65. Državno natjecanje iz matematike
Hrvatska, 22. – 24. travnja 2024. g.

Školsko natjecanje iz matematike ove školske godine održano je 26. siječnja, a Županijsko natjecanje 26. veljače. Samo Državno natjecanje iz matematike ove je godine održano od 22. do 24. travnja u Vodicama, za učenike srednjih škola, A varijante i B varijante. Zadatke je priredilo posebno potpovjerenstvo za A varijantu i B varijantu Državnog povjerenstva za matematička natjecanja.

Sudionici ovogodišnjeg Državnog natjecanja bili su smješteni u hotelu Imperial. Sudjelovalo je 268 učenika osnovnih i srednjih škola, te oko 170 mentora. Domaćin natjecanja je bila Osnovna škola Vodice. Za vrijeme natjecanja, mentori su imali seminar na kojem su predavali Rebeka Kalazić, Snježana Lukač, Vlatko Crnković i Goran Stajčić. U slobodno su vrijeme učenici i mentori mogli posjetiti tvrđavu sv. Ivana u Šibeniku. Na zatvaranju smo se s tugom oprostili od Antuna Goldašića, mentora iz Gimnazije Karlovac, koji je iznenada preminuo za vrijeme natjecanja.

Za srednje je škole podijeljeno 8 prvih, 6 drugih, 10 trećih nagrada i 7 pohvala za A varijantu, te 4 prve, 6 drugih, 14 trećih nagrada i 25 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Dino Hadžić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Lovro Ilić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Pilipović*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Emanuel Vidović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Vidović*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Gabriel Katić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Čačinović*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Matej Svilokos*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Kristijan Šimović, XV. gimnazija, Zagreb, *Fabijan Čikač*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Emil Missoni*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Maša Dobrić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ita Blašković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Janči*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (III. nagrada); *Hrvoje Valent*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (pohvala).

III. razred

Karlo Ahel, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, *Val Karan*, XV. gimnazija, Zagreb, *Jurica Špoljar*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Marko Hrenić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Nikola Vujica*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Lana Milani*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, *Emanuel Bajamić*, III. gimnazija, Split, *Patrik Cvetek*, Elektrotehnička škola – Split, Split (III. nagrada).

IV. razred

David Lang, XV. gimnazija, Zagreb, *Lara Semeš*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Viktor Katić*, III. gimnazija Osijek, Osijek (II. nagrada); *Barbara Kelava*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Petar Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Marija Dora Marodi*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Adrian Grbac Lacković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lucija Pongrac*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

B varijanta

I. razred

Petar Brajković, Srednja škola Mate Balote, Poreč (I. nagrada); *Marta Gojević*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (II. nagrada); *Borna Planinić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Wanhang Jiang*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nikola Lovrić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, *Grgur Petrović*, Gimnazija i ekonomska škola Benedikta Kotruljevića, s pravom javnosti, Zagreb (III. nagrada); *Marin Tonković*, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Lovro Hatvalić*, Srednja škola Petrina, Petrina, *Fran Kosec*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (pohvala).

II. razred

Niko Josipović, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (I. nagrada); *Nela Damić*, II. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ivano Horvatin*, Srednja škola Zadar, Zadar, *Lovro Klancir*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Luka Ozvačić*, Srednja škola Ivan Švear Ivanić-Grad, Ivanić-Grad, *Lasta Trupčević*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (III. nagrada); *Blaž Hrastić*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *David Jambrošić*, Tehnička škola Čakovec, Čakovec, *Vjekoslav Kljak*, Športska gimnazija, Zagreb, *Jelena Kljunak*, Biskupijska klasična gimnazija Ruđera Boškovića s pravom javnosti, Duubrovnik, *Viktorija Pribanić*, IX. gimnazija, Zagreb, *Ana Karla Vodanović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Vuk*, Prva gimazija Varaždin, Varaždin, *Anja Tuškan*, Gimnazija Karlovac, Karlovac (pohvala).

III. razred

Zvonko Andrijević, II. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Dora Drenški*, X. gimnazija Ivana Supeka, Zagreb, *Petar Jadro*, I. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Petar Marić*, Srednja škola Dugo Selo, Dugo Selo, *Matija Ljutić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka (III. nagrada); *Tian Vlašić*, IX. gimnazija, Zagreb, *Borna Bašić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Ika Jančiković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nedjeljko Buljubašić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Jan Dolački*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Mihael Orak*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Noa Crnić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka, *Ante Biličić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Dominik Dragović*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Antun Kasalo, Gimnazija Sesvete, Sesvete (I. nagrada); *Borna Mandžuka*, Srednja škola "Vladimir Gortan" – Scuola media superiore "Vladimir Gortan", Buje, *Karlo Levanić*, Graditeljska, prirodoslovna i rudarska škola, Varaždin (II. nagrada); *Matej Ban*, Srednja škola Hrvatski kralj Zvonimir, Krk, *Danijel Pilaj*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Luka Klancir*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Bernard Pribanić*, I. tehnička škola Tesla, Zagreb (III. nagrada); *Matija Krivec*, Gimnazija Sesvete, Sesvete, *Ema Pisanski*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Tibor Andreani*, Tehnička škola Sisak, Sisak, *Jakov Biškup*, Tehnička škola Čakovec, Čakovec, *Ante Šola*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz
$$x + \Big|2\,|x| - 1\Big|$$
za neki realni broj x.

2. Za višeznamenkasti prirodni broj definirana je operacija *tumbanje* pri kojem se vodeća znamenka izbriše, a zatim ista znamenka dopiše na kraj broja, iza znamenke jedinica. Tako npr. od broja 123 nastaje broj 231, a od broja 107 broj 71. Prirodni broj je *mudar* ako mu je vodeća znamenka u dekadskom zapisu jednaka 1, a tumbanjem od njega nastaje triput veći broj. Odredi sve mudre brojeve.

3. Unutar trokuta ABC stranica duljina $|AB| = 11$, $|BC| = 13$ i $|CA| = 14$ nalazi se točka K takva da je $\sphericalangle KBA = \sphericalangle KCB = 30°$. Točke M i N su redom osnosimetrične slike točke K s obzirom na pravce AB i BC. Odredi udaljenost točaka M i N.

4. Realni brojevi x, y i z zadovoljavaju sustav jednadžbi
$$\begin{aligned} x^3 &= 2y^3 + y - 2 \\ y^3 &= 2z^3 + z - 2 \\ z^3 &= 2x^3 + x - 2. \end{aligned}$$
Dokaži da je $x = y = z = 1$.

5. Antonija je zamislila 6 različitih realnih brojeva, a zatim je na ploču napisala sve moguće zbrojeve dvaju, ne nužno različitih, zamišljenih brojeva. Kada je Branku rekla da su najmanja dva od zamišljenih brojeva 2024 i 4048, Branko je zaključio da koji god preostali brojevi bili, broj različitih brojeva na ploči nije mogao biti manji.
a) Koliko je različitih brojeva na ploči?
b) Koliki sve može biti najveći broj koji je Antonija zamislila?

II. razred

1. Baka Jagoda prodaje trešnje te je uočila da postoji linearna ovisnost između cijene jednog kilograma trešanja i količine prodanih trešanja u danu: svakim povećanjem cijene za 1 EUR po kilogramu bi u danu prodala 3 kilograma trešanja manje. Najveći iznos od prodaje trešanja bi ostvarila kada bi ih prodavala po cijeni od 3.6 EUR po kilogramu. Jednog dana unuka Višnja zamijenila je baku na tržnici, sama odredila cijenu kilograma trešanja i prodala trešnje za 18.6 EUR. Po kojoj je cijeni Višnja mogla prodavati trešnje?

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje broj
$$2n^4 + 19n^2 + 9$$
ima točno 6 pozitivnih djelitelja.

3. Neka su *stepenice* dio kvadratne ploče dimenzija 111×111 koji se sastoji od prvih k polja u k-tom retku za $k = 1, 2, \ldots, 111$. Mogu li se stepenice podijeliti na 111 kvadrata? (Kvadrati se trebaju sastojati od jediničnih polja i ne moraju biti sukladni.)

4. Zadan je trapez $ABCD$ kojemu su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti. Simetrala dužine $\overline{AD}$ siječe pravac BC u točki P, a simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe pravac AD u točki Q. Dokaži da je $\sphericalangle DPA = \sphericalangle BQC$.

5. Mihael je na ploči zapisao kvadratnu funkciju $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima. Nakon toga, u svakom je koraku promijenio (povećao ili smanjio) za 1 ili koeficijent uz x ili konstantni član. U zadnjem koraku je na ploči zapisana kvadratna funkcija $g(x)$. Je li sigurno da je u nekom trenutku na ploči bila zapisana kvadratna funkcija s cjelobrojnim nultočkama ako je
a) $f(x) = x^2 + x + 2024$ i $g(x) = x^2 + 2024x + 1$?
b) $f(x) = x^2 + 2024x + 2024$ i $g(x) = x^2 - 2024x + 2024$?

III. razred

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi
$$\log_2(4^x + 2^x) + \log_{(4^x+2^x)} 2 = 2.$$

2. Postoje li realni brojevi $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takvi da su
$$\frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{\sin y} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin(x+y)}$$
prirodni brojevi?

3. Dan je jednakostranični trokut ABC. Dužina $\overline{AD}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E, a pritom je $\measuredangle BAD = 20°$ i $|DE| = |AB|$. Odredi $\measuredangle ADB$.

4. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $1 < a < b$ i da vrijedi
$$a + b \mid ab + 1 \quad \text{i} \quad b - a \mid ab - 1.$$
Dokaži da je $b < a\sqrt{3}$.

5. U igri za dva igrača koristi se 101 praznih kutija i dovoljna količina žetona. Igrači, Ema i Lovro, naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu, igrač stavlja po jedan žeton u sto različitih kutija. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza u jednoj od kutija bude 201 žeton. Ako Ema igra prva, koji od igrača može osigurati pobjedu?

IV. razred

1. Koristeći niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definirana su dva nova niza, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da za svaki prirodan broj n vrijedi
$$b_n = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad c_n = a_{n+2} - a_{n+1}.$$
Ako je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički, dokaži da je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz.

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(f(x) - y^2) = yf(x^2).$$

3. Za prirodan broj n neka je $T(n)$ broj uređenih trojki prirodnih brojeva (a, b, c) za koje postoji trokut sa stranicama duljina a, b i c čiji je opseg jednak n.
a) Dokaži da je $T(2024) = T(2021)$.
b) Dokaži da je $T(2023) > T(2020)$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojemu je $|AB| > |AC|$, točka I središte njemu upisane kružnice, a P polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je K polovište luka $\overset{\frown}{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC koji sadrži točku A. Dokaži da vrijedi $\measuredangle BIP + \measuredangle CIK = 180°$.

5. Neka $d(k)$ označava broj prirodnih djelitelja broja k. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je
$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = d(n!).$$

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $(a+b)^4+(a-b)^4=4112$ i $a^2-b^2=16$. Izračunaj a^2+b^2.

2. Odredi najveći cijeli broj a za koji su rješenja jednadžbe $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{ax}+\frac{1}{2x+1}=0$

a) realni brojevi
b) racionalni brojevi.

3. Ako se pozitivnom cijelom broju prva znamenka pomakne s prvog mjesta na zadnje, dobiveni će broj biti tri puta veći od polaznog. Odredi najmanji takav broj.

4. Ante voli geometrijske mozgalice. Od devet kvadrata kojima su duljine stranica 1 cm, 4 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 14 cm, 15 cm i 18 cm, Ante treba složiti pravokutnik bez preklapanja i praznina. Ante je pronašao samo jedan takav pravokutnik. Na koji je način Ante složio dobiveni pravokutnik? Obrazloži zašto je njegovo rješenje jedinstveno. (Sva rješenja dobivena osnom simetrijom pravokutnika oko njegovih osi simetrije ili rotacijom oko središta smatramo jednakim).

5. Odredi sve realne brojeve a za koje će jednadžba $||2x-6|-a| = 7-x$ imati maksimalan broj rješenja.

II. razred

1. Odredi sve realne brojeve p za koje je razlika rješenja jednadžbe $x(x+4)+p^2(1-x)=13$ jednaka 6.

2. Dokaži da je $\sqrt{\overline{11\ldots11}-\overline{22\ldots22}}=\overline{33\ldots33}$, pri čemu je znamenka 1 zapisana 2024 puta, a znamenke 2 i 3 zapisane su 1012 puta.

3. Koliko ima uređenih parova realnih brojeva (x,y) za koje vrijedi
$$\begin{cases} x^2+3y=9 \\ (|x|+|y|-4)^2=1? \end{cases}$$

4. četverokutu $ABCD$ opisana je kružnica. Neka je točka M na stranici $\overline{DC}$ takva da trokut ADM i četverokut $ABCM$ imaju jednake opsege i jednake površine. Pokaži da četverokut $ABCD$ ima najmanje dvije stranice jednake duljine.

5. Neka je $s(n)$ zbroj znamenaka prirodnog broja n zapisanog u dekadskom sustavu. Odredi sva rješenja jednadžbe
$$n-3s(n)=2024.$$

III. razred

1. Biolozi su prvi dan svake godine počevši od 2004. bilježili populaciju zečeva i vjeverica na nekom području. Primijetili su da se njihov broj mijenja eksponencijalno i to tako da se broj zečeva svake četiri godine uveća za 50 %, a broj vjeverica svakih pet godina umanji za 25 %. Ukupan broj vjeverica i zečeva 2024. godine na tom području iznosio je 1458. Ako je 2004. godine bilo 608 vjeverica više nego zečeva, dokaži da je 2014. godine zabilježen veći broj zečeva nego vjeverica.

2. Riješi jednadžbu $\log_{2\sin 2x}(2\sin x)\cdot\log_{2\sin 2x}(2\cos x)=\frac{1}{4}$.

3. Mjera jednog kuta trokuta iznosi 60°. Odredi opseg tog trokuta ako mu je polumjer opisane kružnice duljine $2\sqrt{3}$ cm, a polumjer upisane kružnice duljine $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

4. Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AB}$ označena je točka P tako da vrijedi $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, a na dužini $\overline{CP}$ označena je točka S tako da vrijedi $2\overrightarrow{CS}=3\overrightarrow{SP}$. Ako je točka T presjek pravaca AC i BS, odredi omjer u kojemu ta točka dijeli dužinu $\overline{AC}$.

5. Četiri crvene, dvije plave i tri žute kuglice treba rasporediti u staklenu, drvenu, metalnu i plastičnu posudu. Na koliko je to načina moguće učiniti ako ni u jednoj posudi plave i žute kuglice ne smiju biti zajedno?

IV. razred

1. Ako za realne brojeve a,b,c,d i za svaki prirodan broj $n\geq 4$ vrijedi jednakost
$$\frac{a}{3}\binom{n}{1}+b\binom{n}{2}+c\binom{n}{3}+d\binom{n}{4}=n^4+\frac{253}{3}n^3$$
odredi za koji prirodni broj m vrijedi $\frac{b+d-c}{\sqrt[m]{a}}=1$?

2. Zadane su funkcije $f(x)=x^{\log_{2024}x}$, $g(x)=\log_{2024}\left(2\sqrt{506}\cdot x\right)$ i $h(x)=2x-1$, pri čemu je $x>0$, $x\neq 1$. Odredi umnožak svih rješenja jednadžbe $(g\circ f)(x)=(h\circ g)(x)$.

3. Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvaput je dulja od stranice $\overline{BC}$. Točka F polovište je stranice $\overline{BC}$, a točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$ tako da je $|\overline{AE}|:|\overline{EB}|=2:1$. Stranica $\overline{AD}$ podijeljena je na 7 jednakih dijelova, a stranica $\overline{CD}$ na n jednakih dijelova. Točka G jedna je od djelišnih točaka stranice $\overline{AD}$, a točka H jedna od djelišnih točaka stranice $\overline{CD}$. Odredi najmanji prirodan broj n za koji će pravci EG i FH biti paralelni.

4. U nekoj se igri na sreću iz bubnja sa zelenim i plavim kuglicama istovremeno izvlače dvije kuglice. Igrač će ostvariti dobitak ako izvuče kuglice različitih boja, a vjerojatnost dobitka iznosi 0.25.
a) Ako u bubnju ima 7 plavih kuglica, koliko ima zelenih?
b) Luka igru ponavlja sve dok ne ostvari dobitak, pri čemu nakon svakog ponavljanja izvučene kuglice vraća u bubanj. Vjerojatnost da Luka igru završi u najviše $2k$ ponavljanja $\frac{1267}{1024}$ je puta veća od vjerojatnosti da igru završi u najviše k ponavljanja. Odredi broj k.

5. U šiljastokutnom trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a trokutu opisanu kružnicu u točki E različitoj od točke A. Ortogonalne projekcije točke D na stranice AB i AC redom su točke F i G. Dokaži da je površina četverokuta $AFEG$ jednaka površini trokuta ABC.

Matko Ljulj