Primjena Apolonijeve kružnice

Željko Hanjš, Alija Muminagić

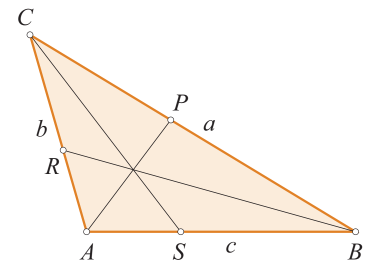
Svjedoci smo da je posljednjih 80-tak godina izučavanje elementarne geometrije i trigonometrije u srednjim školama znatno reducirano. Izostavljeni su razni teoremi i njihovi dokazi (koji su se nekad, npr. u gimnazijama, redovito navodili).

U ovom prilogu ćemo primijeniti neke teoreme te navesti kako je Apolonije iz Perge[1] definirao kružnicu i prikazati rješenja zanimljivih zadataka.

Poznata su sljedeća dva teorema.

Teorem 1. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta ABC iz vrhova A, B, C sijeku nasuprotne stranice u točkama P, R, S tako da je*

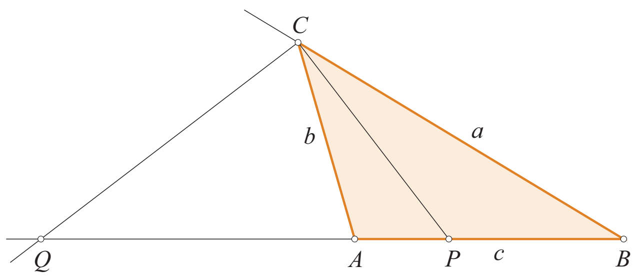
$$\frac{|AS|}{|SB|}=\frac{b}{a}, \qquad \frac{|BP|}{|PC|}=\frac{c}{b}, \qquad \frac{|CR|}{|RA|}=\frac{a}{c}.$$



Slika 1.

Teorem 2. *Ako simetrala unutarnjeg kuta C trokuta ABC siječe pravac AB u točki P, a simetrala pripadnog vanjskog kuta u točki Q, tada vrijedi*

$$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|QA|}{|BQ|}=\frac{b}{a}.$$

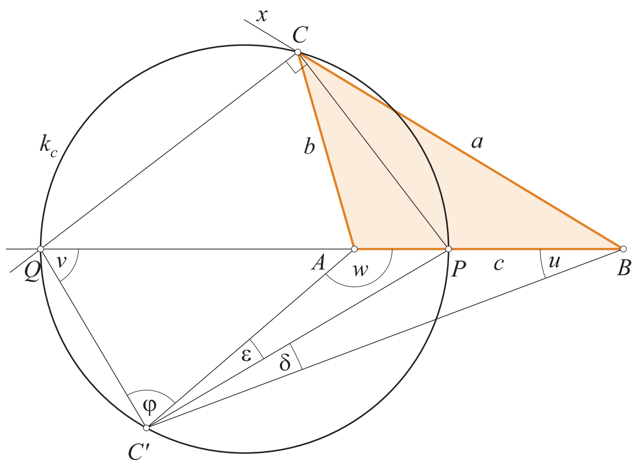


Slika 2.

Promatrajmo sada proizvoljan raznostranični trokut ABC. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|AB|>|AC|$. Konstruirajmo simetralu unutarnjeg kuta $\sphericalangle ACB$ i simetralu vanjskog kuta $\sphericalangle ACX$ i presječne točke tih simetrala s pravcem AB označimo s P i Q.

Prema teoremima 1 i 2 vrijedi $\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|QA|}{|BQ|}=\dfrac{b}{a}$. Također se lako pokazuje da je kut $\sphericalangle PCQ=90^\circ$. Dakle, trokut PCQ je pravokutan pa kružnica čiji je promjer $\overline{PQ}$ sadrži i točku C. Ova kružnica se naziva **Apolonijeva kružnica** trokuta ABC, koja odgovara vrhu C. Raznostranični trokut ima tri Apolonijeve kružnice. Promatrajmo slučaj kada je trokut jednakokračan ili jednakostraničan.

[1] Apolonije iz Perge (oko 262. – oko 190. pr. Kr.), starogrčki matematičar i astronom.



Slika 3.

Dokazat ćemo da Apolonijeva kružnica ima ova dva svojstva:

1° *Za svaku točku C' kružnice k_c, različitu od P i Q, je $C'P$ simetrala kuta $\sphericalangle AC'B$.*

2° *Za svaku točku C' kružnice k_c vrijedi* $\dfrac{|AC'|}{|C'B|} = \dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{b}{a}$.

Prikazat ćemo trigonometrijski dokaz.

1° Imamo $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{|QA|}{|BQ|} = \dfrac{b}{a} = q$. Uvedimo oznake (slika 3): $\sphericalangle QC'A = \varphi$, $\sphericalangle AC'P = \varepsilon$, $\sphericalangle PC'B = \delta$, $\sphericalangle ABC' = u$, $\sphericalangle BQC' = v$, $\sphericalangle BAC' = w$ i $|AB| = c$.

Primjenom poučka o sinusima na trokute $QC'A$ i $QC'B$ dobivamo:

$$\frac{\sin\varphi}{|QA|} = \frac{\sin v}{|C'A|} \quad \text{tj.} \quad |QA| = \frac{|C'A|\sin\varphi}{\sin v},$$

$$\frac{\sin(90^\circ+\delta)}{|QB|} = \frac{\sin v}{|C'B|} \quad \text{tj.} \quad |QB| = \frac{|C'B|\cos\delta}{\sin v}$$

i odavde

$$\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|C'A|\sin\varphi}{|C'B|\cos\delta}, \tag{1}$$

a poučak o sinusima primijenjen na trokute $AC'P$ i $BC'P$ daje

$$\frac{\sin\varepsilon}{|PA|} = \frac{\sin w}{|C'P|} \quad \text{tj.} \quad |PA| = \frac{|C'P|\sin\varepsilon}{\sin w},$$

$$\frac{\sin\delta}{|PB|} = \frac{\sin u}{|C'P|} \quad \text{tj.} \quad |PB| = \frac{|C'P|\sin\delta}{\sin u}.$$

Sada imamo

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{\sin u}{\sin w}\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{|C'A|\sin\varepsilon}{|C'B|\sin\delta}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2), zbog $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|QA|}{|QB|}$ dobivamo

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\delta} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$$

odakle je

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin(90^\circ - \varepsilon)} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \operatorname{tg}\varepsilon$$

tj. $\delta = \varepsilon$.

Prema tome, $C'P$ je simetrala kuta $\sphericalangle AC'B$. $\square$

2° Primjenom poučka o sinusima na trokute QAC' i QBC' dobivamo:

$$\frac{\sin\varphi}{|QA|} = \frac{\sin v}{|AC'|} \quad \text{tj.} \quad |QA| = \frac{|AC'|\sin\varphi}{\sin v},$$

$$\frac{\sin(90^\circ + \delta)}{|QB|} = \frac{\sin v}{|BC'|},$$

a zbog $\delta = \varepsilon$, imamo

$$|QB| = \frac{|BC'|\cos\varepsilon}{\sin v} = \frac{|BC'|\sin\varphi}{\sin v},$$

(zbog $\varepsilon = 90^\circ - \varphi$) i nakon dijeljenja dobivamo $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}$ i konačno $\frac{|AC'|}{|BC'|} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$. $\square$

Prema tome možemo zaključiti: Neka su A i B dvije različite točke ravnine. Tada je geometrijsko mjesto svih točaka C ravnine za koju je omjer udaljenosti $|AC| : |BC| = \text{const.} = q$, kružnica ako je $q \neq 1$, a simetrala dužine $\overline{AB}$ ako je $q = 1$. (Ovo je definicija Apolonijeve kružnice.)

Kako konstruirati Apolonijevu kružnicu može se vidjeti iz teksta. O toj kružnici se može čitati u [1–3].

Riješimo sada još dva zadatka u kojima se pojavljuje Apolonijeva kružnica.

Zadatak 1. Četverokut $ABCD$ je trapez kojemu je $AB \| CD$. Produžetci stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki P, a kružnice s dijametrima $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ sijeku se u točkama E i F. Dokazati

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD| = |PE| \cdot |PF|.$$

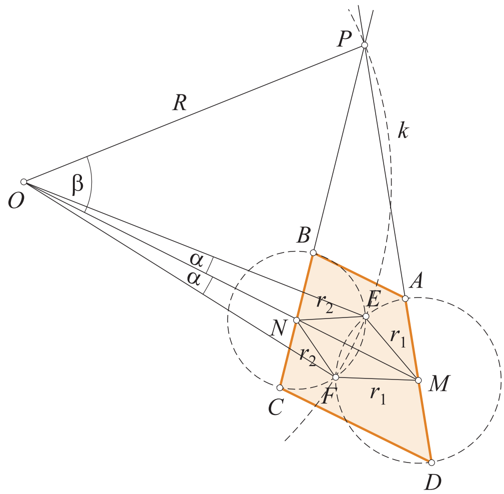
Rješenje. Neka su M i N polovišta krakova trapeza $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ i neka su $r_1 = |AM| = |MD|$ i $r_2 = |BN| = |NC|$ radijusi kružnica čija su središta M i N. Iz sličnosti trokuta

PAB, PMN i PDC imamo

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|} = \frac{|PM|}{|PN|} = \frac{r_1}{r_2} \tag{1}$$

pa je $|PD| = \frac{r_1}{r_2}|PC|$, odakle dobivamo

$$|PB| \cdot |PD| = |PB| \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot |PC| = \frac{r_1}{r_2}(|PN| - r_2)(|PN| + r_2) = \frac{r_1}{r_2}(|PN|^2 - r_2^2). \tag{2}$$



Slika 4.

Neka je O središte kružnice opisane trokutu PEF i neka je R njezin radijus. Točke O, N i M leže na simetrali dužine $\overline{EF}$. Stavimo $\sphericalangle NOF = \alpha$ i $\sphericalangle NOP = \beta$. Kosinusov poučak primijenjen na trokute NOP i NOF daje:

$$|PN|^2 = R^2 + |ON|^2 - 2R|ON|\cos\beta$$

$$r_2^2 = R^2 + |ON|^2 - 2R|ON|\cos\alpha$$

odakle je

$$|PN|^2 - r_2^2 = 2R|ON|(\cos\alpha - \cos\beta). \tag{3}$$

Kako je $|PF|$ tetiva kružnice $k(O, R)$, to je

$$|PF| = 2R\sin\left(\frac{1}{2}\sphericalangle POF\right) = 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Točka O leži na simetrali dužine $\overline{EF}$ i zato je

$$\sphericalangle NOE = \sphericalangle NOF = \alpha, \qquad \sphericalangle POE = \beta - \alpha.$$

Kako je $\overline{PE}$ tetiva kružnice $k(O, R)$ imamo $|PE| = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

Sada je

$$|PE||PF| = 4R^2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2} = 2R^2(\cos\alpha - \cos\beta),$$

odakle je zbog (3)

$$|PE||PF| = \frac{R}{|ON|}(|PN|^2 - r_2^2). \tag{4}$$

Zbog $|NF| = |NE| = r_2$ i $|ME| = |MF| = r_1$ je

$$\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|ME|}{|NE|} = \frac{r_1}{r_2} \tag{5}$$

i dalje radi (1)

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|MP|}{|NP|} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{6}$$

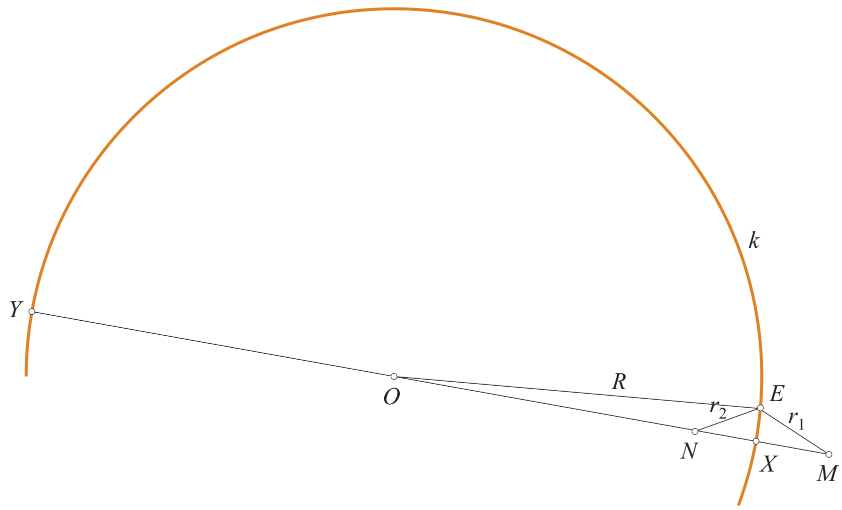
Iz (5) i (6) vidimo da udaljenosti od točaka P, E, F redom do M i N imaju isti omjer, što znači da je kružnica $k(O, R)$ Apolonijeva kružnica.

Promatrajmo sada pomoćnu sliku 5 na kojoj je nacrtana kružnica $k(O, R)$. Neka pravac OM siječe tu kružnicu u točkama X i Y. Imamo

$$\frac{|XM|}{|XN|} = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \frac{|MN|}{|XN|} = \frac{|XM| + |XN|}{|XN|} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}$$

tj.

$$|XN| = \frac{r_2}{r_1 + r_2}|MN|. \tag{7}$$



Slika 5.

Slično dobivamo

$$|YN| = \frac{r_2}{r_1 - r_2}|MN|. \tag{8}$$

Također iz (7) i (8) je

$$2R = |XY| = |XN| + |YN| = \left(\frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_1 - r_2}\right) r_2|MN|$$

tj. $R = \dfrac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2}|MN|$.

Sada je

$$\frac{|ON|}{R} = \frac{R - |NX|}{R} = \ldots = \frac{r_2}{r_1} \tag{9}$$

i konačno iz (4) i (9) dobivamo

$$|PE||PF| = \frac{R}{|ON|}(|PN|^2 - r_2^2) = \frac{r_1}{r_2}(|PN|^2 - r_2^2) = |PB||PD|.$$

$\square$

Zadatak 2. Dvije točke A i B leže izvan dane kružnice k. Odredi točku C na toj kružnici tako da pravci AC i BC sijeku danu kružnicu u točkama D i E tako da je $DE \| AB$.

Rješenje. Iz točaka A i B konstruirajmo tangente na danu kružnicu k i njihove dodirne točke s kružnicom označimo s P i Q. Neka je $u = |AP|$ i $v = |BQ|$. Pretpostavimo da je točka C konstruirana. Prema teoremu o potenciji točke u odnosu na kružnicu imamo:

$$u^2 = |AC||AD|, \qquad v^2 = |BC||BE|$$

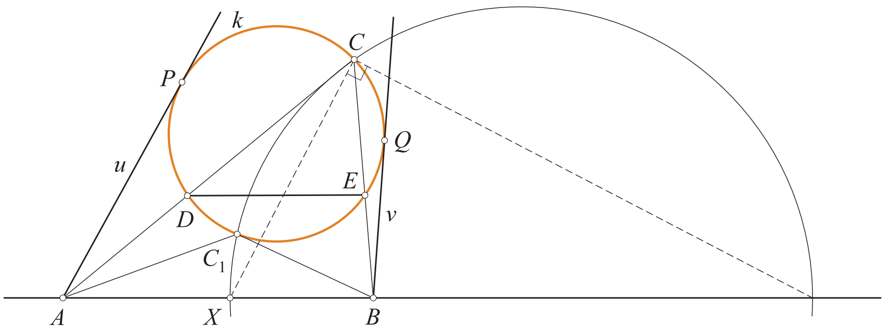
$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{|AC||AD|}{|BC||BE|}, \tag{1}$$

a iz sličnosti trokuta CDE i CAB je

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|}, \tag{2}$$

pa uvrštavanjem (2) u (1) dobivamo

$$\frac{u}{v} = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{3}$$



Slika 6.

Sada slijedi konstrukcija Aplonijeve kružnice. Može li i točka C_1, koja je druga presječna točka dane i Apolonijeve kružnice, biti rješenje?

Riješite za vježbu i ove zadatke:

1. Dana je dužina $\overline{AB}$ i pravac p. Odrediti na pravcu p točku P, takvu da je $|AP| : |BP| = 5 : 2$.
2. Konstruirati trokut ABC ako je zadana duljina simetrale s_γ unutarnjeg kuta pri vrhu C i dane su duljine odrezaka $|AS| = p$, $|BS| = q$ na koje ta simetrala dijeli stranicu $\overline{AB}$.

Literatura

[1] Matija Bašić, *Male tajne iz geometrije* (pogledajte Google).

[2] Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[3] Stipe Vidak, *Geometrija iza analitike*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 18, Pula 29. ožujka – 1. travnja 2009.