13. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2024. g.

Ovogodišnja 13. Europska matematička olimpijada za djevojke (EGMO) održana je od 11. do 17. travnja u Tskaltubu, Gruzija. Svrha ovog natjecanja je poticanje učenika na aktivno bavljenje matematikom te popularizacija matematike među učenicima srednjih škola u Europi, ali i širom svijeta. Najuspješnije učenice koje su predstavljale Republiku Hrvatsku su:

Maša Dobrić, 2. r., XV. gimnazija, Zagreb

Mila Maretić, 2. r., Prva gimnazija Varaždin, Varaždin

Lucija Pongrac, 4. r., XV. gimnazija, Zagreb

Lara Semeš, 4. r., XV. gimnazija, Zagreb.

Na EGMO-u natjecanje traje dva dana, a svakog dana učenice rješavaju po tri zadatka: lakši, srednji i teži. Zadatci se zadaju iz četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva.

Na ovoj Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke, *Lara* je osvojila zlatnu, a *Maša* i *Mila* srebrnu medalju. Za zlatnu medalju bilo je potrebno osvojiti barem 33 boda, za srebrnu 22 i za brončanu 13 bodova. Nijedna učenica nije osvojila maksimalnih 42 boda. U zbroju, naše učenice su osvojile ukupno 87 bodova. S tim rezultatom Hrvatska je zauzela 8. mjesto u službenoj konkurenciji 37 europskih država, a 11. mjesto među svih 54 države svijeta. To je ujedno naš najbolji rezultat unatrag pet godina kako Hrvatska sudjeluje na ovom natjecanju. Prvo mjesto u službenoj konkurenciji osvojla je Ukrajina, a ukupno SAD. Nastupilo je ukupno 212 djevojaka (148 u službenoj konkurenciji europskih zemalja).

Voditelji naše ekipe su bili Borna Vukorepa i Nina Kamčev.

Naše djevojke i voditelji nakon proglašenja rezultata.

Bodovi hrvatskih učcenica na 13. EGMO.

natjecateljica	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
L. Semeš	7	7	7	7	5	0	33	zlatna
M. Maretić	6	7	2	1	7	1	24	srebrna
M. Dobrić	6	7	2	7	1	0	23	srebrna
L. Pongrac	3	1	0	3	0	0	7	
ekipni rezultat	22	22	11	18	13	1	87	

Pregled svih rezultata ove godine može se vidjeti na adresi:

`https://www.egmo.org/egmos/egmo13/scoreboard/`

Pregled svih prijašnjih EGMO-a može se pronaći na linku:

`https://www.egmo.org/egmos/`

Izbor, pripreme i odlazak ekipa na EGMO organizira Hrvatsko matematičko društvo u suradnji s mnogim volonterima (uglavnom bivšim natjecateljima), uz financijsku pomoć Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske.

Iduće godine 14. Europska matematička olimpijada za djevojke će se održati u Prištini na Kosovu.

Borna Vukorepa

Zadatci

Prvi dan, subota, 13. travnja 2024.

Zadatak 1. Dva različita cijela broja u i v su napisana na ploči. Radimo niz koraka. U svakom od njih radimo jednu od dvije sljedeće operacije:

1) Ako su a i b različiti cijeli brojevi na ploči, tada na nju možemo napisati broj $a+b$, ako on već nije na njoj napisan.

2) Ako su a, b i c tri različita cijela broja na ploči, i ako cijeli broj x zadovoljava jednakost $ax^2+bx+c=0$, tada možemo na nju napisati x, ako već nije tamo napisan.

Odredi sve parove početnih brojeva (u,v) takve da se bilo koji cijeli broj može napisati na ploču nakon niza koraka.

Zadatak 2. Neka je ABC trokut uz $|AC|>|AB|$ i označimo njegovu opisanu kružnicu s Ω i centar upisane kružnice s I. Neka njegova upisana kružnica dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u D, E, F, redom. Neka su X i Y dvije točke na manjim lukovima $\overset{\frown}{DF}$ i $\overset{\frown}{DE}$ upisane kružnice, redom, tako da je $\sphericalangle BXD=\sphericalangle DYC$. Neka pravac XY siječe pravac BC u K. Neka je T točka na Ω takva da je KT tangenta na Ω i T je na istoj strani pravca BC kao i A. Dokaži da se pravci TD i AI sijeku na Ω.

Zadatak 3. Za pozitivan cijeli broj n kažemo da je *čudan* ako, za svaki pozitivan djelitelj d od n, cijeli broj $d(d+1)$ dijeli $n(n+1)$. Dokaži da za svaka četiri različita čudna pozitivna cijela broja A, B, C i D vrijedi

$$\gcd(A,B,C,D)=1.$$

Ovdje $\gcd(A,B,C,D)$ *označava najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli sva četiri broja* A, B, C *i* D.

Drugi dan, nedjelja, 14. travnja 2024.

Zadatak 4. U nizu $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ cijelih brojeva, za par (a_i, a_j) uz $1 \leq i < j \leq n$ kažemo da je *zanimljiv* ako postoji par (a_k, a_l) uz $1 \leq k < l \leq n$ takav da je

$$\frac{a_l - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Za svaki $n \geq 3$, nađi najveći mogući broj zanimljivih parova u nizu duljine n.

Zadatak 5. Neka je N skup pozitivnih cijelih brojeva. Nađi sve funkcije $f : N \to N$ takve da sljedeći uvjeti vrijede za sve parove pozitivnih cijelih brojeva (x, y):

i) x i $f(x)$ imaju isti broj pozitivnih djelitelja.

ii) Ako x ne dijeli y i y ne dijeli x, tada

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Ovdje $\gcd(m, n)$ *označava najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli* m *i* n.

Zadatak 6. Nađi sve pozitivne cijele brojeve d za koje postoji polinom P stupnja d s realnim koeficijentima takav da među brojevima $P(0)$, $P(1)$, $P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ postoji najviše d različitih vrijednosti.

Vrijeme pisanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.