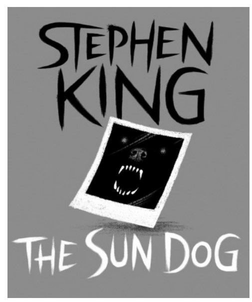
Dužničko ropstvo

Petar Žugec[1], *Eric Andreas Vivoda*[2]

Stephen Edwin King (rođ. 1947.), američki pisac i "kralj horora".

Poznati američki pisac Stephen King u petom poglavlju novele *Sunov pas* (eng. *The Sun Dog*) iz zbirke četiriju novela *Četiri iza ponoći* (eng. *Four Past Midnight*) opisuje nevolje jednoga od glavnih likova nakon što se uvukao u nepoštenu kamatarsku praksu. U ovome radu prikazat ćemo pojednostavnjeni model kamatnog računa u pozadini priče, osmišljen s ciljem da dužnika dovede u dužničko ropstvo. Dužničko ropstvo posebna je i vrlo stvarna vrsta strave i užasa, žanra kojim King majstorski vlada.

Inače nezakonit model kamatnoga računa opisanog u Kingovoj priči posebno je podmukla inačica *složenog kamatnog računa*. Lijep opis i jasne definicije osnovnih pojmova kamatnoga računa – poput zajma i duga; vjerovnika i dužnika; glavnice, kamatne stope, razdoblja ukamaćivanja, kamate, itd. – mogu se pronaći u lako dostupnim izvorima [1–8]. Osnovno obilježje *složenoga* kamatnog računa jest pripisivanje kamate ne samo na osnovni posuđeni iznos (glavnicu) – kao što je slučaj s *jednostavnim kamatnim računom* – nego i *kamate na kamatu*. Stoga je u narednim otplatnim razdobljima (razdobljima ukamaćivanja) kamata sve veća i veća.



Ono što kamatni model iz Kingove novele čini zloćudnim jest *sloboda otplate* duga u skladu s trenutnim mogućnostima glavnoga lika, bez unaprijed jasno dogovorene i strogo definirane strategije otplate. U poštenoj zajmodavnoj praksi unaprijed se utvrđuje klijentova sposobnost otplaćivanja duga. Na temelju nje utvrđuje se koliki mu se zajam uopće smije odobriti te se unaprijed dogovara strategija otplate koje se treba strogo pridržavati. Ta strategija sastoji se i od poznatog iznosa otplate u svakom otplatnom razdoblju i od poznate količine takvih otplata. Drugim riječima, unaprijed je definirano i poznato trajanje otplate ukupnoga duga. U Kingovoj priči pak strategija otplate ostavljena je na slobodu dužniku, sve do otplate ukupnoga duga. Međutim, nakon svakog otplatnog razdoblja kamata – i to visoka – pripisuje se *na ukupan preostali iznos duga*. Zamislimo samo porast ničime reguliranog duga u slučaju da nismo u mogućnosti otplatiti barem dodatnu kamatu na dug iz prethodnog razdoblja! Tako nastaje dužničko ropstvo. Je li se nesretni dužnik iz Kingove priče izvukao iz ove situacije – na koji način i uz koju cijenu – ostavljamo čitatelju da sam otkrije. Sve što ćemo ovdje učiniti jest jasno matematički modelirati ovaj horor, u nadi da ćemo na greškama, pa makar i zamišljenog lika, naučiti dovoljno da se sami ne nađemo u spirali egzistencijalnog užasa.

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

[2] Autor je s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: evivoda@phy.hr

Kamatarenje

Dužnik iz Kingove priče otplaćuje svoj dug u skladu sa svojim mogućnostima, što je i osnovna ideja opisanog modela kamatarenja. Drugim riječima, u pojedinom otplatnom razdoblju otplaćuje koliko god može i to doista čini u promjenjivim iznosima. Za potrebe svojega računa pretpostavit ćemo da su iznosi otplate u svakom razdoblju jednaki. U suprotnome bismo malo što mogli konkretno izračunati.

Na pregledan način uvedimo osnovne veličine koje će nam trebati:

$$\begin{aligned} G &= \text{glavnica,} \\ k &= \text{kamatna stopa,} \\ R &= \text{iznos (rata) otplate u jednom otplatnom razdoblju,} \\ D_n &= \text{dug nakon } n \text{ otplatnih razdoblja.} \end{aligned}$$

Pri tome za k koristimo decimalni, umjesto postotnog zapisa. Na primjer, $k = 0.05$ za stopu od $5\ \%$.

U poštenoj zajmodavnoj praksi iznos otplate R izravno je određen glavnicom, kamatnom stopom te unaprijed dogovorenim rokom otplate, tj. ukupnim dogovorenim brojem otplatnih razdoblja. U modelu kamatarenja koji ovdje promatramo iznos pojedinih otplata ostavljan je dužniku na izbor. Stoga nas zanima nakon koliko će otplatnih razdoblja otplatiti ukupan dug, odnosno zanima nas kako ukupan rok otplate ovisi o parametrima zajma G i k te ponajviše o dužnikovoj sposobnosti otplaćivanja R.

Kako promatramo model složenog ukamaćivanja, kamata se u pojedinom (n-tom) razdoblju zaračunava na ukupan preostali dug D_{n-1} iz prethodnog razdoblja. Stoga je dug na *početku* n-tog razdoblja jednak $(1+k)D_{n-1}$. Tijekom tog razdoblja dužnik otplaćuje dio duga R, stoga je dug D_n na *kraju* razdoblja jednak:

$$D_n = (1+k)D_{n-1} - R, \tag{1}$$

što je središnja rekurzivna relacija koju moramo riješiti. Pri tome nam je potrebna početna vrijednost duga kao početni uvjet za rješavanje ove linearne rekurzije. U trenutku podizanja zajma $(n = 0)$ ona je jednaka posuđenome iznosu, tj. glavnici:

$$D_0 = G. \tag{2}$$

Odmah primijetimo bitna ograničenja na (konstantni) iznos otplate R. On svakako mora biti veći od početne kamate: $R > kG$. U suprotnome dužnik ne bi uspio otplatiti ni najmanji dio osnovnoga duga (glavnice) pa bi mu dug u svakom razdoblju samo rastao (za $R < kG$) ili u krajnjem slučaju stagnirao (za $R = kG$). S druge strane, uspije li u prvome razdoblju osigurati povrat čitavoga duga, uz glavnicu treba otplatiti samo jedan kamatni iznos kG. Prema tome:

$$kG < R \leqslant (1+k)G. \tag{3}$$

Rekurziju (1) riješit ćemo raspisom prvih nekoliko članova uz pokušaj uočavanja pravilnosti među njima. Radi preglednosti privremeno uvodimo sljedeću pokratu za kamatni faktor:

$$f \equiv 1 + k \tag{4}$$

te je koristimo u raspisu prvih triju članova:

$$\begin{aligned} D_1 &= Gf - R, \\ D_2 &= Gf^2 - Rf - R, \\ D_3 &= Gf^3 - Rf^2 - Rf - R. \end{aligned}$$

Pravilnost je jednostavno uočiti, stoga naslućujemo općenit oblik rješenja:

$$D_n = Gf^n - R\sum_{i=0}^{n-1} f^i, \tag{5}$$

koji bismo po potrebi lako dokazali matematičkom indukcijom. Pojavila se suma prvih članova geometrijskoga niza, koja vodi na poznati rezultat:

$$D_n = Gf^n - R\frac{1-f^n}{1-f} = Gf^n + R\frac{1-f^n}{k}. \tag{6}$$

U nazivniku smo iskoristili $1-f = -k$, prema definiciji iz (4). Preuređivanjem članova konačno imamo:

$$D_n = \frac{R}{k} - \left(\frac{R}{k} - G\right) f^n. \tag{7}$$

Traženi broj razdoblja nakon kojeg će dužnik otplatiti sav dug određujemo iz uvjeta da preostali dug više nije pozitivan:

$$D_n \leqslant 0 \implies f^n \geqslant \frac{R}{R-kG}. \tag{8}$$

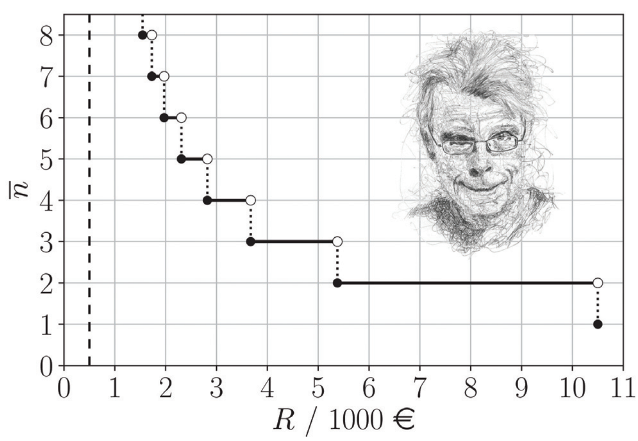
Odavde za redni broj posljednjeg otplatnog razdoblja slijedi:

$$n \geqslant \log_f \frac{R}{R-kG}, \tag{9}$$

što znači da traženi cijeli broj $\overline{n}$ razdoblja možemo odrediti korištenjem funkcije *strop* $\lceil\cdot\rceil$ koja vraća najmanji cijeli broj veći ili jednak argumentu. Budući da je u programskim jezicima i na kalkulatorima najlakše dostupan prirodni logaritam, koristimo identitet $\log_b a = \log_c a / \log_c b$ za prijelaz između baza kako bismo zapisali konačno cjelobrojno rješenje kao:

$$\overline{n} = \left\lceil \frac{\ln[R/(R-kG)]}{\ln(1+k)} \right\rceil. \tag{10}$$

Dakle ovo je ukupan broj otplatnih razdoblja potrebnih za otplatu sveg duga pojedinačnim otplatama iznosa R.



Slika 1. Ovisnost broja otplatnih razdoblja o iznosu pojedinačnih otplata R, za glavnicu $G = 10\,000$ € i kamatnu stopu od $k = 5$ %. Lijevi, divergentni dio grafa predstavlja egzistencijalni užas.

Slika 1 prikazuje ovisnost iz (10) za glavnicu od $G = 10\,000$ € posuđenu s kamatnom stopom $k = 0.05$, tj. 5 %. Analizom ovog izraza – uz privremeni povratak na zapis preko baze $f = 1 + k$, kao u (9) – nalazimo u kojem rasponu treba biti R da bi ukupan broj otplatnih razdoblja bio $\overline{n}$:

$$\overline{n} - 1 < \log_{1+k} \frac{R}{R - kG} \leqslant \overline{n} \implies \frac{kG(1+k)^{\overline{n}}}{(1+k)^{\overline{n}} - 1} \leqslant R < \frac{kG(1+k)^{\overline{n}-1}}{(1+k)^{\overline{n}-1} - 1}. \tag{11}$$

Ove granice na R upravo odgovaraju granicama odvojenih platoa sa slike 1. Kao što smo predvidjeli u (3), najveći iznos pojedinačne otplate jest $R_{\max} = (1 + k)G = 10\,500$ €, što je jedina vrijednost pri kojoj je dovoljno samo jedno otplatno razdoblje $(\overline{n} = 1)$. Dužnik tada sav dug otplaćuje odjednom. Donja granica na iznos pojedinačne otplate, $R_{\min} = kG = 500$ €, označena je crtkanom vertikalnom linijom. Samo za pojedinačne otplate R strogo iznad te granice moguća je otplata duga u konačnom vremenu, tj. konačnom broju razdoblja. U suprotnome dužnik ulazi u vječno dužničko ropstvo u kojem je sa svakom otplatom duga *sve dužniji i dužniji* ili, u krajnjem slučaju, ostaje sve vrijeme na istoj razini duga. Donja granica $R_{\min}$ za cjeloživotno ropstvo u praksi je još i viša. Naime, da bismo dug otplatili tijekom, a vrlo poželjno i prije isteka životnoga vijeka, nije dovoljno samo da je broj otplatnih razdoblja konačan. On mora biti dovoljno nizak da se duga riješimo u nekom razumnom vremenu. Za $\overline{n}_{\max}$ kao najviši prihvatljiv broj otplatnih razdoblja u stvarnome životu, iz (11) vidimo da je *praktična* donja granica (sada i minimum) pojedinačnih otplata jednaka:

$$R_{\min} = \frac{kG(1+k)^{\overline{n}_{\max}}}{(1+k)^{\overline{n}_{\max}} - 1}. \tag{12}$$

Sada se prirodno nameće pitanje: koliki je ukupni kamatni iznos dužnik otplatio tijekom čitave otplate duga? Osim ako je u (10) argument funkcije strop već cjelobrojan, u posljednjem razdoblju dužnik ne treba oplatiti uobičajeni iznos R, već samo umanjeni iznos posljednjega dijela duga. Budući da je vrijednost te posljednje otplate između 0 i R, možemo procijeniti da će ukupan otplaćeni dug U ugrubo iznositi $U \approx (\overline{n} - 0.5)R$. Ovime smo odmah dobili osjećaj za ukupne otplaćene kamate K. Sasvim prirodno, one su definirane kao razlika ukupnoga otplaćenoga duga i posuđene glavnice:

$$K = U - G. \tag{13}$$

U stvarnoj praksi otplate duga, naravno, strategija otplate posljednje rate mora biti jasno definirana. Mi ćemo se ovdje voditi jedino željom za nekom *kontinuiranom* ovisnošću ukupne otplate U i ukupne kamate K o pojedinačnim otplatama R kako bismo je lako prikazali, analizirali i razumjeli[3]. U slučaju da je argument funkcije strop iz (10) cjelo-

---

[3] Traženu kontinuiranu ovisnost mogli bismo pažljivo modelirati na sljedeći način. Analogno ukupnom broju *svih* otplata iz (10), definirajmo ukupan broj *cjelovitih* otplata iznosa R:

$$\underline{n} = \left\lfloor \frac{\ln[R/(R - kG)]}{\ln(1+k)} \right\rfloor.$$

Razlika s obzirom na $\overline{n}$ jedino je u korištenju funkcije *pod* $\lfloor \cdot \rfloor$ koja vraća najveći cijeli broj manji ili jednak argumentu. U većini slučajeva vrijedi $\underline{n} = \overline{n} - 1$. Kontinuiranu ovisnost ukupne otplate o R mogli bismo dobiti zahtjevom da se na posljednji preostali iznos duga $D_{\underline{n}}$ kamate pripisuju na isti način kao i na sve ranije iznose:

$$U = \underline{n}R + (1+k)D_{\underline{n}}.$$

Korištenjem (7) i (13) tada bismo dobili kontinuiranu ovisnost ukupnih kamata o R:

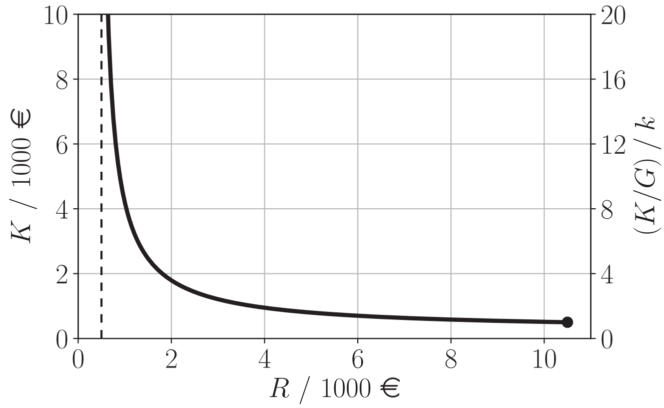
$$K = \underline{n}R + (1+k)\left[\frac{R}{k} - \left(\frac{R}{k} - G\right)(1+k)^{\underline{n}}\right] - G,$$

no taj izraz suviše je netransparentan za bilo kakav oblik jednostavne analize. Kao takav savršen je za zbunjivanje potencijalnog korisnika zajma, kako bi mu detalji kamatarenja ostali nejasni, a sve s ciljem da ga se što lakše uvede u dužničko ropstvo.

brojan, ukupna otplata postaje točno $U = \overline{n}R$, a ukupna kamata $K = \overline{n}R - G$. Jednostavan oblik tražene kontinuirane ovisnosti možemo dobiti zadržavanjem necjelobrojnog argumenta funkcije strop na mjestu člana $\overline{n}$ (tj. jednostavnim uklanjanjem funkcije strop), čime dobivamo svojevrsno "analitičko proširenje" cjelobrojnog rezultata:

$$K = \frac{\ln[R/(R-kG)]}{\ln(1+k)}R - G. \tag{14}$$

Slika 2 prikazuje ovu ovisnost o iznosu pojedinačnih otplata R za iste parametre kao na slici 1: glavnicu $G = 10\,000$ € i kamatnu stopu $k = 0.05$. Najmanje kamate koje dužnik mora otplatiti postižu se za $R_{\max} = (1+k)G$ i jednake su jednome kamatnome prirastu: $K_{\min} = kG$. Najviše kamate, poput broja otplatnih razdoblja, u ovakvome modelu mogu postati *po volji visoke*. Postoji li bolja definicija dužničkoga ropstva?



Slika 2. Ovisnost ukupnih kamata o iznosu pojedinačnih otplata R, za glavnicu $G = 10\,000$ € i kamatnu stopu $k = 5$ %. Desna skala prikazuje omjer ukupnih relativnih kamata K/G i kamatne stope. Lijevi dio grafa predstavlja nepošteno kamatarenje (lihvarstvo).

Ako već nije dovoljno očito, valja primijetiti pojmovnu razliku između (ukupnih) relativnih kamata i kamatne stope. Kamatna stopa parametrizira kamatni prirast *u jednom nominalnom razdoblju*. Ono može odgovarati jednom otplatnom razdoblju – kao u našem modelu – ili pak određenom broju otplatnih razdoblja. Na primjer, otplatno razdoblje može biti jedan mjesec, a nominalno jedna godina. S druge strane, ukupne relativne kamate (relativne s obzirom na glavnicu) čini veličina K/G. Iz (14) sasvim je jasno da kamatna stopa tek *posredno* određuje relativne kamate. Međutim, te dvije veličine daleko su od jednakih, ili čak približno jednakih. Desna skala sa slike 2 prikazuje omjer relativnih kamata i kamatne stope, odnosno *koliko puta* relativna kamata može postati većom od kamatne stope. To valja imati na umu pri traženju kakvog god zajma, poštenog ili nepoštenog, zakonitog ili nezakonitog. Nužan uvjet i osnovna stavka financijske pismenosti jest razlikovanje ovih dvaju pojmova. Prvenstveno, treba se čuvati razmišljanja da kamatna stopa od npr. 5 % podrazumijeva otplatu kamata u iznosu od 5 % posuđene glavnice. Naprotiv, relativne kamate mogu biti – i u pravilu jesu – višestruko više od kamatne stope. Koliko više, prije svega ovisi o dobroj volji davatelja zajma te o spremnosti potencijalnog korisnika zajma da pristane na njih. A u toj spremnosti veliku ulogu igra financijska pismenost, koja omogućava razumijevanje financijskih odluka koje donosimo i financijskih rizika u koje se upuštamo.

Dug koji stvoriš je ono što te boli. / *The debt you incurred was what hurt you.*
Ali kamate su ono što te slomi. / *It was the interest that broke your back.*

(Stephen King, Sunov pas / The Sun Dog

Literatura

[1] EVA PAVIĆ, BOŠKO ŠEGO, *Jednostavni kamatni račun*, Matematičko fizički list Vol. **57** No. **1** (2006), 15–24, `https://archive.org/details/MatematikoFizickiList-2005to2008`.

[2] EVA PAVIĆ, BOŠKO ŠEGO, *Složeni kamatni račun*, Matematičko fizički list Vol. **57** No. **2** (2006), 88–96, `https://archive.org/details/MatematikoFizickiList-2005to2008`.

[3] ZLATKO ERJAVEC, DRAŽEN MALIĆ, *O obračunu kamata i kredita*, Matematičko fizički list Vol. **63** No. **3** (2013), 173–178, `https://hrcak.srce.hr/243732`.

[4] JOSIP MATEJAŠ, TENA MARUŠEVEC, *O kamatnim računima*, Matematičko fizički list Vol. **65** No. **1** (2014), 25–29, `https://hrcak.srce.hr/242602`.

[5] MIRTA BENŠIĆ, GORAN BENŠIĆ, *Kamatni račun*, Osječki matematički list Vol. **11** No. **2** (2015), 113–126, `https://hrcak.srce.hr/80524`.

[6] ŽELJKO ZRNO, MARIJANA ĆUTUK, *Nizovi i kamatni račun*, Matematičko fizički list Vol. **67** No. **3** (2017), 161–165, `https://hrcak.srce.hr/234949`.

[7] VEDRAN KOJIĆ, BOŠKO ŠEGO, *O odnosu između jednostavnih i složenih kamata*, Matematičko fizički list Vol. **69** No. **4** (2019), 249–254, `https://hrcak.srce.hr/239435`.

[8] ALEMKA ŠEGOTA, *Financijska matematika*, Sveučilište u Rijeci, Ekonomski fakultet, Rijeka 2012, `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:192:236658`.