Osječki matematički list 24 (2024), 37–47

Oskulacijske kružnice i evolute konika

Ivana Božić Dragun[*], Maja Ćurić[†], Martina Babić[‡]

Sažetak

U radu se pojašnjava značenje pojmova oskulacijske kružnice i evolute konike u Euklidskoj ravnini. Navodi se i jedan od načina za izvođenje njihovih jednadžbi.

Ključne riječi: *ravninska algebarska krivulja, red, razred, oskulacijska kružnica konike, evoluta konike*

Osculating circles and evolutes of conics

Abstract

The paper explains the meaning of the terms osculation circle of a conic and evolute of a conic in the Euclidean plane. One of the ways to derive their equations is also given.

Keywords: *plane algebraic curve, order, class, osculating circle of a conic, evolute of a conic*

[*]Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, 10 000 Zagreb, email: ivana.bozic@tvz.hr
[†]Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, 10 000 Zagreb, email: mcuric@tvz.hr
[‡]Studentica, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, 10 000 Zagreb email: mbabic@tvz.hr

1 Uvod

Od 1665. godine kada je matematičar Huygens uveo pojam evolute krivulje i zaintrigirao geometrijski svijet brojni su matematičari na različite načine dolazili do njezine jednadžbe i proučavali njezina svojstva. U sklopu kolegija Nacrtna geometrija studente upoznajemo s pojmom oskulacijske kružnice koju koristimo u različitim konstrukcijama vezanim uz konike. Namjera je povezati sintetička znanje iz kolegija Nacrtna geometrija s analitičkim pristupom iz kolegija Matematika 1 i 2.
U nastavku definirajmo osnovne pojmova koji se spominju u radu.

Svaki skup od ∞^1 točaka ili pravaca u ravnini neprekinuto povezanih nekim zakonom naziva se *ravninskom krivuljom*. Ovisno o matematičkom zakonu koji ih definira, da li ih je moguće u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu predočiti algebarskom ili transcendentnom jednadžbom, krivulje se dijele na algebarske i transcendentne. Algebarske krivulje mogu se klasificirati u odnosu na neka svojstva: red, razred i stupanj.

Ravninska algebarska krivulja n-tog reda je skup svih točaka $T(x, y)$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu $f^n(x, y) = 0$, gdje je $f^n(x, y)$ polinom n-tog stupnja.

Red ravninske algebarske krivulje jednak je broju njezinih sjecišta s bilo kojim pravcem ravnine krivulje. Ta sjecišta mogu biti realna (različita ili podudarna) ili u parovima konjugirano imaginarna.

Ravninska algebarska krivulja m-tog razreda (omotaljka) je skup svih pravaca $p(u, v)$ čije pravčaste koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu $g^m(u, v) = 0$, gdje je $g^m(u, v)$ polinom m-tog stupnja, [2], [3].

Razred ravninske algebarske krivulje jednak je broju tangenata (realnih i imaginarnih), koje možemo povući na tu krivulju iz po volji odabrane točke koja ne leži na toj krivulji.
Ako su za neku krivulju red i razred jednaki $n = m$, krivulja ima stupanj n. Skup svih tangenata u svim točkama algebarske krivulje reda n čini algebarsku krivulju nekog razreda m, pri čemu je općenito $n \neq m$.
Točke krivulje u kojima postoji jedinstvena tangenta, nazivamo *regularnim točkama krivulje*. Takve su gotovo sve točke algebarske krivulje. Pored regularnih, na algebarskim krivuljama mogu postojati i *singularne točke* u kojima krivulja ima više tangenata. To su na primjer višestruke točke u kojima krivulja samu sebe siječe.

Dvostruki elementi algebarske krivulje n-tog reda su dvostruke točke (čvorovi, šiljci ili izolirane dvostruke točke), dok su za algebarsku krivulju m-tog razreda to dvostruki pravci (dvostruke tangente, infleksioni pravci ili izolirani dvostruki pravci). Broj dvostrukih elemenata algebarske krivulje je ograničen te ako ih krivulja ima više od određenog broja ona degenerira

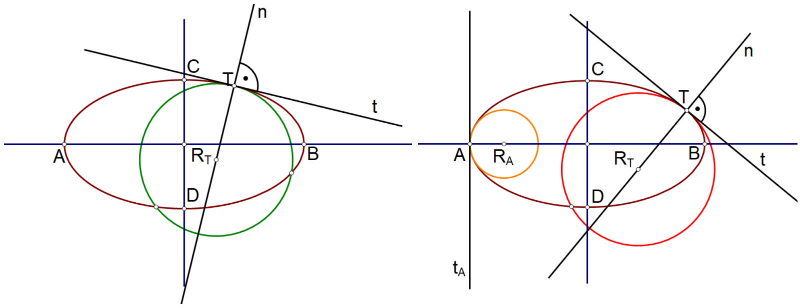
(raspada se) na krivulje nižih redova (razreda).
Nedegenerirana algebarska krivulja reda n može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dvostrukih točaka, analogno nedegenerirana algebarska krivulja razreda m može imati najviše $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ dvostrukih pravaca, [2], [3].
Rod algebarske krivulje je razlika između najvećeg mogućeg broja dvostrukih elemenata koje može imati krivulja tog reda, odnosno razreda, i stvarnog broja dvostrukih elemenata promatrane krivulje.
Ako je krivulja roda 0 tada se može izraziti racionalnim funkcijama nekog parametra, stoga se takve algebarske krivulje nazivaju racionalnim krivuljama. Međutim obratno ne vrijedi, nije svaka racionalna krivulja roda 0.
Neka su k^r i k^n algebarske krivulje redova r i n koje nemaju zajedničkih dijelova, tada se krivulje k^r i k^n sijeku se u točno $r \cdot n$ točaka što nam kaže Bézoutov teorem. Sjecišta algebarskih krivulja mogu biti realna ili imaginarna. Ako su realna mogu se podudarati i tada ih brojimo kao više sjecišta, dok su imaginarna sjecišta uvijek u paru, štoviše, ona su konjugirana.

2 Oskulacijska kružnica konike

Zakrivljenost ravninske krivulje pojam je diferencijalne geometrije, računa se pomoću druge derivacije vektorski zadane krivulje, i mjeri otklon krivulje od tangente. Zakrivljenost kružnice polumjera r iznosi $\frac{1}{r}$ za svaku njezinu točku, pa ju kao krivulju konstantne zakrivljenosti koristimo za mjerenje kod ostalih krivulja gdje je zakrivljenost promjenjiva.

U regularnoj točki T krivulje k promatramo tangentu i normalu. Bilo koja kružnica koja prolazi točkom T, a središte joj leži na normali, ima istu tangentu u T kao i krivulja k. Svaka takva kružnica ima s krivuljom k dvije zajedničke točke podudarne s točkom T pa kažemo da kružnica i krivulja imaju u točki T *dodir 1. reda*, a kružnicu nazivamo *dirnom kružnicom* krivulje k u točki T, vidi sliku 1.

Dirnih kružnica krivulje k u točki T ima beskonačno mnogo (isto koliko i točaka na normali), i one čine pramen dirnih kružnica krivulje k u točki T. Ako je k algebarska krivulja reda n, svaka dirna kružnica imat će s njom, osim dodirne točke T koju brojimo kao 2 sjecišta, još $2(n-1)$ zajedničkih točaka. U pramenu dirnih kružnica krivulje k u regularnoj točki T uvijek postoji jedna kružnica kojoj se još jedno od preostalih $2(n-1)$ sjecišta podudara s točkom T. Ta kružnica i krivulja k imaju 3 zajedničke točke podudarne s točkom T i kažemo da u T imaju *dodir 2. reda*. Ovu kružnicu nazivamo *oskulacijskom kružnicom* krivulje k u točki T ili *kružnicom zakrivljenosti* krivulje k u točki T, vidi sliku 1.



Slika 1. Dirna (zelena), oskulacijska (crvena) i hiperoskulacijska (narančasta) kružnica konike k u točki T

Ako je krivulja k u okolini točke T simetrična u odnosu na normalu, tada će ona sa svojom oskulacijskom kružnicom imati 4 zajedničke točke u T. U takvim slučajevima kažemo da krivulja i kružnica imaju *dodir 3. reda* ili da se hiperoskuliraju, a kružnicu nazivamo *hiperoskulacijskom kružnicom* krivulje k, vidi sliku 1.
Oskulacijska kružnica konike jedinstvena je za svaku njezinu točku T. Budući da u točki T ove dvije krivulje imaju dodir 2. reda, tj. tri sjecišta koja su pala u istu točku T, svaka oskulacijska kružnica siječe koniku još u jednoj realnoj točki. Zakrivljenost krivulje k u točki T jednaka je zakrivljenosti njezine oskulacijske kružnice u T, [1], [5], [6].
Jednadžbu oskulacijske kružnice u proizvoljnoj točki $T(x_1, y_1)$ krivulje drugog stupnja možemo odrediti na sljedeći način, [2]:
Neka je elipsa zadana jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i $T(x_1, y_1)$ neka je proizvoljna točka elipse.
Parametarska jednadžba normale elipse u točki T zadana je jednadžbom

$$x(s) = x_1(1 + b^2s), \quad y(s) = y_1(1 + a^2s), \quad s \in \mathbb{R} \tag{1}$$

gdje je s parametar pomične točke S na normali.
Jednadžba kružnice koja dira elipsu u točki $T(x_1, y_1)$ je

$$[x - x_1(1 + b^2s)]^2 + [y - y_1(1 + a^2s)]^2 = (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)s^2. \tag{2}$$

Ako iz jednadžbe kružnice (2) i jednadžbe elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ eliminiramo primjerice koordinatu y, dobivamo bikvadratnu jednadžbu u x, koja sadrži faktor $(x - x_1)^2$, što znači da se dva rješenja podudaraju. Drugi faktor vodi na kvadratnu jednadžbu

$$e^4x^2 - 2e^2(a^2 + b^2 + 2a^2b^2s)x_1x + [e^4x_1^2 + 4a^4b^2(1 + a^2s)(1 + b^2s)] = 0 \tag{3}$$

s korijenima x_3, x_4, koji se mogu izračunati, pri čemu je $e^2 = a^2 - b^2$. Oskulacijska kružnica ima s elipsom četiri sjecišta, od kojih su tri pala u točku T, odnosno osim već ispunjenog uvjeta $x_2 = x_1$ mora biti ispunjen još i uvjet $x_3 = x_1$. Ta jednakost daje nam za s vrijednost

$$s = \frac{e^2 x_1^2 - a^4}{a^4 b^2}. \tag{4}$$

Sada uvrštavanjem s u jednadžbe (1) dobivamo središte oskulacijske kružnice. Formula za udaljenost dviju točaka dat će nam polumjer oskulacijske kružnice. Tako dobivamo formule

$$x = \frac{e^2}{a^4} x_1^3, \quad y = -\frac{e^2}{b^4} y_1^3, \quad r^2 = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^3}{a^8 b^8}. \tag{5}$$

Sad možemo zapisati jednadžbu oskulacijske kružnice.

3 Evolute konika

Giba li se točka T neprekinuto po konici, tada će središta pripadnih oskulacijskih kružnica opisivati algebarsku krivulju kojoj će tangente biti odgovarajuće normale konike. Tu krivulju nazivamo **evolutom** konike.

Definicija 3.1. *Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje,* [5].

Teorem 3.1. *Evoluta dane krivulje omotaljka je njezinih normala.*

Prema definiciji 3.1, prve dvije jednadžbe iz (5) su parametarske jednadžbe evolute elipse za parametre x_1, y_1 koji su vezani relacijom $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$. Eliminiramo li ih iz odnosa tri jednadžbe, proizlazi poznata jednadžba evolute elipse kao geometrijskog mjesta središta oskulacijskih kružnica elipse,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}, \tag{6}$$

što je prema [5] poznata jednadžba astroide koja je krivulja 6. reda i 4. razreda. Za ostale konike jednadžbe oskulacijske kružnice i evolute izvodi se na isti način.

Jednadžba evolute hiperbole $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ malo se razlikuje od jednadžbe (6),

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}, \quad e^2 = a^2 + b^2.$$

Za oskulacijsku kružnicu parabole $y^2 = 2px$ u točki $T(x_1, y_1)$ imamo:

$$x = 3x_1 + p, \quad y = -\frac{2x_1y_1}{p}, \quad r^2 = \frac{(2x_1 + p)^3}{p}. \tag{7}$$

Eliminacijom x_1, y_1 iz prve dvije jednadžbe i jednadžbe $y_1^2 = 2px_1$ slijedi jednadžba evolute parabole

$$27py^2 = 8(x - p)^3. \tag{8}$$

Teorem 3.2. *Evoluta konike općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

Sintetički dokaz ovoga teorema može se pogledati u [1].

Poznati su i sljedeći odnosi dane krivulje i njezine evolute:
Točki ekstrema polumjera zakrivljenosti dane konike (tjemenu dane konike) odgovara, općenito, šiljak evolute. Točki krivulje u kojoj je njezina zakrivljenost jednaka nuli, odgovara beskonačno daleka točka evolute, [5].

Za evolutu elipse, hiperbole i parabole u euklidskoj ravnini zaključuje se sljedeće, [1] (vidi tablicu 1.):

Tablica 1.

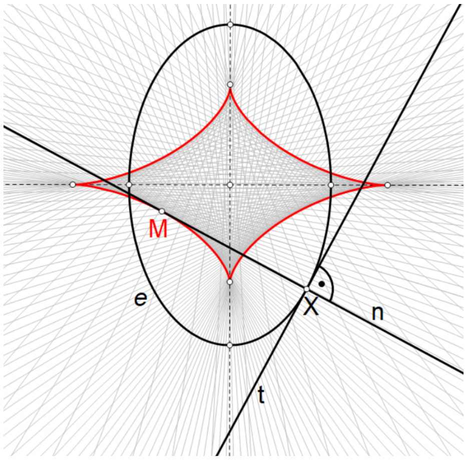
evoluta koje e-konike	razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka
e	4	6	0	3	0	6
h	4	6	0	3	0	6
p	3	3	0	0	1	1

- Evoluta elipse je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda, koja ima 4 realna šiljka koji su središta zakrivljenosti u tjemenima elipse i 2 imaginarna šiljka na beskonačno dalekom pravcu, koji odgovaraju središtima zakrivljenosti u imaginarnim beskonačno dalekim točkama elipse, (vidi sliku 2).

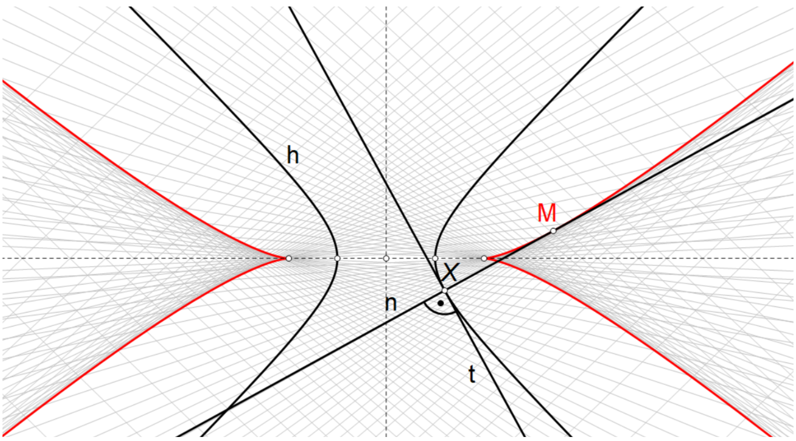
- Evoluta hiperbole je krivulja 6. reda i 4. razreda. Ima 2 realna šiljka koji odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u realnim tjemenima hiperbole, 2 imaginarna šiljka su središta zakrivljenosti u imaginarnim tjemenima, te 2 šiljka beskonačno daleko, koji su središta zakrivljenosti u beskonačno dalekim točkama hiperbole, (vidi sliku 3).

- Evoluta parabole je krivulja 3. reda i 3. razreda. Ima jedan realan šiljak koji odgovara središtu zakrivljenosti oskulacijske kružnice u tjemenu parabole, (vidi sliku 4).

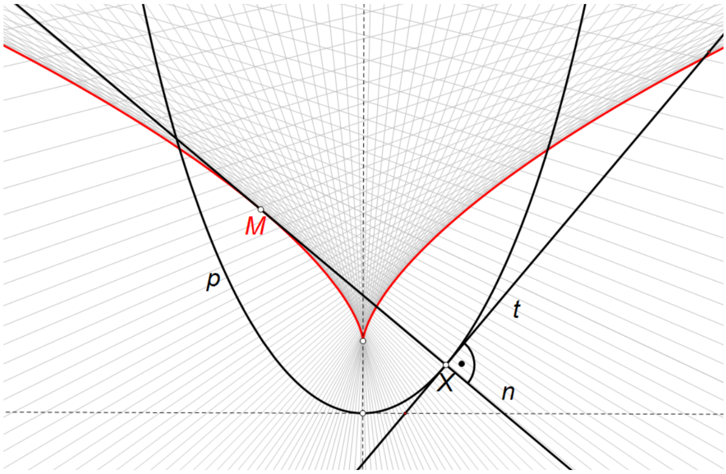
Sve slike u članku nacrtane su uz pomoć računalnog programa The Geometer's Sketchpad.



Slika 2. Evoluta elipse e u euklidskoj ravnini



Slika 3. Evoluta hiperbole h u euklidskoj ravnini



Slika 4. Evoluta parabole p u euklidskoj ravnini

Do jednadžbe evolute moguće je doći i na sljedeći način, [1]:
Neka je zadana krivulja predočena parametarskim jednadžbama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

Označimo s $C(\xi, \eta)$ središte zakrivljenosti dane krivulje u točki (x, y). Iz diferencijalne geometrije je poznato da tada parametarske jednadžbe koordinata (ξ, η) imaju sljedeći oblik, [4], [5], [7]

$$\xi = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{9}$$

Služeći se tim jednadžbama, određuju se evolute konika u euklidskoj ravnini.

Primjer 3.1. *Odredimo evolutu elipse zadane parametarskom jednadžbom*

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Rješenje. Kako bismo izračunali koordinate središta zakrivljenosti C koristimo formule (9). Derivacije parametarskih funkcija zadane elipse su

$$x' = (a\cos t)' = -a\sin t, \quad y' = (b\sin t)' = b\cos t,$$

$$x'' = (-a\sin t)' = -a\cos t, \quad y'' = (b\cos t)' = -b\sin t.$$

Uvrstimo li gornje relacije u jednadžbe (9) dobivamo sljedeće

$$\xi = a\cos t - b\cos t \cdot \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}$$

$$= a\cos t - \cos t \cdot \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a} = \frac{a^2\cos t - a^2\sin^2 t\cos t - b^2\cos^3 t}{a}$$

$$= \frac{a^2\cos t\left(1-\sin^2 t\right) - b^2\cos^3 t}{a} = \frac{1}{a}\left(a^2\cos^3 t - b^2\cos^3 t\right) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t;$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t \cdot \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}$$

$$= b\sin t - \sin t \cdot \frac{a^2\sin^2 t b^2\cos^2 t}{b} = \frac{b^2\sin t - a^2\sin^3 t - b^2\cos^2 t\sin t}{b}$$

$$= \frac{b^2\sin t\left(1-\cos^2 t\right) - a^2\sin^3 t}{b} = \frac{1}{b}\left(b^2\sin^3 t - a^2\sin^3 t\right) = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Dakle,

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \quad \eta = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Eliminacijom parametra t iz gornjih jednadžbi i osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, dobivamo sljedeću jednadžbu

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \ \Rightarrow a\xi = \left(a^2-b^2\right)\cos^3 t$$

$$\Rightarrow \frac{a\xi}{a^2-b^2} = \cos^3 t \ \Rightarrow \frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}} = \cos^2 t;$$

$$\eta = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t \ \Rightarrow b\eta = \left(b^2-a^2\right)\sin^3 t$$

$$\Rightarrow \frac{b\eta}{[-(a^2\breve{}b^2)]} = \sin^3 t \ \Rightarrow \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}} = \sin^2 t.$$

$$\frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}} + \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}} = 1 \ \Rightarrow (a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2-b^2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ako je $a\xi = X$, $b\eta = Y$, $a^2 - b^2 = A$, jednadžba evolute ima poznati oblik

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}},$$

iz kojeg zaključujemo da je evoluta algebarska krivulja 6. reda.

U posebnom slučaju, pokazuje se da je evoluta kružnice točka, odnosno središte kružnice. ◀

Za evolute krivulja drugog stupnja možemo odrediti i njihove jednadžbe u pravčastim koordinatama, [2].
Jednadžba normale u zadanoj točki $T(x_1, y_1)$ elipse glasi

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1, \tag{10}$$

hiperbole

$$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y = (a^2 + b^2) x_1 y_1, \tag{11}$$

odnosno parabole

$$y_1 x + py = (p + x_1) y_1. \tag{12}$$

Ako se jednadžba normale elipse (10) identificira s jednadžbom pravca u pravčastim koordinatama $ux + vy + 1 = 0$ slijedi relacija

$$a^2 y_1 : -b^2 x_1 : -e^2 x_1 y_1 = u : v : 1,$$

odakle je

$$x_1 = -\frac{a^2}{e^2 u}, \quad y_1 = \frac{b^2}{e^2 v}.$$

Točka $T(x_1, y_1)$ je ona točka elipse u kojoj se konstruirala normala, stoga njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Iz toga slijedi jednadžba

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = e^4$$

odnosno

$$e^4 u^2 v^2 - b^2 u^2 - a^2 v^2 = 0. \tag{13}$$

Jednadžba (13) predstavlja skup svih normala elipse, dakle evolutu elipse **kao omotaljku normala**. Iz nje se može zaključiti da je evoluta elipse krivulja 4. razreda.
Istim postupkom dobiva se jednadžba evolute hiperbole u pravčastim koordinatama

$$e^4 u^2 v^2 + b^2 u^2 - a^2 v^2 = 0, \tag{14}$$

i jednadžba evolute parabole u pravčastim koordinatama

$$pu^3 + 2puv^2 + 2v^2 = 0, \tag{15}$$

iz koje možemo zaključiti da je evoluta parabole 3. razreda.

Literatura

[1] I. Božić Dragun, *Evolute konika u projektivno-metričkim ravninama*, Doktorska disertacija, PMF Zagreb, 2021;

[2] R. Cesarac, *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja*, Školska knjiga, Zagreb, 1957.

[3] S. Gorjanc, E. Jurkin, I. Kodrnja, H. Koncul, *Deskriptivna geometrija*, Web-udžbenik,
https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/index.html

[4] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb.

[5] A. A. Savelov, Ravninske krivulje, *Školska knjiga*, Zagreb, 1979.

[6] A. Sliepčević, I. Božić, *Perspective Collineation and Osculating Circle of Conic in PE-plane and I-plane*, KoG **15** (2011), 63–66.

[7] D. Somasundaram, *Differential geometry - A first course*, Alpha Science, 2005.