FIZIKA, 4 (1972) 73-75

SUR LE THÉORÈME DE L'ADDITION DES VITESSES EN RELATIVITÉ RESTREINTE

J. SCHAER

Université de Calgary, Calgary, Canada

Reçu le 30 septembre 1971

Le problème indiqué par le titre et sa solution sont bien connus[1]. Il est traité ici par une méthode qui, bien que connue aussi, mérite l'attention, car elle évite le choix de coordonnées spécifiées, des transformations de Lorentz explicites et beaucoup de calculs laborieux. Elle remonte à se servir de l'invariance fondamentale du produit scalaire à 4 dimensions. Si p, q sont des 4-vecteurs, leur produit scalaire $p\,q = p^\circ q^\circ - \vec{p}\cdot\vec{q}$, où $\vec{p}\cdot\vec{q}$ désigne le produit scalaire ordinaire à 3 dimensions, est indépendant du repère inertial respectif à qui p est décomposé en $p = (p^\circ, \vec{p})$, et q en $q = (q^\circ, \vec{q})$. A la fin nous produisons un paradoxe qui éclaircira l'interprétation du résultat.

Soient S, S' deux systèmes de référence inertials, S' mouvant à vitesse $c\vec{B}$ respectif à S (et donc S à vitesse $-c\vec{B}$ respectif à S'); $|\vec{B}| < 1$. Un corps C a les vitesses $c\vec{\beta}$ respectif à S, et $c\vec{\beta}'$ respectif à S'. Le problème est de déterminer $\vec{\beta}$, si $\vec{B}$ et $\vec{\beta}'$ sont données. Désignons par u, u', v les quadrivitesses de S, S', C respectivement et exprimons-les dans les trois systèmes de référence:

	S	S'	C
u	$(1, \vec{0})$	$\frac{1}{\sqrt{1-B^2}}(1, -\vec{B})$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1, -\vec{\beta})$
u'	$\frac{1}{\sqrt{1-B^2}}(1, \vec{B})$	$(1, \vec{0})$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}(1, -\vec{\beta}')$
v	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1, \vec{\beta})$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}(1, \vec{\beta}')$	$(1, \vec{0})$

Nous avons écrit B^2 pour $\vec{B}\cdot\vec{B}$ etc ..., et nous avons normalisé les 4-vecteurs: $u^2 = u'^2 = v^2 = 1$ (dans chaque système!).

Pour les autres trois invariantes nous trouvons, dans les différents systèmes

$$u\,v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\vec{B}\cdot\vec{\beta}'}{\sqrt{1-B^2}\,\sqrt{1-\beta'^2}} \tag{1a}$$

$$u'\,v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{1-\vec{B}\cdot\vec{\beta}}{\sqrt{1-B^2}\,\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1b}$$

$$u\,u' = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{1-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}{\sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\beta'^2}}. \tag{1c}$$

De (1a) nous obtenons d'abord β^2, et ensuite nous pouvons calculer $\vec{\beta}\cdot\vec{B}$ et $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'$ de (1b) et (1c)

$$\beta^2 = \frac{(\vec{B}+\vec{\beta}')^2 - B^2\beta'^2 + (\vec{B}\cdot\vec{\beta}')^2}{(1+\vec{B}\cdot\vec{\beta}')^2}, \tag{2a}$$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{B} = \frac{(\vec{B}+\vec{\beta}')\cdot\vec{B}}{1+\vec{B}\cdot\vec{\beta}'}, \tag{2b}$$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}' = \frac{(\vec{B}+\vec{\beta}')\cdot\vec{\beta}'}{1+\vec{B}\cdot\vec{\beta}'}. \tag{2c}$$

Pour enfin exprimer $\vec{\beta}$ par $\vec{B}$ et $\vec{\beta}'$ il semble naturel, en vue de la forme de (2), de poser

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}+\vec{\beta}'}{1+\vec{B}\cdot\vec{\beta}'} + \vec{\delta}, \tag{3}$$

et cherchons à déterminer $\vec{\delta}$. De (2b), (2c) nous obtenons

$$\vec{\delta}\cdot\vec{B} = \vec{\delta}\cdot\vec{\beta}' = 0,$$

et donc

$$\vec{\beta}^2 = \frac{(\vec{B} + \vec{\beta}')^2}{(1 + \vec{B} \cdot \vec{\beta}')^2} + \vec{\delta}^2.$$

La comparaison avec (2a) montre que

$$\vec{\delta}^2 = -\frac{B^2 \beta'^2 - (\vec{B} \cdot \vec{\beta}')^2}{(1 + \vec{B} \cdot \vec{\beta}')^2}. \tag{4}$$

Nous avons ainsi trouvé un vecteur ordinaire $\vec{\delta}$ avec $\vec{\delta}^2 < 0$, sauf dans le cas trivial où $\vec{B}$ et $\vec{\beta}'$ sont parallèles (où $\vec{\delta}^2 = 0$). Il semble donc nous avons démontré une inconsistence de la relativité restreinte.

Où est-ce que nous avons commis une erreur? La faute est l'équation (3). $\vec{B}$ et $\vec{\beta}'$ sont des 3-vecteurs définis dans les systèmes S, et S′ et C respectivement. $\vec{B} + \vec{\beta}'$ a donc un sens dans S′ seulement, tandis que $\vec{\beta}$ n'est défini que dans S et C. Ainsi (3) définit $\vec{\delta}$ comme une différence de deux vecteurs qui ne sont pas définis dans un système commun. Une telle différence n'est pas un vecteur, et le résultat (4) ne devrait pas nous étonner.

Avec la méthode des invariantes, les équations (2) constituent le résultat final. En effet, sans spécifier des coordonnées particulières nous ne pouvons pas espérer plus que des équations entre des 3-invariantes, c'est à dire des grandeurs qui sont indépendantes des systèmes de coordonnées spatiales. Si on choisit des coordonnées particulières, (2) nous donne 3 équations pour les 3 composantes de $\vec{\beta}$. Mais il faut s'apercevoir que les seconds membres de (2) sont évalués dans S′, tandis que les premiers membres se rapportent à S ou C, S, C respectivement: de (2a) nous obtenons $|\vec{\beta}|$ (dans S ou C), ensuite de (2b) l'angle entre $\vec{\beta}$ et $\vec{B}$ (dans S), et de (2c) l'angle entre $\vec{\beta}$ et $\vec{\beta}'$ (dans C).

Référénce

1) C. Möller, The theory of relativity, Oxford 1962.