokuta u ravnini treba razmatrati simplekse u višim dimenzijama (tetraedre itd.) i umjesto polinoma u jednoj varijabli, polinome u više varijabli, umjesto običnih derivacija – parcijalne (djelomične) derivacije i možda razmatranja u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi – vrlo zahtjevnom području suvremene matematike, te umjesto elipsi i njenih žarišta – neke plohe i neke istaknute točke vezane za plohu. Jedna bi mogućnost možda bila polinomi četvrtog stupnja kao produkti dvaju kvadratnih polinoma u $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ i razmatrati elipsoide (afine slike sfera) koje diraju strane tetraedra u težištima strana.

A u svezi Mardenove slutnje umjesto kruga – kugle viših dimenzija i opet parcijalne derivacije. No to su već maštanja, nejasne slutnje i iluzije. Kao što Mardenov teorem ima već nekih primjena u samoj matematici, fizici, računalstvu i drugdje, tako bi i slutnja mogla imati brojne primjene. O ovoj i sličnoj problematici Marden je objavio knjigu [6].

Literatura

[1] I. Martinjak, *Matematička analiza, in medias res*, Crotech, Zagreb, 2023.

[2] D. Kalman, *Elementary proof of Marden's theorem*, Amer. Math. Monthly, **115** (4) (2008), 330–338.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[4] G. Glaser, H. Stachel, B. Odenhal, *The Universe of Conics*, Springer, 2016.

[5] D. Veljan, *Refined Euler's inequalities in plane geometries and spaces*, Rad HAZU, Matematičke znanosti **27** (2023), 167–173.

[6] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, AMS, Providence, R. I., II ed., 1966.