ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2024. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/299.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3987. Nađi sve prirodne brojeve x i y takve da je

$$2x + y \equiv 4 \pmod{17}$$
$$5x - 5y \equiv 9 \pmod{17}.$$

3988. Dokaži da za svaki prirodni broj $n > 2$ vrijedi

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}.$$

3989. Dokaži da za prirodne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3990. Dokaži da za a, b, c, $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ iz jednakosti

$$2 \cdot \log_b x = \log_a x + \log_c x$$

slijedi $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

3991. Odredi i u kompleksnoj ravnini skiciraj skup

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z - 2 - a}{1 + 2\bar{a} - z\bar{a}} \right| \leq 1, \right.$$
$$\left. \forall a \in \mathbb{C},\ |a| \neq 1 \right\}.$$

Nađi one korijene jednadžbe $z^8 = -16$ koji su u skupu S.

3992. Dokaži da u pravilnom mnogokutu $A_0A_1A_2 \ldots A_{3n-1}$ vrijedi jednakost

$$|A_0A_{n+1}| - |A_0A_{n-1}| = |A_0A_1|.$$

3993. Točka K je polovište stranice $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$. Odredi kut između dužine $\overline{BK}$ i dijagonale $\overline{AC}$ ako je $|AD| : |AB| = \sqrt{2}$.

3994. Dan je trokut ABC. Na produženju stranica $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ i težišnice $\overline{MB}$ preko točke B dane su točke K, L, N tako da je $|BK| : |AB| = 3$, $|BL| : |CB| = 5$ i $|BN| : |MB| = 4$. Koliki je omjer površina trokuta ABC i KLM?

3995. Duljina veće baze trapeza jednaka je a, bočne stranice su mu b i c $(b > c)$ i kutovi uz veću bazu odnose se kao $2 : 1$. Odredi manju bazu.

3996. U trokutu je zadana stranica a i nasuprotni kut α. Koliki moraju biti druga dva kuta da tijelo koje nastaje rotacijom trokuta oko polazne stranice bude maksimalnog volumena.

3997. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC dana je točka M takva da je $|AC| = 3|AM|$, a na produžetku stranice $\overline{BC}$ (preko B) točka N tako da je $|BN| = |BC|$. Nađi omjere u kojima sjecište P od $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$ dijeli te dužine.

3998. Nađi površinu trokuta s kutovima α, β, γ ako su udaljenosti točke M, unutar trokuta, do njegovih stranica redom jednake m, n, k.

3999. Riješi nejednadžbu

$$\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{5x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \geq 2.$$

4000. Koliki je maksimalni broj topova koji se mogu smjestiti na šahovsku ploču $3n \times 3n$ tako da svaki od njih napada najviše jednog od preostalih.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 538. Luka je istraživao silu trenja u vodi pomoću drvene kugle mase 300 g. Kad bi kuglu gurnuo u vodu na dubinu pola metra i pustio, ona bi iskočila iz vode do visine 20 cm. Kolika je prosječna sila trenja na kuglu dok se giba kroz vodu? Gustoća drva od kojeg je napravljena iznosi $600\ \mathrm{kg/m^3}$, a gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Akceleracija sile teže je približno $10\ \mathrm{m/s^2}$.

OŠ – 539. Olimpijske su medalje kroz godine mijenjale i oblik i sastav. Međunarodni je olimpijski odbor naložio da zlatne medalje moraju sadržavati 6 g zlata. Cijena grama zlata najveće čistoće je oko 70 EUR, dok je srebro puno jeftinije, gram je oko 0.9 eura. Zlatne medalje imaju oko pola kg i vrijednost im je po sadašnjim cijenama zlata i srebra oko 864.6 EUR. Kolika im je gustoća?

Gustoća zlata iznosi $19\,320\ \mathrm{kg/m^3}$, a srebra $10\,500\ \mathrm{kg/m^3}$.

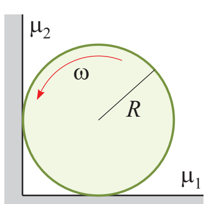
OŠ – 540. Kad se na oprugu objesi čokolada mase 100 g njena je duljina 18 cm, a ako se na istu oprugu objesi jabuka mase 250 g duljina je te opruge 21 cm. Koliko će opruga biti dugačka ako se pomoću nje vuče drveni kvadar mase 800 g ako faktor trenja iznosi 0.

OŠ – 541. Drveni stol ima gornju plohu kojoj je duljina 1.5 m, širina 80 cm, a debljina 4 cm. Baze njegovih nogu su kvadrati kojima je stranica 5 cm, a visoke su 80 cm. Stol je napravljen od hrastovog drva kojem je gustoća $700\ \mathrm{kg/m^3}$. Koliki je tlak pod nogama stola?

1847. Prvi kilometar puta automobil vozi brzinom $90\ \mathrm{km/h}$, drugi brzinom $70\ \mathrm{km/h}$, a treći brzinom $50\ \mathrm{km/h}$. Kolika je prosječna brzina tijekom čitavog puta?

1848. Planet kruži oko zvijezde po kružnoj putanji polumjera 10 svjetlosnih minuta. Površinska temperatura zvijezde iznosi 6000 K, dok je prosječna temperatura na površini planeta $0\,^\circ\mathrm{C}$. Odredi polumjer zvijezde. Zvijezda i planet su savršena crna tijela te je temperatura planeta jednaka duž čitave njegove površine. (Također planet je "goli kamen" bez ikakvih atmosferskih efekata koji bi utjecali na tok toplinske energije.) Polumjer planeta je neusporedivo manji od njegove udaljenosti od zvijezde.

1849. Valjak polumjera 10 cm zavrtili smo početnom kutnom brzinom od 10 okretaja u sekundi te ga pažljivo postavili uz rub zida tako da se okrećući tare i o zid i o tlo. Koeficijent trenja s tlom jednak je $\mu_1 = 4/3$, a sa zidom $\mu_2 = 3/4$.



Nakon koliko vremena će se valjak zaustaviti ako je:

a) šupalj, tako da je sva masa raspodijeljena duž vrlo tankoga plašta zadanog polumjera;

b) pun i homogen?

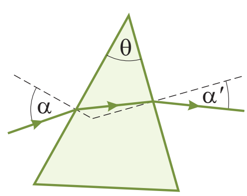
Oprez: iznos sile trenja s tlom *nije* $\mu_1 mg$!

1850. Pretpostavimo pojednostavnjen model *izotermne* Zemljine atmosfere, čija je temperatura svugdje jednaka $15\,^\circ\mathrm{C}$. U takvome modelu tlak p i gustoća ρ zraka na visini h iznad Zemljine površine opisani su tzv. barometarskom formulom:

$$p(h) = p_0 e^{-\rho_0 g h/p_0} \quad \text{i} \quad \rho(h) = \rho_0 e^{-\rho_0 g h/p_0}$$

pri čemu su p_0, ρ_0 i g redom tlak, gustoća zraka i gravitacijsko ubrzanje na Zemljinoj površini. U takvoj okolini balon je ispunjen čistim helijem ukupne mase 10 g pa je pušten da poleti uvis. Opna balona je vrlo tanka i rastezljiva te čini zanemariv dio mase balona, a svojom napetošću zanemarivo doprinosi održavanju tlaka unutar balona (tj. služi samo kao granica između nutrine balona i njegove okoline). Ako opna balona puca kad balon dosegne volumen od $1\ \mathrm{m^3}$, hoće li on prije puknuti ili se prestati uzdizati, i na kojoj visini će se to dogoditi? Koristite sljedeće vrijednosti: $p_0 = 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ te molarnu masu helija $M = 4$ g/mol. *Tlak zraka mijenja se s visinom dovoljno sporo da, ovisno o potrebama toga što se u danom koraku računa, može ga se smatrati konstantnim (ili ga aproksimirati kakvom drugom primjerenom ovisnošću) u neposrednoj blizini balona.*

1851. Dana je trostrana staklena prizma kutnog otvora $\theta = 45^\circ$ i indeksa loma 1.5. Zraka svjetlosti upada (iz zraka) na jednu pobočku prizme pod kutom α s obzirom na njezinu okomicu te izlazi kroz drugu pobočku pod kutom α'. Koliki mora biti upadni kut α da bi bio jednak izlaznome? Za koje kutove otvora prizme je to moguće?



1852. Relativistički neutron početne kinetičke energije 4 puta veće od energije mirovanja nalijeće na drugi, koji ispočetka miruje. Ako se nakon elastičnog raspršenja oba neutona raspršuju simetrično (pod jednakim kutovima) s obzirom na početni smjer gibanja upadnog neutrona, koliki kut zatvaraju njihovi konačni smjerovi gibanja?

1853. Izotop radija ^{226}Ra najzastupljeniji je radioaktivni izotop radija na Zemlji, a vrijeme poluživota mu iznosi 1600 godina. Iako je Zemlja stara 4.543 milijarde godina, radija još uvijek ima na njoj zato jer se obnavlja kroz radioaktivne raspade drugih tvari. Razmotrite alternativnu hipotezu: da je trenutna količina ^{226}Ra na Zemlji samo ostatak neke početne količine s početka Zemljine povijesti te da se tijekom povijesti samo raspadao, bez obnavljanja iz drugih izvora. Uz pretpostavku da na čitavoj Zemlji danas postoji samo jedan kilogram ^{226}Ra, kolika bi morala biti njegova početna masa u trenutku formiranja Zemlje? Usporedite tu masu s ukupnom masom Zemlje, koja iznosi $6 \cdot 10^{24}$ kg. Kolika bi morala biti početna masa ^{226}Ra da bi danas na Zemlji ostao samo jedan jedini njegov atom? Molarna masa ^{226}Ra je 226 g/mol. Za potrebe zadatka pretpostavite da su zadani brojevi savršeno precizni.

Napomena. Da bi savršeno precizno izračunali brojčane vrijednosti koje se traže, vjerojatno će vam biti potrebne neke dosjetke, tj. malo "ručnog" dovođenja izraza u kalkulatorom izračunljiv oblik.

C) Rješenja iz matematike

3959. *Ako su A i B cijeli brojevi takvi da je $A^3 - B^3$ djeljivo s 11, dokaži da je i $A - B$ djeljivo s 11.*

Rješenje. Pri diobi s 11 cijeli broj n daje ostatke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a n^3 redom daje ostatke 0, 1, 8, 5, 9, 4, 7, 2, 6, 3, 10 i svi su oni međusobno različiti.

Da bi $A^3 - B^3$ bio djeljiv s 11, nužno je i dovoljno da A^3 i B^3 imaju iste ostatke pri dijeljenju s 11, što znači da je nužno i dovoljno da je $A - B$ djeljivo s 11.

Ur.

3960. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$, dokaži nejednakost*

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{12}.$$

Rješenje. Koristimo nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine za tri broja $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$ i $c - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2}{3} \\
&\qquad \geqslant \left(\frac{a - \frac{1}{2} + b - \frac{1}{2} + c - \frac{1}{2}}{3}\right)^2 \\
&\Longrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&\qquad \geqslant 3 \cdot \left(\frac{a + b + c - \frac{3}{2}}{3}\right)^2 \\
&\qquad = 3 \cdot \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je:

$$a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3961. *Riješi diofantsku jednadžbu*

$$x - y^4 = 4$$

gdje je x prosti broj.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
x &= y^4 + 4 \\
&= y^4 + 4y^2 + 4 - 4y^2 \\
&= (y^2 + 2)^2 - (2y)^2 \\
&= (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)
\end{aligned}$$

Kako je x prost broj imamo ova dva slučaje:

1°

$$y^2 - 2y + 2 = x$$
$$\underline{y^2 + 2y + 2 = 1}$$

Iz druge jednadžbe je

$$(y+1)^2 = 0 \quad \text{tj.} \quad y = -1.$$

Iz prve jednadžbe je $x = 5$.

2°

$$y^2 - 2y + 2 = 1$$
$$\underline{y^2 + 2y + 2 = x}$$

Iz prve jednadžbe je

$$(y-1)^2 = 0 \quad \text{tj.} \quad y = 1.$$

Iz druge jednadžbe je $x = 5$.

Dakle, imamo dva rješenja u skupu cijelih brojeva, pri čemu je x prost broj:

$$\{(5,-1),(5,1)\}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3962. *Ako su a, b, c, p, q, r realni brojevi takvi da je*

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$px^2 + qx + r \geq 0$$

dokaži

$$apx^2 + bqx + 4cr \geq 0$$

za svaki realan broj x.

Rješenje. Ako je $ax^2+bx+c \geq 0$ mora biti

$$a > 0, \quad b^2 - 4ac \leqslant 0$$

tj.

$$b^2 \leqslant 4ac$$

odakle slijedi $c \geqslant 0$. Analogno je $p > 0$ i $q^2 \leqslant 4pr$, odakle je $r \geqslant 0$. Tada je

$$ap > 0 \quad \text{i} \quad (bq)^2 \leqslant 4ap \cdot 4cr$$

tj.

$$b^2q^2 - 4ap \cdot 4cr \leqslant 0$$

odakle slijedi

$$apx^2 + bqx + 4cr \geq 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Duje Dodig (3), Zagreb

3963. *Neka je F_n Fibonaccijev niz:*

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za svaki $n > 2$. Dokaži

$$F_n = 1 + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{n-j-1}{j}$$

gdje je j najveći cijeli broj koji nije veći od $\dfrac{n-1}{2}$.

Rješenje. Za $n = 3$ je

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2$$
$$F_3 = 1 + \binom{3-2}{1} = 2$$

pa tvrdnja vrijedi za $n = 3$.

Nadalje

$$F_4 = F_3 + F_2 = 3 = 1 + \binom{4-2}{1} = 3.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neko $n \geqslant 4$. Tada je

$$\begin{aligned}
F_n &= 1 + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \ldots \\
&\quad + \binom{n-j-1}{j-1} + \binom{n-j-2}{j} \\
&\quad + 1 + \binom{n-4}{1} + \binom{n-5}{2} + \ldots \\
&\quad + \binom{n-j-2}{j-1} \\
&= 1 + \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{0} \right. \\
&\quad \left. + \binom{n-4}{2} + \binom{n-4}{1}\right] \\
&\quad + \ldots + \left[\binom{n-j-2}{j} + \binom{n-j-2}{j-1}\right] \\
&= 1 + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots \\
&\quad + \binom{n-j-1}{j}.
\end{aligned}$$

Zato tvrdnja vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Duje Dodig (3), Zagreb

3964. *Ako su brojevi a, b, $c > 0$ i $a+b+c=3$ odredi maksimalnu vrijednost izraza* $S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)}$.

Prvo rješenje. Koristit ćemo općenitu nejednakost za pozitivne brojeve:

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+2} + \ldots + a_n^{k+n}}{n}},$$

odnosno posebno

$$\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}.$$

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \\
&\leqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3ab+3ac+3bc}{3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{ab+bc+ac} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \\
&\leqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{(a+b+c)^2}{6}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Znači $S_{\min} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ i postiže se ako je $a = b = c = 1$.

Duje Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a(b+2c)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3a \cdot (b+2c) \cdot 3} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3a + (b+2c) + 3}{3} \\
\sqrt[3]{b(c+2a)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3b \cdot (c+2a) \cdot 3} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3b + (c+2a) + 3}{3} \\
\sqrt[3]{c(a+2b)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3c \cdot (a+2b) \cdot 3} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3c + (a+2b) + 3}{3} \\
\Longrightarrow\ S &\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{6(a+b+c)+9}{3} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot 9 = 3\sqrt[3]{3}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, $b + 2c = c + 2c = a + 2b = 3$.

Ur.

3965. *Neka su a, b, c strogo pozitivni realni brojevi. Dokaži da su oni duljine stranica nedegeneriranog trokuta ako i samo ako postoje realni brojevi p i q takvi da je $p+q=1$ i vrijedi nejednakost*

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2.$$

Rješenje. Prvo navedimo da su pozitivni brojevi a, b, c stranice nekog trokuta ako i samo ako je $a+b>c$, $b+c>a$ i $c+a>b$. Za realne brojeve p i $q = 1-p$ je:

$$\begin{aligned}
&pa^2 + qb^2 - pqc^2 \\
&\quad = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 \\
&\quad = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2.
\end{aligned}$$

Gledamo diskriminantu kvadratnog trinoma

$$f(p) = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2.$$

$$\begin{aligned}
D &= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\
&= -(a+b+c)(a+c-b) \\
&\quad \cdot (a+b-c)(b+c-a).
\end{aligned}$$

Uvjet zadatka $f(p) > 0$ za svaki realan p je ekvivalentan s $c^2 > 0$ i $D < 0$.

$\Longrightarrow$ Ako su a, b, c stranice trokuta očito je $c^2 > 0$ i $D < 0$ jer je svaki broj u zagradama pozitivan.

$\Longleftarrow$ Neka je $c^2 > 0$ i $D < 0$. Za pozitivne brojeve a, b, c najviše jedan od brojeva $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ može biti negativan. Ali, zbog $D < 0$ nije niti jedan i vrijedi $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ pa se radi o stranicama trokuta.

Duje Dodig (3), Zagreb

3966. *Ako je* $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$ *odredi minimalnu vrijednost od* $|x|-|y|$.

Rješenje. Iz zadane jednadžbe imamo:

$$\begin{aligned}&x+2y>0\\&x-2y>0\\&\underline{(x+2y)(x-2y)=4}\\&x>2|y|\geqslant 0\\&\underline{x^2-4y^2=4.}\end{aligned}$$

Zbog simetrije dovoljno je promatrati samo slučaj $y\geqslant 0$. Tada je i $x>0$, pa moramo naći minimalne vrijednosti od $x-y$. Uvedimo supstituciju $t=x-y$ i iz gornjeg uvjeta je $t>0$.

$$\begin{aligned}&(t+y)^2-4y^2=4\\ \Longrightarrow\ &3y^2-2ty+4-t^2=0.\end{aligned}$$

Gledamo diskriminantu ove kvadratne jednadžbe po y:

$$\begin{aligned}&D=4t^2-12(4-t^2)\geqslant 0\\ \Longrightarrow\ &t^2\geqslant 3.\end{aligned}$$

Zbog $t>0$ je $t\geqslant\sqrt{3}$, pa je $t_{\min}=\sqrt{3}$ i postiže se npr. za $x=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ i $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dakle, minimalna vrijednost od $|x|-|y|=\sqrt{3}$.

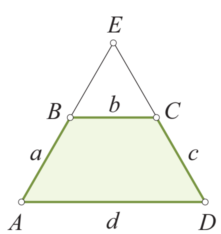
Duje Dodig (3), Zagreb

3967. *Dan je konveksan četverokut ABCD kod kojeg je* $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD=120^\circ$ *i*

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2=|AD|^2.$$

Dokaži da se ovom četverokutu može upisati kružnica.

Rješenje. Neka je $a=|AB|$, $b=|BC|$, $c=|CD|$, $d=|AD|$ i E je sjecište pravaca AB i CD. Kako je $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD=120^\circ$ imamo $\sphericalangle EBC=\sphericalangle ECB=60^\circ$ i $|BE|=|CE|=|BC|=b$.



Iz kosinusovog poučka za trokut AED imamo:

$$\begin{aligned}d^2&=(a+b)^2+(b+c)^2-(a+b)(b+c)\\&=a^2+b^2+c^2+ab+bc-ac.\end{aligned}$$

Koristeći uvjet $d^2=a^2+b^2+c^2$ dobivamo $ab+bc-ac=0$. Sada je

$$\begin{aligned}d^2&=a^2+b^2+c^2\\&=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac\\&=(a+c-b)^2.\end{aligned}$$

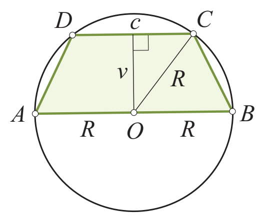
Odavde je $d=a+c-b$ ili $d=b-a-c$. Ovaj posljednji uvjet nije moguć zbog $d^2>b^2$. Dakle, dobivamo $a+c=b+d$ što je nužan i dovoljan uvjet da bi se konveksnom četverokutu mogla upisati kružnica.

Ur.

3968. *U kružnicu polumjera R upisan je trapez čija je jedna baza njezin promjer. Nađi najveću moguću površinu trapeza.*

Rješenje. Površina trapeza je

$$\begin{aligned}P&=\frac{2R+c}{2}\cdot v\\&=\frac{2R+c}{2}\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\\P(c)&=\frac{R}{2}\sqrt{4R^2-c^2}+\frac{c}{4}\sqrt{4R^2-c^2}.\end{aligned}$$



Maksimum se poztiže za onaj c za koji je $P'(c)=0$.

$$\begin{aligned}P'(c)&=-\frac{Rc}{2\sqrt{4R^2-c^2}}+\frac{1}{4}\sqrt{4R^2-c^2}\\&\quad-\frac{c^2}{4\sqrt{4R^2-c^2}}\\&=\frac{1}{4\sqrt{4R^2-c^2}}(-2Rc+4R^2-c^2-c^2)\\&=\frac{1}{2\sqrt{4R^2-c^2}}(-c^2-Rc+2R^2)\end{aligned}$$

$$P'(c) = 0 \quad \text{tj.} \quad c^2 + Rc - 2R^2 = 0$$
$$\implies c = R.$$

Dakle,

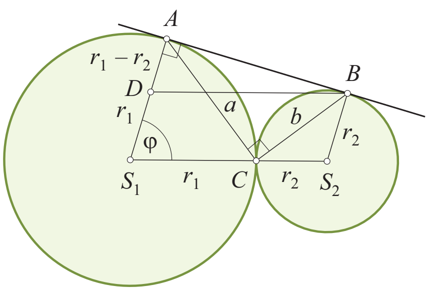
$$P_{\max} = \frac{2R + R}{2}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vid Horvat (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3969. *Dvije kružnice se dodiruju izvana u točki C i AB je njihova zajednička tangenta. Ako je $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$ odredi polumjere kružnica, gdje je $|AC| = a$ i $|BC| = b$.*

Rješenje. Po Pitagorinu poučku je

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Kosinusov poučak za $\triangle ACS_1$:

$$a^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2r_1r_1\cos\varphi$$
$$\implies \cos\varphi = 1 - \frac{a^2}{2r_1^2},$$

a kosinusov poučak za $\triangle BCS_2$:

$$b^2 = r_2^2 + r_2^2 - 2r_2r_2\cos(180^\circ - \varphi)$$
$$\implies \cos\varphi = \frac{b^2}{2r_2^2} - 1.$$

Odavde je

$$\frac{a^2}{2r_1^2} + \frac{b^2}{2r_2^2} = 2.$$

Pitagorin poučak za $\triangle ABD$ daje:

$$(r_1 - r_2)^2 + a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$\implies r_1r_2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Imamo sustav:

$$\frac{a^2}{2r_1^2} + \frac{b^2}{2r_2^2} = 2$$
$$r_1r_2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$
$$r_2 = \frac{a^2 + b^2}{4r_1}.$$

Uvrstimo li ovo u prvu jednadžbu dobivamo bikvadratnu jednadžbu:

$$16b^2r_1^4 - 4(a^2 + b^2)^2r_1^2 + a^2(a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Njenim rješavanjem i uzimanjem samo pozitivnih rješenja je:

$$r_1 = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ili} \quad r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r_2 = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ili} \quad r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dakle, imamo jedno rješenje:

$$r_1 = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r_2 = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

jer je ovo drugo poseban slučaj prvoga kada je $r_1 = r_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (tada je i $a = b$).

Duje Dodig (3), Zagreb

3970. *Dokaži jednakost*

$$\cos 80^\circ + \sin 20^\circ + \cos 60^\circ + \sin 40^\circ + \cos 40^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}.$$

Rješenje. Na lijevoj strani grupiramo prvi i treći, te drugi i četvrti pribrojnik pa je:

$$\begin{aligned}
L &= \cos 80^\circ + \sin 20^\circ + \cos 60^\circ \\
&\quad + \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \\
&= 2\cos 70^\circ \cos 10^\circ + 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ \\
&\quad + \cos 40^\circ \\
&= 2\cos 10^\circ + \cdot(\cos 70^\circ + \sin 30^\circ) + \cos 40^\circ \\
&= 2\cos 10^\circ \cdot 2\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \sin 50^\circ \\
&= 4\cos 10^\circ \sin 25^\circ \cos 5^\circ + 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ \\
&= \sin 25^\circ \\
&\quad \cdot \left(\frac{2\cos 10^\circ \cdot 2\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} + 2\cos 25^\circ\right)
\end{aligned}$$

$$= \sin 25^\circ \cdot \frac{2\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ + 2\cos 25^\circ \cdot \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ}$$

$$= \sin 25^\circ \cdot \frac{\sin 20^\circ + \sin 30^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 5^\circ}$$

$$= \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ} = D.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3971. *Riješi jednadžbu*

$$(5z-3)^6 = -125^2 \cdot i^{10} \cdot z^6$$

i rješenja zapiši u trigonometrijskom obliku.

Rješenje.

$$(5z-3)^6 = -5^6 \cdot (-1) \cdot z^6$$

$$\implies (5z-3)^6 = (5z)^6$$

$$\implies [(5z-3)^6]^2 - [(5z)^3]^2 = 0$$

$$\implies [(5z-3)^3-(5z)^3] \cdot [(5z-3)^3+(5z)^3] = 0$$

Koristimo formule za razliku i zbroj kubova:

$$-3[(5z-3)^3 + 5z(5z-3) + (5z)^2]$$
$$\cdot (10z-3)$$
$$\cdot [(5z-3)^3 - 5z(5z-3) + (5z)^2] = 0$$

$$\implies (10z-3)(25z^2-15z+3)$$
$$\cdot (25z^2-15z+9) = 0.$$

Dobili smo ukupno pet rješenja:

$$10z - 3 = 0 \implies$$

$$z_1 = \frac{3}{10} = \frac{3}{10}(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$25z^2 - 15z + 3 = 0 \implies$$

$$z_2 = \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{3}}{10}i = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_3 = \frac{3}{10} - \frac{\sqrt{3}}{10}i = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$25z^2 - 15z + 9 = 0 \implies$$

$$z_4 = \frac{3}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{10}i = \frac{3}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_5 = \frac{3}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{10}i = \frac{3}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

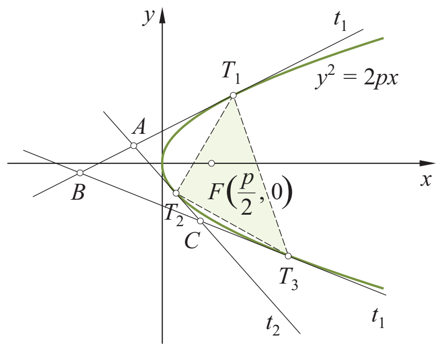
Duje Dodig (3), Zagreb

3972. *Neka su T_1, T_2, T_3 različite točke na paraboli i t_1, t_2, t_3 tangente na parabolu i tim točkama. Odredi omjer površina trokuta $T_1T_2T_3$ i trokuta određenog tangentama.*

Rješenje.

$$T_1(x_1, \sqrt{2px_1}), \quad T_2(x_2, -\sqrt{2px_2})$$
$$T_3(x_3, -\sqrt{2px_3})$$

gdje smo točke na paraboli uzeli kao na slici (jedne u gornjoj i dvije u donjoj poluravnini).



$$P_{\triangle T_1T_2T_3} = \frac{1}{2}|x_1(-\sqrt{2px_2} + \sqrt{2px_3})$$
$$+ x_2(-\sqrt{2px_3} - \sqrt{2px_1})$$
$$+ x_3(\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_2})|$$
$$= \frac{\sqrt{2P}}{2}|x_1(-\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})$$
$$+ x_2(-\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1})$$
$$+ x_3(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})|$$

$$t_1 \ldots \sqrt{2px_1} \cdot y = p(x + x_1)$$

$$t_2 \ldots -\sqrt{2px_2} \cdot y = p(x + x_2)$$

$$t_3 \ldots -\sqrt{2px_3} \cdot y = p(x + x_3)$$

$$t_1 \cap t_2 = \{A\} \implies$$

$$A\left(-\sqrt{x_1x_2}, \frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$t_1 \cap t_3 = \{B\} \implies$$

$$B\left(-\sqrt{x_1x_3}, \frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$t_2 \cap t_3 = \{C\} \implies$$

$$C\left(\sqrt{x_2x_3}, -\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&P_{\triangle ABC}\\
&=\frac{1}{2}\Big|-\sqrt{x_1x_2}\Big(\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\Big)\\
&\quad-\sqrt{x_1x_3}\Big(-\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\\
&\quad-\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})}{\sqrt{2}}\Big)\\
&\quad+\sqrt{x_2x_3}\Big(\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\frac{\sqrt{P}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_3})}{\sqrt{2}}\Big)\Big|\\
&=\frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{2}}|-\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\\
&\quad-\sqrt{x_1x_3}(-\sqrt{x_3}-\sqrt{x_1})\\
&\quad+\sqrt{x_2x_3}(-\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})|\\
&=\frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{2}}|-x_1\sqrt{x_2}-x_2\sqrt{x_1}+x_3\sqrt{x_1}\\
&\quad+x_1\sqrt{x_3}-x_2\sqrt{x_3}+x_3\sqrt{x_2}|\\
&=\frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{2}}|-x_1(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})\\
&\quad+x_2(-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_3})+x_3(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})|.
\end{aligned}
$$

Sada je:

$$\frac{P_{\triangle T_1T_2T_3}}{P_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{\sqrt{2P}}{2}}{\frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{2}}}=2.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 530. *U potresima nastaje nekoliko vrsta valova od kojih su najvažniji longitudinalni ili P i transverzalni ili S valovi. Longitudinalne zovemo i primarni jer su brži, u blizini površine brzina im je oko 6 km/s. Brzina transverzalnih ili sekundarnih valova iznosi oko 3.5 km/s, oni imaju oko 5 puta veće amplitude i uzrokuju veće štete. Epicentar potresa se određuje metodom triangulacije podataka koje su zabilježili seizmografi na tri seizmološke postaje. Koliko je epicentar potresa udaljen od Zagreba ako je zagrebački seizmograf zabilježio da su S valovi stigli 4 sekunde nakon P valova?*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
&v_L=6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\\
&\underline{t=4\ \text{s}}\\
&s=?\\
&s_L=s_T\\
&v_Lt_L=v_Tt_T=v_T(t_L+4\ \text{s})\\
&6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\cdot t_L=3.5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\cdot(t_L+4\ \text{s})\\
&6t_L=3.5t_L+14\ \text{s}\\
&2.5t_L=14\ \text{s}\\
&t_L=5.6\ \text{s}\\
&s=vt_L=6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\cdot 5.6\ \text{s}=33.6\ \text{km}.
\end{aligned}
$$

Lara Džubur Krajinović (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 531. *Učenik ima strujni krug koji se sastoji od dva paralelno spojena otpornika, $R_1=20\ \Omega$ i $R_2=5\ \Omega$, a s njima je serijski spojen otpornik nepoznatog otpora. Uz otpor od 5 Ω je spojen ampermetar koji mjeri struju kroz njega od 500 mA kad se taj strujni krug spoji na izvor napona 6 V. Koliki bi napon tada pokazao voltmetar spojen na treći otpornik? Koliki je otpor tog otpornika?*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
&R_1=20\ \Omega\\
&R_2=5\ \Omega\\
&I_2=500\ \text{mA}=0.5\ \text{A}\\
&\underline{U=6\ \text{V}}\\
&R_3,\ U_3=?\\
&U_2=I_2R_2=0.5\ \text{A}\cdot 5\ \Omega=2.5\ \text{V}=U_1\\
&I_1=\frac{U_1}{R_1}=\frac{2.5\ \text{V}}{20\ \Omega}=0.125\ \text{A}\\
&I_3=I_1+I_2=0.625\ \text{A}\\
&U_3=U-U_1=3.5\ \text{V}\\
&R_3=\frac{U_3}{I_3}=\frac{3.5\ \text{V}}{0.625\ \text{A}}=5.6\ \Omega.
\end{aligned}
$$

Ana Lakoš (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 532. *Vozeći se kući s majkom Marko je na cesti ugledao neopreznog mačića. Od njihovog je automobila bio udaljen oko* 15 *m i majka je uspjela zaustaviti automobil pa su pričekali da mačić prijeđe cestu. Marko zna da njegova majka u naseljenom mjestu nikada ne vozi brzinom većom od* 50 *km/h. Kad su došli kući u prometnoj je dozvoli našao da je masa majčinog automobila* 1350 *kg i s tim je podatcima izračunao kolikom su silom morale djelovati kočnice da zaustave automobil na vrijeme. Koliku je silu dobio?*

Rješenje.

$$s = 15 \text{ m}$$
$$v = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 13.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\underline{m = 1350 \text{ kg}}$$
$$F = ?$$
$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 15 \text{ m}}{13.9 \text{ m/s}} = 2.16 \text{ s}$$
$$a = \frac{v}{t} = \frac{13.9 \text{ m/s}}{2.16 \text{ s}} = 6.435 \text{ m/s}^2$$
$$F = ma = 1350 \text{ kg} \cdot 6.435 \text{ m/s}^2 = 8687.25 \text{ N}.$$

Sila kočnica je bila veća jer Marko u računu nije uvažio svoju i majčinu masu.

Lara Džubur Krajinović (8), Zagreb

OŠ – 533. *Polumjer Zemlje na ekvatoru iznosi* 6378.1 *km. Za jedan okret oko svoje osi Zemlji treba* 23 *h,* 56 *min i* 4.1 *s, što se naziva siderički dan. Izračunajte obodnu brzinu točke na ekvatoru u m/s i km/h. Usporedite tu brzinu s brzinom zvuka u zraku koja na* $20\,^\circ C$ *iznosi* 343 *m/s.*

Rješenje.

$$r_e = 6378.1 \text{ km} = 6\,378\,100 \text{ m}$$
$$t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.1 \text{ s} = 86\,164.1 \text{ s}$$
$$\underline{v_{\text{zvuk}} = 343\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$
$$v_e = ?$$
$$\frac{v_e}{v_{\text{zvuk}}} = ?$$
$$v_e = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{t} = \frac{2 \cdot 6\,378\,100 \text{ m} \cdot \pi}{86\,164.1 \text{ s}} = 465.1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\frac{v_e}{v_{\text{zvuk}}} = \frac{465.1 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} = 1.36.$$

Ana Lakoš (8), Zagreb

1833. *Top izbacuje granate početnom brzinom* 370 *m/s. Ako kut izbačaja u odnosu na horizontalnu ravninu povećamo za* 1°*, vrijeme leta se produlji za* 0.84 *s. Koliki je kut izbačaja? Koliko se promijenio horizontalni domet? Otpor zraka zanemariti i uzeti* $g = 10$ *m/s*^{2}.

Rješenje. Vrijeme leta za prvi kut t iznosi:
$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$
$$t + 0.84 = \frac{2v_0 \sin(\alpha + 1^\circ)}{g}.$$
Uvrštavanjem i množenjem s g slijedi
$$2v_0 \sin\alpha + 8.4 = 2v_0 \sin(\alpha + 1^\circ).$$
Primjenom izraza
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
i dijeljenjem s $2v_0$ imamo
$$\frac{8.4}{2 \cdot 370} = 2\cos\frac{2\alpha + 1^\circ}{2}\sin\frac{1^\circ}{2}.$$
je:
$$\cos\frac{2\alpha + 1^\circ}{2} = 0.6504,$$
$$\alpha = 48.93^\circ.$$
Domet je za oba slučaja:
$$D_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha) = 13561 \text{ m},$$
$$D_2 = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha + 2^\circ) = 13487 \text{ m}.$$
Dakle nakon povećanja kuta izbačaja, domet se smanjio za $D_1 - D_2 = 74$ m.

Franka Horvat (1),
X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

1834. *Asteroid se giba oko Sunca po elipsi, tako da mu je brzina u perihelu (najbliže Suncu)* 75 % *veća od brzine u afelu (najdalje od Sunca). Ako je ophodno vrijeme asteroida* 1150 *dana, odredi obje spomenute brzine i odgovarajuće udaljenosti od Sunca. Koliki je numerički ekscentricitet putanje?*

Rješenje. U Sunčevom sustavu prikladne jedinice su a.j. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ m za udaljenost i god $= 365.25$ dana za vrijeme. Uvrstimo ophodno vrijeme T u treći Keplerov zakon:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{(1150 \cdot 365.25)^2}$$
$$= 2.148185 \text{ a.j.},$$

gdje je a iznos velike poluosi putanje. Brzina kruženja $\overline{v}$, ujedno i geometrijska sredina najveće i najmanje brzine je

$$\overline{v} = \frac{2a\pi}{T} = 4.2869 \text{ a.j./god.}$$

Iz uvjeta zadatka imamo:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= 1.75 v_{\min}, \\ v_{\max}^2 &= 1.75 \overline{v}^2, \\ v_{\max} &= 5.671 \text{ a.j./god}, \\ v_{\min} &= 3.2406 \text{ a.j./god.} \end{aligned}$$

Numerički ekscentricitet dobijemo iz omjera tih brzina:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\max}}{v_{\min}} &= \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1.75, \\ 2.75\varepsilon &= 0.75, \\ \varepsilon &= 0.27273. \end{aligned}$$

Ur.

1835. *Pri jednolikom kruženju oko planeta na visini* 125 *km iznad površine, ophodno vrijeme satelita iznosi* 144 *min. Ako je prosječna gustoća planeta* 2270 kg/m^3*, odredi radijus planeta i brzinu kruženja satelita.*

Rješenje. Satelit kruži po kružnici radijusa r, a radijus planeta označimo s R. Iz uvjeta kruženja imamo:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= \frac{GM}{r^2}, \\ r^3 &= T^2 \cdot \frac{GM}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Masu planeta M izrazimo preko njegovog volumena i gustoće ρ, pa imamo:

$$\begin{aligned} r^3 &= T^2 \cdot \frac{G \cdot 4R^3\pi\rho}{3 \cdot 4\pi^2}, \\ \frac{r^3}{R^3} &= \frac{T^2 G\rho}{3\pi}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem i korjenovanjem dobijemo

$$r = (R+h) = 1.062648R.$$

Odatle je:

$$\begin{aligned} h &= 0.062648R = 125 \text{ km}, \\ R &= 1995.27 \text{ km}. \end{aligned}$$

Brzina kruženja je

$$v = \frac{2r\pi}{T} = 1541.9 \text{ m/s}.$$

Ur.

1836. *Kolica gurnemo uz kosinu brzinom* 2.3 m/s*. Pri povratku, kolica prođu isti položaj brzinom* 0.8 m/s*, suprotnog smjera. Ako je koeficijent trenja s podlogom* $\mu = 0.375$*, odredi kut nagiba kosine* α *i vrijeme koje je kolicima trebalo da se vrate u početni položaj.*

Rješenje. Prevaljeni put je

$$s = v_1 t_1 = v_2 t_2,$$

a odatle:

$$\begin{aligned} 2.3t_1 &= 0.8t_2, \\ t_2 &= 2.875t_1. \end{aligned}$$

Akceleracije uz i niz kosinu su:

$$\begin{aligned} a_1 &= g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha, \\ a_2 &= g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih relacija dobijemo

$$a_1 + a_2 = 2g\sin\alpha.$$

Sustav zadnje i predzadnje jednadžbe nakon uvrštavanja glasi:

$$\begin{aligned} \frac{0.8}{2.875t_1} &= g(\sin\alpha - 0.375\cos\alpha) \\ \frac{2.3}{t_1} + \frac{0.8}{2.875t_1} &= 2g\sin\alpha. \end{aligned}$$

Dijeljenjem prve jednadžbe drugom dobivamo

$$\frac{0.8}{6.6125+0.8} = \frac{1}{2} - \frac{0.375}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Odatle je:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{44.475}{93}, \\ \alpha &= 25^\circ 33' 30''. \end{aligned}$$

Tada je (uz $g = 9.81$ m/s^2)

$$t_1 = 0.3046 \text{ s}, \quad t_2 = 0.8757 \text{ s},$$

a vrijeme do povratka u početni položaj

$$t_1 + t_2 = 1.1803 \text{ s}.$$

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1837. *Međunarodna svemirska postaja (ISS), mase 450 tona se zbog otpora atmosfere u 30 dana spusti s kružne orbite s 415 na 411.5 km visine. Odredi silu kočenja i snagu te sile. Kako je moguće da trenje ubrzava satelit? Polumjer Zemlje neka je 6371 km, njezina masa* $6\cdot 10^{24}$ *kg i* $G = 6.674\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Rješenje. Energija kružne orbite za radijus kruženja r je

$$E(r) = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

uz uvjet kruženja

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Uvrštavanjem slijedi

$$E(r) = -\frac{GMm}{2r},$$

uz $GMm = 1.802\cdot 10^{20}$ Nm^2. Za dvije zadane visine $r = R_Z + h$ imamo:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(6\,786\,000) - E(6\,782\,500)\\ &= 1.802\cdot 10^{20}\left(\frac{-1}{13\,572\,000} + \frac{1}{13\,565\,000}\right)\\ &= 6.85\cdot 10^9 \text{ J.}\end{aligned}$$

Prosječna snaga je

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{6.85\cdot 10^9}{2\,592\,000} = 2643 \text{ W.}$$

Sila kočenja je

$$F = \frac{\Delta E}{\Delta s} = \frac{\Delta E}{v\Delta t} = \frac{P}{v} = 0.3438 \text{ N},$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7678 \text{ m/s}$$

prosječna brzina kruženja. Trenje ubrzava satelit, jer manja energija znači nižu putanju i veću brzinu.

Duje Dodig (3), Zagreb

1838. *Pri necentralnom elastičnom sudaru u kojemu prva kugla prilikom sudara prenese 35 % kinetičke energije na drugu, smjer gibanja prve se promijeni za* 30°. *Koliki je omjer masa dviju kugli? Druga kugla je prije sudara mirovala.*

Rješenje. Ako sa β označimo kut odlaznog smjera druge kugle, iz očuvanja impulsa imamo:

$$\begin{aligned}m_1(v_1 - v_1'\cos 30^\circ) &= m_2 v_2'\cos\beta,\\ m_1 v_1'\sin 30^\circ &= m_2 v_2'\sin\beta.\end{aligned}$$

Kvadriramo i zbrojimo ove jednadžbe (kako bi eliminirali β):

$$m_1^2[(v_1 - v_1'\cos 30^\circ)^2 + v_1'\sin^2 30^\circ] = m_2^2 v_2'^2.$$

Zamijenimo strane i podijelimo s $m_1^2 v_1^2$,

$$\frac{v_2'^2}{v_1^2}\frac{m_2^2}{m_1^2} = 1 - 2\frac{v_1'}{v_1}\cos 30^\circ + \frac{v_1'^2}{v_1^2},$$

a omjere brzina izrazimo iz očuvanja energije i postotka energije predanog drugoj kugli:

$$\begin{aligned}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 &= 1 - 0.35 = 0.65,\\ \left(\frac{v_2'}{v_1}\right)^2 &= \frac{m_1}{m_2}0.35.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijemo:

$$\begin{aligned}0.35\frac{m_2}{m_1} &= 1 - 2\sqrt{0.65}\cos 30^\circ + 0.65,\\ \frac{m_2}{m_1} &= 0.7245,\end{aligned}$$

što je traženi omjer masa.

Ur.

1839. *Fizikalno njihalo sastoji se od homogenog tankog prstena radijusa 15 cm, koji se njiše obješen o jednu točku na prstenu u njegovoj ravnini. Koliki je period malih njihaja?*

Rješenje. Period malih oscilacija fizičkog njihala iznosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdje je I moment tromosti oko objesišta, a d udaljenost težišta i objesišta. U ovom slučaju vrijedi $d = r$ i prema poučku o paralelnim osima $I = mr^2 + md^2 = 2mr^2$, pa dobivamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mr^2}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} = 1.1 \text{ s.}$$

Duje Dodig (3), Zagreb