Osječki matematički list 24 (2024), 75–86

Helena geometrijska iliti cikloida

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku pratimo glavne momente iz povijesti krivulje cikloide, zahvaljujući kojima je stekla nadimak Helena geometrije. Konkretno, koncentriramo se na 17. stoljeće u kojem su iz njezine definicije izvedena sva njezina glavna svojstva. Cikloida je pritom zaokupila interes mnogih znamenitih matematičara, a baveći se njome utrli su put modernom infinitezimalnom računu.

Ključne riječi: *cikloida, povijest infinitezimalnog računa, tautohrona, brahistohrona, Galileo Galilei, Gilles Personne de Roberval, Evangelista Torricelli, René Descartes, Blaise Pascal, Christiaan Huygens, Johann Bernoulli*

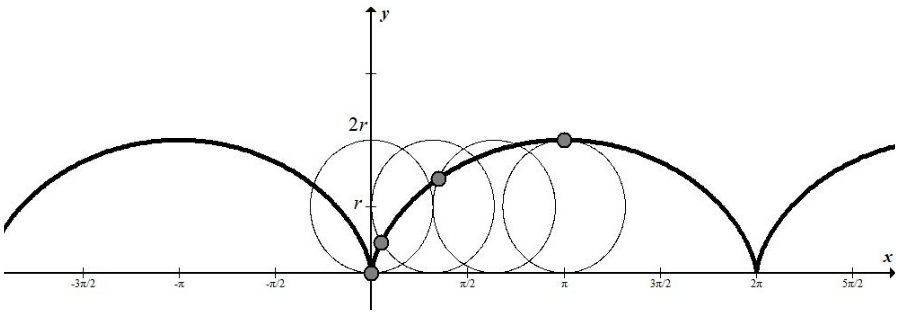
Helen of geometers aka cycloid

Abstract

In this article, we describe the main moments in the history of the cycloid which earned her the nickname Helen of geometry. We concentrate on the 17th century, in which all its main properties were derived from the definition of the cycloid. This curve captured the interest of many famous mathematicians, and by investigating its properties they paved the way for the modern infinitesimal calculus.

Keywords: *cycloid, history of calculus, tautochrone, brachistochrone, Galileo Galilei, Gilles Personne de Roberval, Evangelista Torricelli, René Descartes, Blaise Pascal, Christiaan Huygens, Johann Bernoulli*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr



Slika 1. Krivulja cikloida. Slika je generirana programom Graph 4.4.2., `https://www.padowan.dk/`.

1 Uvod

U prošlom broju [3] opisali smo kako je René Descartes 1630-ih godina konstruirao tangentu na krivulju cikloidu. Ta krivulja bila je pravi „hit" među matematičarima i fizičarima 17. stoljeća i potakla mnoga nova otkrića, ali i sukobe. Zbog mnoštva tih svađa, ali i ljepote svojih svojstava dobila je nadimak „Helena geometrijska", kao aluziju na znamenitu Helenu trojansku [4]. U ovom članku ćemo opisati najvažnije i najzabavnije trenutke vezane za ovu transcendentnu ravninsku krivulju, a koji su bili važni koraci prema utemeljenju infinitezimalnog računa i u njegovom ranom razvoju.

Za slučaj da ste zaboravili tko je naša Helena, da ponovimo definiciju:

Definicija 1. *Cikloida je ravninska krivulja koja je trajektorija točke na rubu kružnice* (*tzv. generacijske kružnice*) *kad se ta kružnica kotrlja po pravcu* (*vidi sliku* 1).

Cikloidu je najjednostavnije opisati njezinim parametarskim jednadžbama u Kartezijevom koordinatnom sustavu $(x = r\,(t - \sin t),\, y = r\,(1 - \cos t))$, gdje je r polumjer kružnice iz definicije cikloide.

2 Kako se rodila Helena, ovaj, cikloida

Iako je stekla popularnost u 17. stoljeću, cikloida je bila poznata sigurno bar stotinjak godina ranije. Neki autori smatraju da su je, s obzirom na jednostavnost njezinog opisa i činjenicu da su temeljito proučili svojstva kružnice, poznavali već antički Grci, no za to ne postoje nikakvi dokazi.

Čini se da je rana povijest cikloide vezana za pokušaje rješenja jednog od tri klasična problema grčke antike, problem kvadrature kruga.[1]

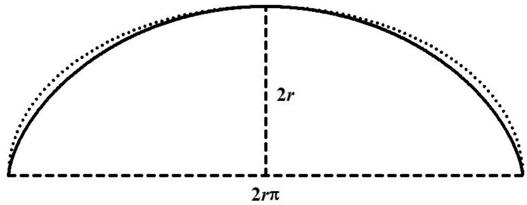
Glavna dva kandidata za oca cikloide su **Nikola Kuzanski** (Nicolaus Cusanus, 1401.–1464.), njemački biskup, filozof i matematičar, te **Charles de Bovelles** (oko 1475.–1566.), francuski matematičar i filozof. Nikoli Kuzanskom pripisao ju je 1679. engleski matematičar John Wallis vezano za Nikoline pokušaje rješenja antičkog problema kvadrature kruga, no čini se da je ipak Wallis bio u krivu ili je pak raspolagao nekim izvorima koji su u međuvremenu izgubljeni. Stoga većina danas uzimaju de Bovellesa kao prvog koji se bavio cikloidom: on ju je opisao, misleći da se radi o dijelu veće kružnice, 1503. u svom djelu *Introductio in geometriam*. On je dvije godine godine ranije, također rješavajući problem kvadrature kruga, opisao i cikloidi srodnu krivulju koju danas nazivamo hipotrohoidom, koja nastaje kotrljanjem jedne kružnice unutar druge [7, 9, 10, 12].

Dok nije sa sigurnošću poznato ni tko ni kad je prvi razmatrao cikloidu, autor njezina imena, kao i prve ozbiljnije studije o njoj je poznat: veliki renesansni znanstvenik **Galileo Galilei** (1564.–1642.) joj je 1599. godine dao ime, ističući njime da je ona „izvedena iz kružnice". Za to saznajemo iz jednog 1644. objavljenog rada Galileovog studenta Evangeliste Torricellija. Galileo je pokušavao odrediti njezinu kvadraturu, tj. konstruirati kvadrat iste površine kao što je površina između jednog luka cikloide i pravca po kojem se kotrlja njezina generacijska kružnica. U nastavku taj lik ćemo jednostavno zvati jednim dijelom cikloide. Galileov pristup je lijep primjer eksperimenta u matematičke svrhe: Izrezao je jedan dio cikloide te krug veličine pripadne generacijske kružnice iz istog materijala te usporedio njihove mase kako bi postavio hipotezu o odnosu njihovih površina. U više pokušaja došao je do zaključka da je taj omjer otprilike 3:1, ali je zatim odustao smatrajući da se radi o nesumjerljivim veličinama (danas bismo rekli, mislio je da im je omjer iracionalan broj) [5, 8, 9, 10].

3 Helenina osobnost

Danas bismo Galileov zadatak lako riješili integriranjem, no ono početkom 17. stoljeća još nije bilo otkriveno. Matematičari su znali za starogrčku metodu ekshaustije, koja je vrlo precizno, ali i prilično komplicirano omogućavala rješavanje problema površine (o metodi ekshaustije više u sljedećem broju), te su neki, primjerice Johannes Kepler, osmislili svoje pojednostavljene metode. No, upravo pokušaji rješenja problema površine u konačnici

[1]Podsjećamo, radi se o problemu za kojeg danas znamo da nije rješiv, a koji zahtijeva konstrukciju (ravnalom i šestarom) stranice kvadrata koji ima istu površinu kao dani krug.



Slika 2. Jedan luk cikloide (puna linija) blizak je polovici elipse (točkasta linija). Slika je generirana programom Graph 4.4.2., `https://www.padowan.dk/`.

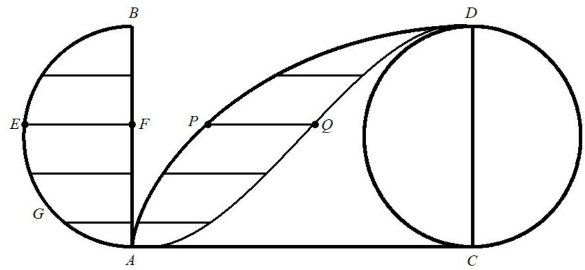
će dovesti do modernog pojma integrala, kao što će i pokušaji određivanja tangenti dovesti do deriviranja. Krivulja cikloida odigrala je važnu ulogu u tom putu ... [2].

Već oko 1615. za cikloidu se zainteresirao znameniti svećenik i matematičar **Marin Mersenne** (1588.–1648.), posebno poznat po tzv. Mersenneovom krugu u kojem su se okupljali i ideje razmjenjivali njegovi suvremenici. Mersenne je komunicirao s mnogim velikim znanstvenicima svoga doba, među ostalim i s Galileom, te je moguće da je upravo Galileo Mersenneu skrenuo pozornost na ovu krivulju. Mersenne je uočio da je razmak između dvije susjedne singularne točke („špice“) cikloide jednak opsegu njene generacijske kružnice. Što se njezina oblika tiče, mislio je da bi se moglo raditi o poluelipsi, što nije neobično promotrimo li sliku 2 [6, 9].

Mersenne je potaknuo i druge matematičare da se pozabave proučavanjem cikloide. Jedan od njih bio je francuski matematičar **Gilles Personne de Robervala** (1602.–1675.), koji je preciziranjem Cavalierijeve metode nedjeljivih veličina (1629.)[2] razvio vlastitu metodu rješavanja problema površine, tj. rani oblik integriranja. Nakon što je 1628. postao članom znamenitog Mersenneovog kruga znanstvenika, počeo se baviti cikloidom. Roberval je tako najkasnije 1634. dokazao da je površina jednog dijela cikloide *točno* tri puta veća od površine kružnice koja ju generira [9, 10, 12].

Robervalova se metoda temelji na Cavalierijevom principu, tada formuliranom u obliku: „Ako su dva područja između paralelnih pravaca takva da ih svaka paralela između siječe u jednako dugim dužinama, onda ta dva područja imaju istu površinu“ [9]. Robervalovo rješenje dobiveno je na sljedeći način. Pogledajmo sliku 3, na kojoj vidimo pola jednog luka cikloide (luk $\hat{AD}$), generacijsku kružnicu (kružnica kroz C i D) i pravac po

[2]Cavalieri je površine tretirao kao sastavljene od paralelnih dužina, dok je Roberval uočio da je korektnije smatrati ih sastavljenim od „tankih“ pravokutnika.



Slika 3. Robervalov dijagram uz rješenje problema površine jednog dijela cikloide ($|EF| = |PQ|$). Slika je generirana programom Graph 4.4.2., `https://www.padowan.dk/`.

kojem se ona kotrlja (pravac AC). Nadalje, vidimo i pola ishodišnog položaja generacijske kružnice (polukružnica AGB). Roberval konstruira „prateću krivulju" cikloide:[3] Za svaku paralelu s AC, ako je $\overline{EF}$ dužina u kojoj ona siječe polukrug $AGBA$ i P sjecište te paralele s cikloidom, neka je Q točka na toj paraleli takva da je $|EF| = |PQ|$; geometrijsko mjesto svih takvih točaka Q je prateća krivulja cikloide (krivulja AQD na slici 3). Prema Cavalierijevom principu, površina polukruga $AGBA$ jednaka je površini dijela $APQA$ između cikloide i njezine prateće krivulje, dakle ona iznosi $\frac{1}{2}r^2\pi$. S druge strane, pogledajmo pravokutnik $ABDC$, kojemu je površina očito $2r \cdot r\pi = 2r^2\pi$. Roberval je uočio da za svaki horizontalni segment u dijelu $ABDQA$ lijevo od prateće krivulje postoji jednako dugi horizontalni segment u dijelu $AQDCA$ desno od prateće krivulje. Stoga su, opet po Cavalijerijevom principu, ta dva dijela jednake površine, koja je onda jednaka polovici površine $2r^2\pi$ pravokutnika $ABDC$. Na kraju, uočimo da je pola površine ispod jednog luka cikloide točno jednako površini od dijela $AQDCA$, tj. $r^2\pi$, uvećanoj za površinu između luka cikloide i prateće krivulje, tj. $\frac{1}{2}r^2\pi$. Dakle, površina jednog dijela cikloide jednaka $3r^2\pi$ [5, 9, 12]. Primijetimo ovdje da iako to doduše znači da se kao i krug cikloida ne može kvadrirati ravnalom i šestarom, može se cirkulirati, tj. ravnalom i šestarom se može konstruirati krug iste površine kao jedan dio cikloide (krug polumjera $r\sqrt{3}$) [6, 9, 12].

[3]Danas je poznato da je to translatirana sinusoida $y = 1 - \cos t = 1 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, no iako su trigonometrijski omjeri bili dobro poznati u njegovo doba, trigonometrijske funkcije kao takve počele su se proučavati tek u 18. stoljeću. Štoviše, u Robervalovo doba još nije bio poznat ni pojam funkcije [2].

Upravo je ovaj problem površine doveo do prve svađe na temu cikloide, a jedan od uzroka te svađe bilo je to što Roberval nije objavio svoj rezultat o površini (kao ni kasniji rezultat o tangenti) cikloide. Smatra se da je razlog Robervalovog izbjegavanja objavljivanja bio taj da je tada bio profesor na pariškom *Collegé Royal*, ali je svake tri godine morao biti reizabran pri otvorenom natječaju, pri čemu je trenutna osoba na toj poziciji bila zadužena za sastavljanje zadataka za taj natječaj. Robervalove metode objavljene su tek posthumno 1693. [9, 12].

U isto doba već spomenuti **Evangelista Torricelli** (1608.–1647.), koji je također razvio svoju metodu za rješavanje problema površine, također je dobio rezultat o površini cikloide i zatim ga objavio 1644. (u djelu *Opera geometrica* u kojem je opisao i Galileov pokušaj i koje je prvi tiskani rad o cikloidi). Roberval je na tu objavu pobjesnio, te je kolegama poslao pismo u kojem Torricellija optužuje za plagijat. Torricelli je umro od tifusa ubrzo nakon što je saznao za tu optužbu, a danas je poznato da su Roberval i Torricelli rezultat o površini jednog dijela cikloide dobili nezavisno jedan od drugog [9, 12].

Slično kao što je rješenje problema površine jednog dijela cikloide važan korak prema utemeljenju integralnog računa, rješenje problema tangente na cikloidu korak je prema utemeljenju diferencijalnog računa. No, Roberval je svoje rješenje poslao Mersenneu, a on je pak zatim izazvao Descartesa i Fermata, o čijem zategnutom odnosu smo pisali u prethodnom nastavku [3], da provjere rezultat, što su i učinili. **René Descartes** (1596.–1650.) je pritom komentirao da je Roberval previše zakomplicirao nešto što je u biti mali rezultat, na što je Roberval reagirao da bi stvar naravno bila lakša da je unaprijed znao koje je točno rješenje [9]. No, sad su sva trojica krenuli tražiti tangentu na cikloidu, što im je svima trima i uspjelo 1638. te su svoja rješenja poslali Mersenneu. I ovo je dovelo do jedne svađe, Descartesa na jednoj strani, koji je Fermatovo rješenje proglasio 'smiješnim blebetanjem', te Robervala i Fermata na drugoj [6, 9, 12]. U svakom slučaju, njihova tri rješenja bila su dobivena potpuno različitim metodama, a glavni uzrok rasprave je bio taj da u to doba još nije postojala suglasnost oko definicije tangente. Descartes je u točki u kojoj traži tangentu konstruirao oskulacijsku kružnicu cikloide, a Roberval je koristio svoju verziju definicije cikloide te zbrajanje brzina kao vektora[4] [5, 12]. Fermatova metoda je bila vrlo komplicirano opisana i iako se u osnovi svodila, kao i Descartesova čisto geometrijska metoda opisana u prethodnom broju [3], na traženje luka oskulacijske kružnice, ona je najočigledniji prethodnik diferencijalnog računa, odnosno najsličnija traženju derivacije u točki eksplicitnim izračunavanjem

[4]Vektori također u to doba još nisu bili poznat matematički koncept, ali se od doba renesanse znalo da se sile i brzine zbrajaju koristeći ono što danas zovemo pravilom paralelograma.

onoga što danas nazivamo limesom. Napomenimo ovdje i da je rješenja problema površine i tangente za cikloidu Mersenne javio Galileu 1638., tad već slijepom, koji je te informacije proslijedio svojim studentima Torricelliju i Vivianiju te su oni našli vlastite načine kako dobiti te rezultate, a Torricelli ih je, kako smo već rekli, i objavio 1644. [5, 12].

Ključni protagonist sljedeće epizode u matematičkoj sapunici o cikloidi bio je veliki francuski matematičar, fizičar i filozof **Blaise Pascal** (1623.–1662.). U doba kad se već potpuno od matematike i fizike okrenuo k teologiji, jedne noći 1658. godine Pascala je budnog držala zubobolja. Tako se sjetio cikloide i počeo razmišljati o pisanju eseja o njoj. Na njegovo iznenađenje, zub ga je prestao boliti. To je shvatio kao božanski znak da se prihvati proučavanja cikloide te je u sljedećih osam dana uspio otkriti sva njezina glavna geometrijska svojstva. Dio svojih rezultata preoblikovao je u nagradni natječaj kojeg je objavio pod pseudonimom Amos Dettonville: prva nagrada bili su 40 španjolskih zlatnika, a druga njih 20 [8, 9, 12]. Za osvojiti nagradu trebalo je riješiti više zadataka o cikloidi, a koji su u suštini zahtijevali određivanje površine i centra mase proizvoljnog segmenta jednog dijela cikloide koji se nalazi iznad pravca po kojem se kotrljala generacijska kružnica, te određivanje volumena i centra mase rotacijskih tijela koja nastaju rotiranjem takvog segmenta oko njegove horizontalnog ruba i oko njegove osi simetrije. Na taj natječaj pristigla su samo dva rješenja. Jedno je dao spomenuti John Wallis, ali je bilo nepotpuno i sadržavalo niz grešaka (Wallis je kasnije te greške ispravio i objavio rad o cikloidi), a drugo od objektivno inferiornijeg matematičara od svih spomenutih, Antoine de Lalouvèrea, koje nije bilo vrijedno spomena. Stoga na natječaju nitko nije osvojio nagradu, a sam Pascal je zatim (i dalje pod pseudonimom) objavio svoja rješenja skupa s kratkom povijesti cikloide *Le Traité de la roulette*[5] (1658.) [6, 9, 10, 12]. Napomenimo ovdje da je za jedan dio cikloide centar mase na poziciji $\left(r\pi, \frac{5}{3}r\right)$, da je volumen rotacijskog tijela dobivenog rotacijom jednog dijela cikloide oko pravca po kojem joj se kotrljala generacijska kružnica je $5r^3\pi^2$, a volumen rotacijskog tijela dobivenog rotacijom jednog dijela cikloide oko njegove osi simetrije je $r^3\pi\left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)$, što sve danas lako pokažemo integriranjem.

Do istog doba smatralo se da je cikloidu nemoguće rektificirati ravnalom i šestarom,[6] tj. da je nemoguće konstruirati dužinu kojoj je duljina jednaka duljini jednog luka cikloide. No, upravo u doba Pascalovog natječaja, dakle 1658., pokazalo se suprotno: Duljina luka cikloide jednaka je osmerostru-

[5] Na francuskom jeziku je u to doba uobičajeni izraz za cikloidu bio *roulette*, a i dan danas ju se povremeno naziva *roulette de Pascal*.

[6] Za kružnicu nakon dokaza transcendentnosti broja π (F. von Lindemann, 1882.) znamo da je rektifikacija kao i kvadratura (ravnalom i šestarom) nemoguća.

kom polumjeru njezine generacijske kružnice. To je otkrio engleski arhitekt, matematičar i fizičar sir **Christopher Wren** (1632.–1723.) i poslao, bez dokaza (iako ga je imao), rezultat Pascalu. Za Pascala to je bila novost, ali je Roberval, kad mu je Pascal pokazao Wrenov rezultat, tada rekao da je on to već dokazao. Wrenov dokaz, uz navođenje Wrena kao autora, objavio je godinu kasnije **John Wallis** u svom *Tractatus duo* u čijem prvom dijelu[7] je opisao sva glavna svojstva cikloide [9, 12]. Tako su s dvije publikacije, Pascalovom francuskom iz 1658. i Wallisovom engleskom iz 1659., postala poznata sva glavna svojstva cikloide: njena površina, konstrukcija tangente, duljina luka, volumeni rotacijskih tijela i njihovi centri masa, a da su pritom svi ti rezultati dobiveni bez diferencijalnog i integralnog računa, koje će utemeljiti Newton i Leibniz u razdoblju 1665.–1675. No, to ne znači da je cikloida izgubila draž za matematičare: U narednim desetljećima zaokupit će ih njezina zanimljiva fizikalna svojstva.

4 Helenine fizičke ljepote

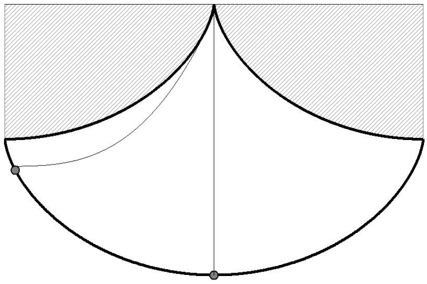
Već sama definicija cikloide sugerira njezinu primjenjivost u fizici. Stoga ne čudi da su se ideje njezine primjene pojavile vrlo brzo, čak i prije nego su dokazani rezultati opisani u prethodnom odjeljku. Tako je primjerice francuski matematičar i inženjer Girard Desargues oko 1630. predložio korištenje zupčanika s cikloidalnim profilom [11].

Nakon što su otkrivene sve „unutarnje ljepote" ove krivulje, u priču o njoj ulazi jedan od najznačajnijih znanstvenika sredine i druge polovice 17. stoljeća, matematičar, fizičar, astronom i izumitelj **Christiaan Huygens** (1629.–1695.). Jedan od njegovih najpoznatijih izuma bio je sat s njihalom. Na tu ideju doveo ga je Mersenne, ali je ubrzo uočio uočio da je Galileova tvrdnja da je period njihala određen samo njegovom duljinom točna isključivo za male oscilacije. Stoga je tijekom 1657. Huygens krenuo konstruirati njihalo čiji period ne ovisi o kutu odmaka od ravnotežnog položaja kako bi ga iskoristio za konstrukciju sata s njihalom [5, 9]. Prvi zadatak kojeg je morao savladati bilo je nalaženje krivulje tautohrone:

Definicija 2. *Tautohrona je ravninska krivulja koja, postavljena u vertikalnoj ravnini, ima sljedeće svojstvo: Vrijeme potrebno materijalnoj točki koja klizi po njoj samo pod utjecajem sile teže da dođe do njezine najniže točke neovisno je o početnoj poziciji materijalne točke.*

Ako bi našao takvu krivulju, Huygens je znao da bi onda „samo" trebao naći način da kraj njihala prati tautohronu, čime bi Galileova tvrdnja o neo-

[7] U drugom dijelu se bavi cisoidom.



Slika 4. Princip Huygensovog sata s njihalom. Slika je generirana programom Graph 4.4.2., `https://www.padowan.dk/`.

visnosti perioda o odmaku od ravnotežnog položaja postala točna. No, u tom trenu još nije bilo očito da takva krivulja stvarno i postoji. Huygensu je pozornost na cikloidu skrenu spomenuti Pascalov natječaj i, ovo zasigurno pogađate, ubrzo je shvatio da je upravo cikloida (izvrnuta „naglavce“) rješenje problema tautohrone. Tada je Huygens zapisao: „Okrio sam njenu [cikloidinu] prikladnost za mjerenje vremena, proučavajući ju po strogim znanstvenim principima i bez da sam naslutio njenu primjenjivost“ [5].

No, sad je ostao problem kako za njihalo podesiti raniju Huygensovu ideju korištenja „obraza“ (šrafirano na slici 4) oko kojih bi se zamatala napeta nit njihala i tako regulirala njezina duljina. Huygens je stoga 1659. krenuo otkriti koje krivulje trebaju činiti rub tih „obraza“ tako da donji kraj njihala ide točno po cikloidi. Modernim jezikom rečeno, tražio je involutu cikloide. Na vlastito čuđenje, otkrio je još jedno neobično svojstvo cikloide: Ona je sama sebi involuta, rubovi „obraza“ trebaju biti polovice osnovnoj cikloidi sukladnih cikloida! Nažalost, u praksi to ipak nije tako dobro funkcioniralo zbog trenja, te je Huygensov konačni sat s njihalom konstruiran drugačije, ali u svom znamenitom djelu o principu sata s njihalom, *Horologium Oscillatorium* (1673.), je Huygens objavio i svoje rezultate o cikloidi [5, 9].

Još dvadesetak godina kasnije, ponovno se pojavio jedan fizikalni problem kojem je rješenje cikloida: problem brahistohrone.

Definicija 3. *Brahistohrona je ravninska krivulja koja za zadane dvije točke u vertikalnoj ravnini, ima sljedeće svojstvo: Vrijeme potrebno materijalnoj točki koja klizi po njoj samo pod utjecajem sile teže da dođe do njezine najniže točke kraće je nego za ikoju drugu krivulju kroz istu početnu i konačnu točku.*

Problem određivanja brahistohrone zadao je 1696. švicarski matematičar

Johann Bernoulli (1667.–1748.), no zapravo ga je razmatrao još Galileo, koji je mislio da je rješenje tog problema luk kružnice. No, ne samo da je Johann već bio riješio taj zadatak prije nego ga je zadao, nego ga je riješio i njegov brat **Jacob Bernoulli** (1655.–1705.) te Leibniz. Sva trojica su se već prije bavili cikloidom, primjerice Leibniz je 1686. objavio jedan oblik njezine jednadžbe. Nakon zadavanja, rješenja su poslali i Newton i l'Hôpital. Svih pet rješenja je bilo točno: Rješenje problema brahistohrone je cikloida. Ipak, u povijesti matematike je kao posebno važna zabilježena usporedba rješenja braće Johanna i Jacoba Bernoullija [2, 5, 9, 12].

Dok je Johannovo rješenje elegantnije, Jacobovo je postalo temelj nove matematičke discipline, varijacijskog računa. Johann je došao na ideju korištenja analogije s lomom svjetlosti i iskoristio Fermatov princip da se svjetlost uvijek širi putem najkraćeg vremena. Koristeći Snelliusov zakon loma svjetlosti Johann je izveo diferencijalnu jednadžbu

$$\mathrm{d}x = \frac{k\sqrt{y}}{\sqrt{1-k^2a^2y}}\mathrm{d}y$$

koju mora zadovoljavati brahistohrona te pokazao da je njezino rješenje cikloida. S druge strane, Jacob je uočio da je problem brahistohrone potpuno novi tip matematičkog problema: Dok se prije za *zadanu* krivulju tražilo točke njezina minimuma i maksimuma među točkama na krivulji, ovdje se među krivuljama traži ona koja ima određeno ekstremalno svojstvo. Konkretno, umjesto da tražimo x za koji je y minimalan ili maksimalan, u problemu brahistohrone tražimo $y = f(x)$ takav da je vrijednost integrala

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\mathrm{d}x$$

minimalna. Stoga je njegovo, bitno kompliciranije od Johannovog, rješenje postalo prvi primjer zadatka varijacijskog računa, a time i prethodnik utemeljenja funkcionalne analize, u kojoj se, pojednostavljeno rečeno, umjesto razmatranja funkcija čije varijable su brojevi ili uređene n-torke brojeva (što proučava matematička analiza) proučavaju funkcije koje ovise o drugim funkcijama (ili čak apstraktnijim objektima) [2].

Za kraj spomenimo da je i ovaj zadnji od velikih momenata u povijesti cikloide obilježen sukobima. S jedne strane, Johann Bernoulli je bio Leibnizov prijatelj i branio ga je u znamenitom sukobu oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa s Newtonom, te je pri samoj objavi problema Johann izrekao i provokaciju Newtonu. No, Newton je riješio i anonimno objavio svoje rješenje, koje je ipak Johann prepoznao kao Newtonovo. Kasnije je Newton komentirao da ne voli da ga izazivaju stranci, Johann je priznao

Newtonov talen, a čini se da je Leibnizu bilo neugodno jer se u cijeloj priči držao po strani. No, puno veća svađa oko rješenja izbila je među braćom Bernoulli, koji su jedan drugog optužili za plagijat, što je na kraju eskaliralo do toga da do Jacobove smrti više nisu međusobno razgovarali [1, 9].

5 Zaključak

Svi znamo da u stvarnom životu ljepotice nerijetko istovremeno fasciniraju i izazivaju svađe — Helena trojanska, najljepša žena svoga doba izazvala je Trojanski rat, tako bar kaže grčka mitologija. Iako se matematika nerijetko čini hladnijom, proračunatijom, racionalnijom, matematičari su (tko bi rekao!) također ljudi, a povijest Helene geometrijske, cikloide, pokazuje da i matematičke ljepote mogu istovremeno fascinirati i izazivati svađe.

Svi veliki momenti povijesti cikloide su u 17. stoljeću, poznatom kao vjerojatno najburnijem stoljeću u povijesti matematike, u kom su djelovali velikani poput Descartesa, Fermata, Pascala, Newtona i Leibniza i u kojem je utemeljena analitička geometrija i infinitezimalni račun. Cikloida je tu svakako odigrala važnu ulogu jer iako bismo mnoge rane rezultate o ciklodi danas uzeli kao lagane zadatke iz deriviranja i integriranja, u doba prije utemeljenja infinitezimalnog računa oni su pokazali genijalnost (a povremeno i sujetu) matematičara koji su se njome bavili i zasigurno bili važan korak prema infinitezimalnom računu, odnosno lijepi rani primjeri primjene istog.

Literatura

[1] Franka Miriam Brückler, *Matematički dvoboji*. Zagreb: Školska knjiga, 2011.

[2] Franka Miriam Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.

[3] Franka Miriam Brückler, *Descartes kontra Fermata, Fermat kontra Descartesa*. Osječki matematički list 23(2) (2023) 161–175.

[4] Florian Cajori, *A History of Mathematics*. New York: Chelsea, 1999.

[5] Simon Gindikin, *Secrets of the Cycloid*. U: *Tales of Mathematicians and Physicists*, str. 93–127. New York: Springer, 2007.

[6] Douglas M. Jesseph, *Descartes, Pascal, and the Epistemology of Mathematics: The Case of the Cycloid*. Perspectives on Science 15(4) (2007) 410–433.

[7] MacTutor Histoy of Mathematics Archives, *Charles de Bouvelles*. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bouvelles/` (pristupljeno 24. listopada 2024.)

[8] MacTutor Histoy of Mathematics Archives, *Cycloid*. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Cycloid/` (pristupljeno 24. listopada 2024.)

[9] John Martin, *The Helen of Geometry*. Coll. Math. J. 41(1) (2010) 17–28.

[10] Tom Roidt, *Cycloids and Paths*. Masters Thesis: Portland State University, 2011. `https://web.pdx.edu/~caughman/CycloidsandPaths.pdf`

[11] Eric W. Weisstein, *Cycloid*. MathWorld–A Wolfram Web Resource. `https://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html` (pristupljeno 29. listopada 2024.)

[12] E. A. Whitman, *Some historical notes on the cycloid*. Amer. Math. Monthly 50 (1943) 309–315.