

**Stručni rad**

**IZOMETRIJA  
u prvom razredu osnovne škole**

Dr. sc. Vladimir Kadum  
Sveučilišni profesor u miru  
52100 Pula, Štinjan, Kašćuni 21

**Sažetak:**

U radu se govori o primjeni izometrije u prvom razredu osnovne škole, što doprinosi razvoju kreativnih sposobnosti, pomažući razvijanju razmišljanja, zaključavanja i spretnosti, čime se povećava sposobnost koncentracije i pažnje, te razvijanju kritičkog rasuđivanja i učenja.

**Ključne riječi:** *distanca (udaljenost), operacija, preslikavanje (funkcija), učenik, učenje*

## 1.0 izometriji

*Definicija:* Neka je u ravnini  $\Pi$  zadano preslikavanje (funkcija)  $f : \Pi \rightarrow \Pi$ . Za preslikavanje  $f$  kažemo da je *izometrija* ako za ma koje dvije točke  $A$  i  $B$  ravnine  $\Pi$ ,  $A, B \in \Pi$ , vrijedi

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Jednostavnije rečeno: Izometrija je preslikavanje ravnine na ravninu koja čuva distancu (udaljenost) točaka. Dakle, pod izometrijom razumijevamo određeni oblik operacije primijenjene na figurama (geometrijskim likovima) koje zadržavaju njezine dimenzije nepromijenjenima. [2], [3], [7]. (Na analogan se način definira izometrija u prostoru, ali i u općenitim okolnostima.) Navedene operacije uključuju promatrani geometrijski lik u odnosu na lik u ravnini i njegov relativni položaj u odnosu na druge prisutne elemente ravnine, i pritom ne zahvaćaju njegovu strukturu, tj. dimenzije drži nepromjenjivim. [8].

Naziv *izometrija* (grč. *ἰσομετρία*: jednakomjernost) dolazi od grčkih riječi *ἴδιο* (idio) u značenju isti, jednak i *μετρήστε* (metriste) u značenju mjera. Dakle, pod izometrijom razumijevamo određenu vrstu operacije primijenjene na figuri koja zadržava njezine dimenzije nepromijenjenima. [1], [5].

Svojstvo jednakomjernosti pri *izometričkom preslikavanju*, na primjer: bijekcija dviju ravnina jedne na drugu ili jedne samu na sebe, kod koje distanca bilo kojih dvaju elemenata ostaje nepromijenjena. Takve se dvije ravnine nazivaju *izometričke*. [6]. Do izometrijske transformacije dolazi kada nema promjene oblika ili promjene veličine geometrijskog lika, odnosno figure. Dakle, radi se o tome da je na slici došlo samo do promjena položaja lika (figure). [5].

S formativnog gledišta, izometrija je prisutna u relevantnim matematičkim pitanjima: dobivanje figura, razlaganje na dijelove ili prostorne vještine. U području ranog odgoja i obrazovanja najmlađi se moraju upoznati sa stvarima i oblicima koji imaju neku vrstu izometrije, ali i onima koji su asimetrični. [5].

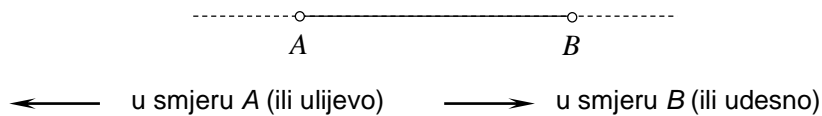
*Napomena:* Stručni izrazi koji se koriste u ovome članku: preslikavanje, funkcija, izometrija, translacija, simetrija..., učitelj u svom radu s učenicima neće koristiti, već će navedene izraze zamijeniti riječima koje su bliske, poznate učenicima te uzrasne dobi. Tako, na primjer, umjesto riječi *translacija* može koristiti *pomakni u desno* ili *pomakni prema gore*, umjesto riječi *simetrija* može koristiti riječ *zrcaljenje* i sl.

## 2. Jednodimenzionalna izometrijska operacija

Pod jednodimenzionalnošću razumijevamo situaciju koja iskazuje jednu dimenziju: za dužinu ta dimenzija je *duljinu*. Kod dužine se *označava smjer* i pritom su dva smjera uvijek suprotna: desno-lijevo, za one koji se postavljaju frontalno, i naprijed-nazad, za one koji se identificiraju na ravnoj liniji (slika 1). Dakle, radi se o gibanju, klizanju geometrijskog lika, odnosno figure po pravcu, kojemu dužina pripada, u određenom smjeru. Moguća su pritom tri aspekta:

- *smjer*: desno, lijevo, gore, dolje...,

- *veličina*: specifičnost prijeđene udaljenosti te
- *smjer kretanja*: vodoravno, okomito ili koso.



Slika 1. *Smjer kretanja po dužini (odnosno pravcu)*

Na sličan način moguće je definirati relaciju okomito, tj. smjer gore-dolje, kao i relaciju (smjer) kretanja ukoso: ukoso gore, ukoso dolje.

Za dužinu kažemo da je orijentirana kada je na njoj istaknut osnovni smjer (kao primjer navodimo: brojeva crta) nasuprot drugom koji je suprotan. Odabrani konvencionalni smjer je *desno*, a suprotan je *lijevo*; ili: konvencionalni smjer je *u smjeru kazaljke na satu*, a suprotan je *suprotno kazaljke na satu*. Naime, promatrač sebe zamišlja u frontalnom položaju u odnosu na prikaz dužine, pa otuda rečeno vezano uz konvencionalni smjer.

(U matematici se dužina kojoj je definiran intenzitet /veličina/, smjer i orijentacija naziva *vektor*.)

### Rad s učenicima

Učenicima se daje zadaća da na podu učionice, uporabom ljepljive trake u boji, naznače ravnu liniju (pravac), na kojoj moraju označiti dvije točke: zavisno o položaju trake, jedna bi točka mogla biti ulaz u učionicu, a druga, na primjer, školska ploča. Jedan učenik će stati na traku (ravnu liniju), i zavisno o položaju tijela toga učenika jedna će se točka (na primjer, ploča) nalaziti ispred, a druga (ulaz u učionicu) iza njega; ili: jedan će se objekt nalaziti lijevo, a drugi desno od tog učenika. S učenicima će se povesti rasprava i tijekom te rasprave utvrdit će se da linija ima dva smjera: jedan prema ploči i drugi prema ulaznim vratima.

Nakon toga učenicima se prikaže sljedeća slika:



Zadatak je učenika da na strelicama napišu (iskažu) smjer gibanja automobila (naprijed, nazad).

Naravno, učenicima se mogu zadati i drugi zadaci sličnog sadržaja, kao, na primjer, smjer gibanja gore-dolje (uzlijetanje aviona: koso gore, slijetanje: koso dolje)... Sve, naravno, ovisi o kreativnosti samoga učitelja.

### 3.Dvodimenzionalna izometrijska operacija (ili izometrija u ravnini)

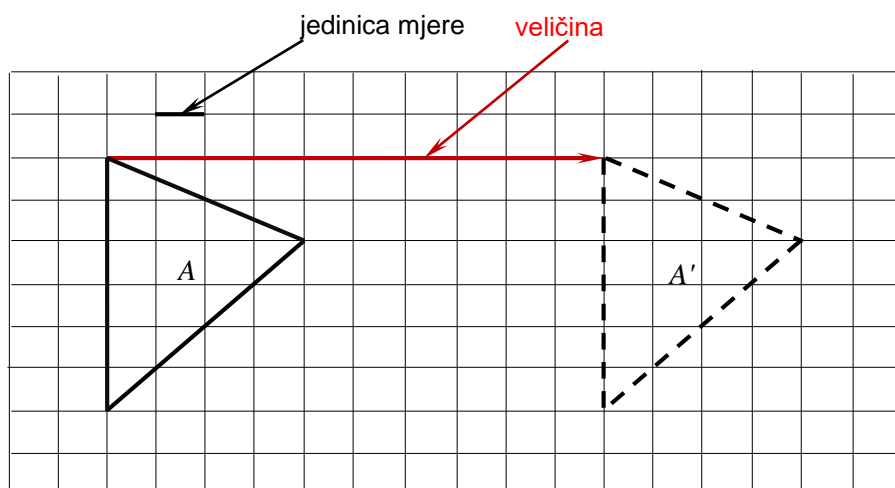
Pod dvodimenzionalnom izometrijom ili izometrijom u ravnini razumijevamo određenu operaciju gdje promatrani geometrijski lik (figura) zadržava svoje dimenzije, bez obzira na postupke koji se nad njim primjenjuju. Stoga dvodimenzionalna izometrijska operacija dopušta zahvate nad geometrijskim likom (figurom) koji je predmet promatranja, s naknadnim i neizostavnim trenutkom istraživanja (od strane učenika) vezano uz zadržavanje dimenzija.

Kao i kod jednodimenzionalne izometrijske operacije, operacija prevođenja ima svojstvo izravne jednakosti i pritom ne predstavlja pretjerane teškoće u izvršenju.

#### Rad s učenicima

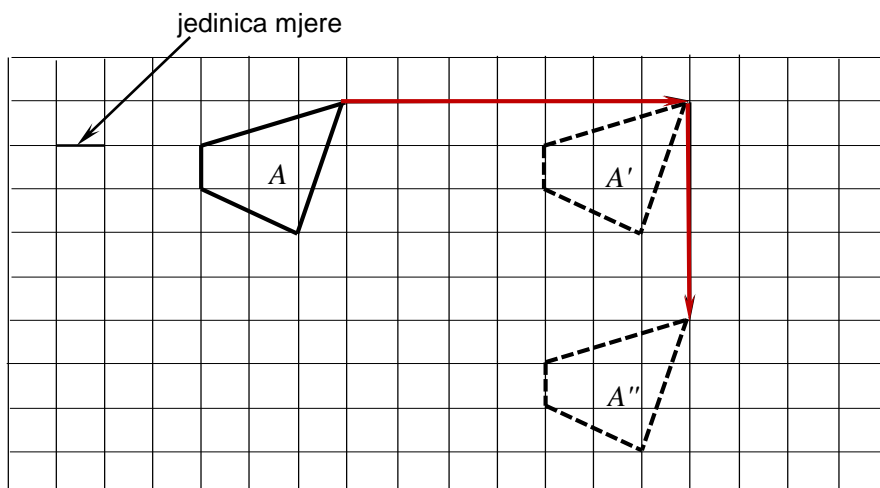
Vezano uz dvodimenzionalnu izometriju, učenicima se mogu dati na rješavanje sljedeći zadaci:

**Z1.** Trokut A pomakni (transliraj) u desno za deset jedinica.



Trokuti A i A' imaju svojstvo izravne jednakosti.

**Z2.** Četverokut A pomaknuti u desno za sedam jedinica i zatim pomaknuti prema dolje za pet jedinica.



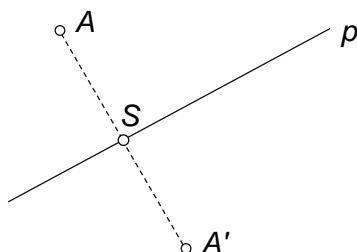
Četverokuti  $A$ ,  $A'$  i  $A''$  imaju svojstvo izravne jednakosti.

#### 4.Simetrija kao izometrija u ravnini

*Definicija:* Neka je u ravnini  $\Pi$  zadan pravac  $p$  i točka  $A$  koja ne pripada pravcu  $p$ ,  $A \notin p$ . Za preslikavanje točaka  $f_p : A \rightarrow A'$ , takvo da je dužina  $\overline{AA'}$  okomita na pravac  $p$  i da je  $\overline{AS} = \overline{SA'}$ , gdje je točka  $S$  sjecište dužine  $\overline{AA'}$  i pravca  $p$ , kažemo da je simetrija.

Pravac  $p$  nazivamo os simetrije.

Jednostavnije rečeno: Ako simetrija (ili zrcaljenje) točki  $A$ ,  $A \notin p$ , pridružuje točku  $A'$ , onda je os simetrije  $p$  simetrala dužine  $\overline{AA'}$ . [1], [7], [8]. Vidjeti sliku 2. Dakle, pod simetrijom razumijevamo izometriju ravnine kojoj je skup fiksnih točaka pravac  $p$ . Stoga se simetrija naziva i osna simetrija, koja je jednoznačno određena svojom osi simetrije. [3], [7].



Slika 2. Simetrija točke  $A$  u odnosu na pravac  $p$

Naziv *simetrija* dolazi od grčke riječi *συμμετρία* u značenju *slaganje dimenzija*; u svakodnevnom shvaćanju simetrija se odnosi na osjećaj skladne i lijepe proporcije i ravnoteže. [4], [9]

Oсна simetrija je *gibanje* koje mijenja orijentaciju; riječ je (radi se) o gibanju druge vrste.

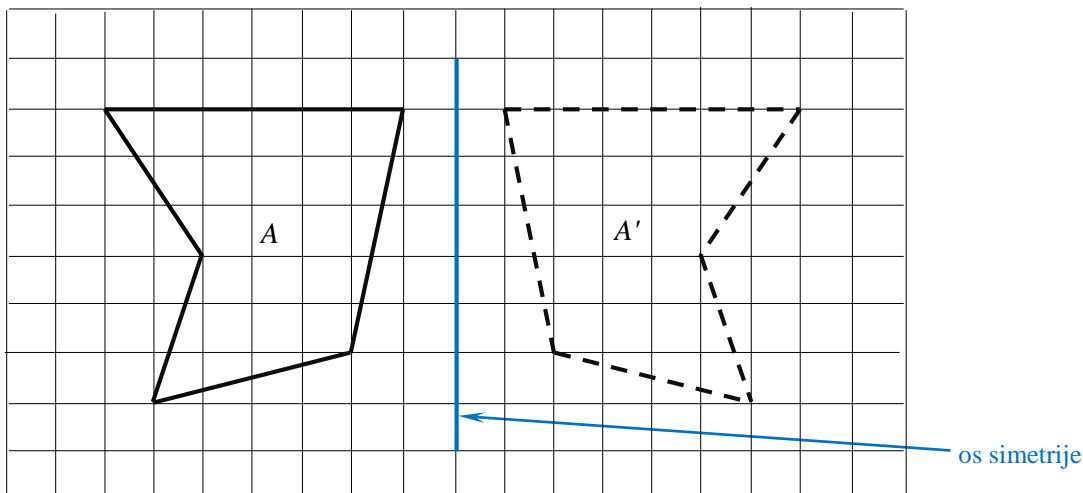
Simetrija, kao i kod jednodimenzionalne izometrijske operacije, uvažava nepromjenjivost dimenzija, čuva distancu (udaljenost) točaka.

Određivanje (crtanje) simetričnog lika, sa naznačenim izometrijskim svojstvima, relativno je jednostavno: ono uključuje crtanje svake točke zadanog lika. Međutim, u stvarnosti se to radi samo za rubne (krajnje) točke segmenata (dužinâ) koje oblikuju, definiraju geometrijski lik, figuru.

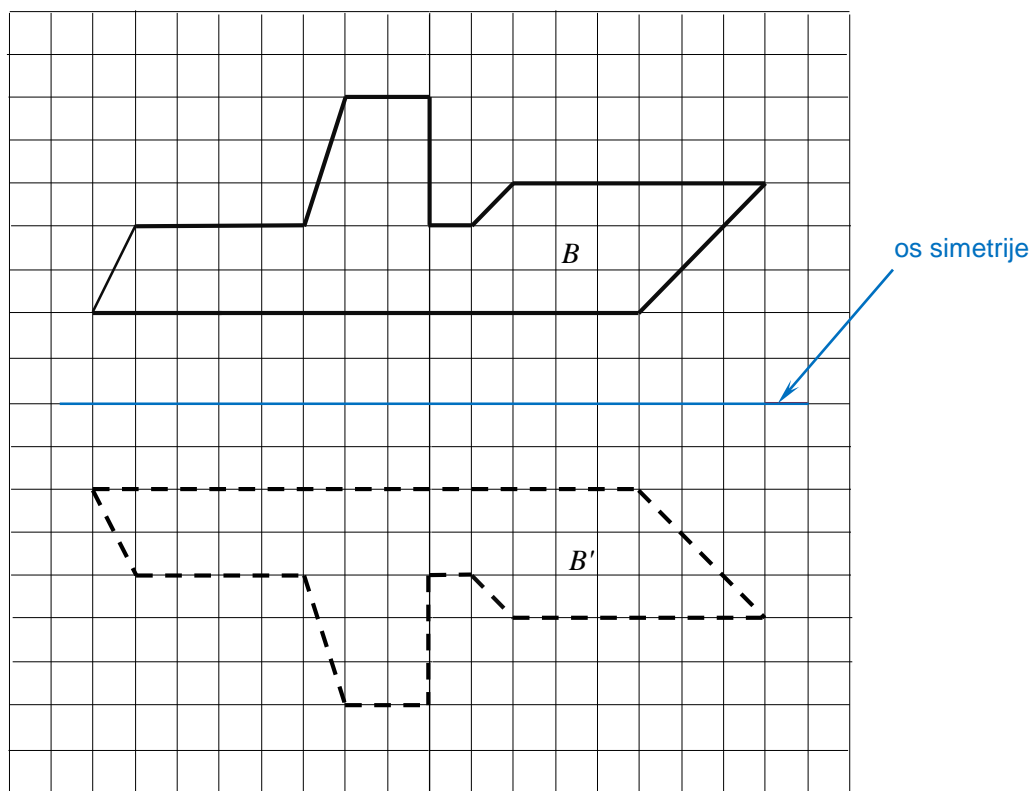
#### Rad s učenicima

Učenicima se mogu zadati sljedeći zadaci:

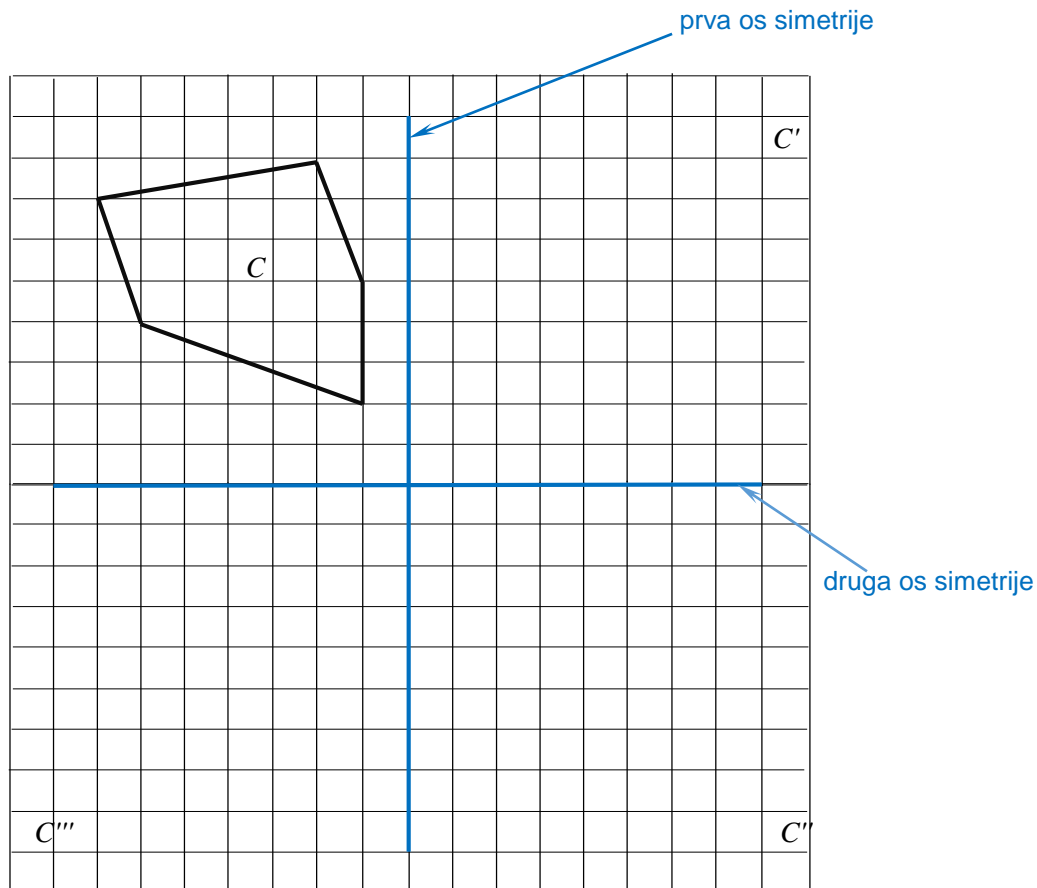
**Z3.** Lik  $A$  (peterokut) zrcaliti u lik  $A'$  u odnosu na os simetrije.



**Z4.** Lik *B* zrcaliti u lik *B'* u odnosu na os simetrije.



**Z5.** Lik *C* (peterokut) zrcaliti u lik *C'* u odnosu na prvu os simetrije, zatim lik *C'* u lik *C''* u odnosu na drugu os simetrije i zatim lik *C''* u lik *C'''* u odnosu na prvu (može i s obzirom na drugu) os simetrije.



*Napomena:* Ove i slične zadatke učenicima prvog razreda osnovne škole moguće je davati na rješavanje već na samom početku nastavne godine radi razvijanja motorike ruke, te razvijanju razmišljanja, zaključavanja i spretnosti, povećanja koncentracije i pažnje, te razvijanju kritičkog rasuđivanja. Naravno, ovakve zadatke moguće je zadavati i kasnije.

– o 0 o –

Kasnije se učenicima mogu dati na rješavanje i zadaci vezani uz prostor, tj. pomicanje i određivanje simetrije geometrijskih tijela.

Pomicanje (translacija) tijela može biti udesno ili ulijevo, gore ili dolje (ravno ili uko-so). Pritom se ne smiju davati obla geometrijska tijela! Dakle, valja davati *s a m o* ugla-ta geometrijska tijela! *Zašto?*

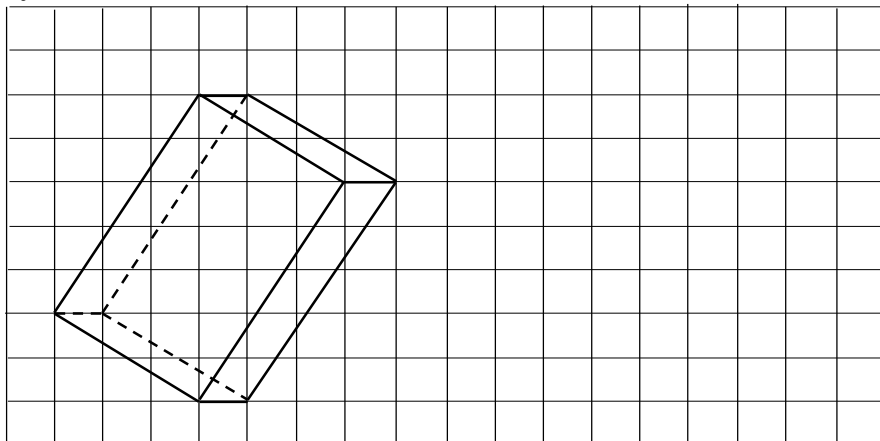
Mogu se zadati sljedeći zadaci:

**Z6.** Geometrijsko tijelo na slici (kvadar, tj. pravokutni paralelepiped) pomaknuti (translatirati) za:

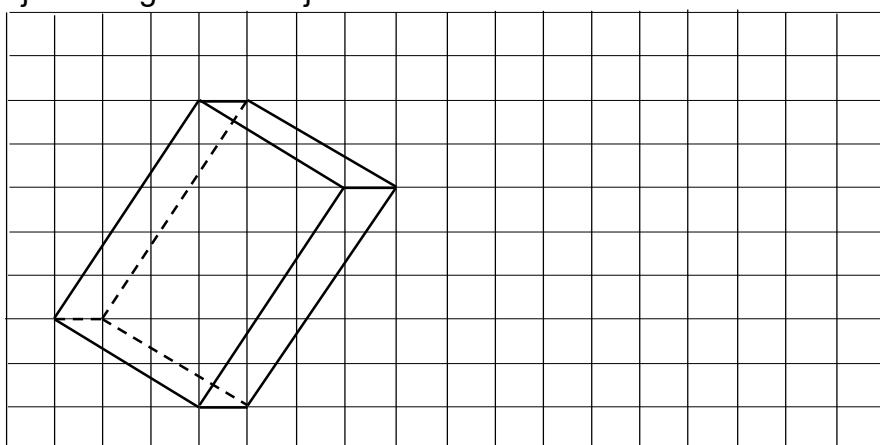
- (1) osam jedinica u desno;
- (2) jednu jedinicu gore i četiri jedinice desno.



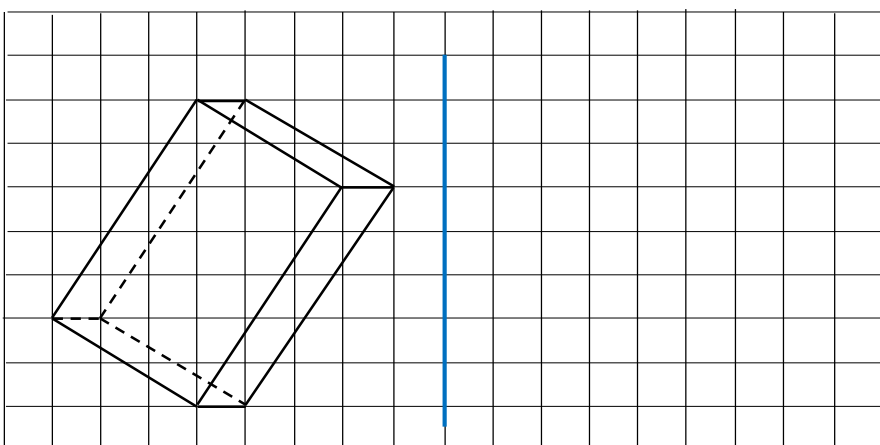
(1) osam jedinica u desno;



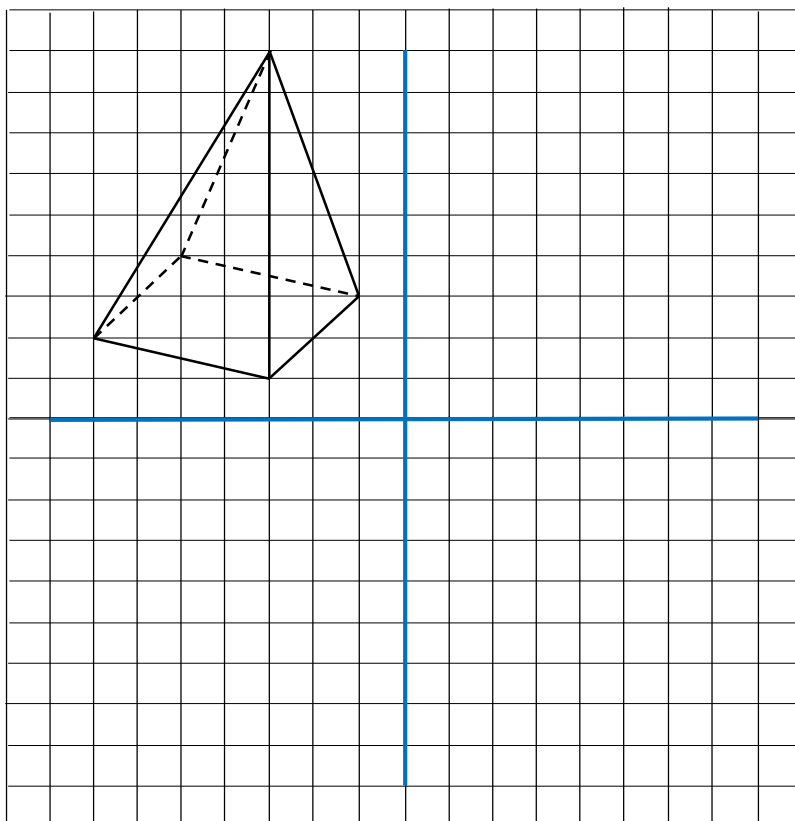
(2) jednu jedinicu gore i četiri jedinice desno



**Z7.** Geometrijsko tijelo na slici zrcaliti u odnosu na os simetrije.



**Z8.** Geometrijsko tijelo na slici (kvadratna piramida) zrcaliti u odnosu na obje osi simetrije.



## 5.Literatura

- [1] Benčić, V. (1969). *Elementarna geometrija, II. Dio*. Zagreb: Školska knjiga.
- [2] Croveti, G. (1981). *Didattica: Educazione geometrica 1*. Milano: Edicione Scuola Vita.
- [3] Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
- [4] Hill, T.Ch. & Lederan, M.L. (2005). *Symmetry and the Beautiful Universe*. Prometheus Books.
- [5] <https://theclickinggeneration.com>3315definicion>
- [6] *Izometrija*. Hrvatska enciklopedija (mrežno izdanje). Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013 – 2023. Pristup: 24. 12. 2023. <<https://www.enciklopedija.hr/clanak/28339>>.
- [7] Radić, M., Sušan, R. i Grilj, I. (1983). *Izometrije u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj škole*. Sarajevo: Svjetlost.
- [8] Radić, M. (1972). *Euklidova geometrija*. Zagreb: Školska knjiga.
- [9] Zee, A. (2007). *Fearful Symmetry*. New Jersey: Princeton University Press.