Osječki matematički list 24 (2024), 115–132

Uvod u rotrice

Robert Ledenčan*

Sažetak

U ovome radu prikazane su i opisane rotrice, novi matematički pojam kojeg uvodi matematičar A.O. Ajibade. Uz tri definirane operacije, razmatrane su razne algebarske strukture rotrica. Osim toga, prikazano je određivanje inverza, potenciranje i korjenovanje rotrica. Na kraju je pokazano određivanje rješenja linearnog sustava rotrica.

Ključne riječi: *rotrica, srce rotrice, algebarske strukture, osnovna svojstva rotrica, linearni sustavi*

Introduction to rhotrices

Abstract

In this paper, rhotrices, a new mathematical concept introduced by mathematician A.O. Ajibade, are presented and described. Various algebraic structures of rhotrices are considered alongside three defined operations. Additionally, determination of inverse, exponentiation, and roots of rhotrices are discussed. Finally, the determination of solutions to systems of linear rhotrices is demonstrated.

Keywords: *rhotrix, heart of rhotrix, algebraic structures, base properties of rhotrices, linear systems*

*Industrijsko-obrtnička škola Virovitica, Ulica Zbora narodne garde 29, 33000 Virovitica, Republika Hrvatska, e-mail: robert.ledencan@skole.hr

1 Uvod - Pojam rotrice

Početkom 2003. godine objavljen je članak matematičara A. O. Ajibadea naziva *The concept of rhotrix in mathematical enrichment* u međunarodnom časopisu *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. U navedenom članku (vidjeti [2]), Ajibade uvodi novi matematički objekt koji je po svojoj veličini između 2×2 i 3×3 matrice, a definira ga kao

$$R = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pri tome, zbog izgleda koji podsjeća na romb i matricu daje naziv **rotrica** (engl. *rhotrix*), a središnji element c naziva **srce** (engl. *heart*) rotrice i označava s $h(R)$. Nakon toga, nad skupom rotrica definira operacije zbrajanja, množenja skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ i produkt rotrica koji se u literaturi naziva **produkt temeljen na srcu** (engl. *heart based product*), a za potrebe ovoga rada će se koristiti naziv **h-produkt**. Ubrzo nakon definiranja rotrica, brojni matematičari započinju s proučavanjem istih, što dovodi do otkrivanja raznih svojstava skupova rotrica i definiranja drugih operacija nad skupovima rotrica. Osim toga, dolazi do generalizacije veličine rotrica (vidjeti [7]), pa tako nastaju rotrice n-tog reda, gdje je n neparan prirodan broj, pri čemu se red rotrice definira kao veličina reda ili stupca rotrice s najvećim brojem elemenata. Iako neki autori definiraju rotrice parnog reda, za potrebe ovog rada će rotrice biti isključivo neparnog reda. Općenito, rotrica n-tog reda se označava s R_n za $n \in 2\mathbb{N} + 1$, pri čemu se jednostavno dolazi da zaključka da je broj elemenata rotrice $|R_n| = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$. Primjerice, rotrica

$$R_5 = \left\langle \begin{array}{ccccc} & & a_1 & & \\ & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \\ & & a_{13} & & \end{array} \right\rangle,$$

za $a_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, 13\}$, je rotrica reda 5 s ukupnim brojem elemenata $|R_5| = \frac{1}{2}(5^2 + 1) = 13$, gdje je element $a_7 = h(R_5)$ srce rotrice R_5. Iako je rotrica po mnogočemu analogija matrice, s obzirom na to da nema standardne retke i stupce, različiti autori na različite načine indeksiraju elemente rotrica. O problemu indeksiranja se više može pročitati u [8]. Treba napomenuti da osim h-produkta rotrica postoji i produkt koji se u literaturi naziva *produkt temeljen na redovima i stupcima* (engl. *row-column based* *product*) koji neće biti razmatran u ovome radu. U nastavku, promotrit će se operacije koje uvodi Ajibade u svom članku, te neke osnovne rezultate teorije rotrica, s naglaskom na rotrice reda 3.

2 Osnovne operacije na skupu rotrica i pripadne algebarske strukture

Prije definiranja osnovnih operacija, potrebno je uvesti oznake za rotrice i skup rotrica. Preuzima se označavanje i indeksiranje rotrica iz [1], a označavanje skupa rotrica nad poljem $\mathbb{R}$ iz [4] na sljedeći način: s $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ označavat će se skup svih rotrica reda 3, čiji su elementi realni brojevi, a s

$$R = \left\langle \begin{matrix} & r_1 & \\ r_2 & h(R) & r_3 \\ & r_4 & \end{matrix} \right\rangle, r_1, r_2, r_3, r_4, h(R) \in \mathbb{R},$$

rotrica iz skupa $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Prema [2], za $A, B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ se uvodi binarna operacija zbrajanja $(+)$, operacija množenja skalarom slijeva $(\cdot)$, operacija množenja skalarom zdesna $(\cdot)$ i binarna operacija h-produkt $(\circ)$, tim redom:

- $+ : \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$
  $$A + B = \left\langle \begin{matrix} & a_1 + b_1 & \\ a_2 + b_2 & h(A) + h(B) & a_3 + b_3 \\ & a_4 + b_4 & \end{matrix} \right\rangle,$$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$
  $$\alpha A = \left\langle \begin{matrix} & \alpha a_1 & \\ \alpha a_2 & \alpha h(A) & \alpha a_3 \\ & \alpha a_4 & \end{matrix} \right\rangle,$$
- $\cdot : \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$
  $$A\alpha = \left\langle \begin{matrix} & a_1\alpha & \\ a_2\alpha & h(A)\alpha & a_3\alpha \\ & a_4\alpha & \end{matrix} \right\rangle,$$
- $\circ : \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$
  $$A \circ B = \left\langle \begin{matrix} & a_1 h(B) + b_1 h(A) & \\ a_2 h(B) + b_2 h(A) & h(A)h(B) & a_3 h(B) + b_3 h(A) \\ & a_4 h(B) + b_4 h(A) & \end{matrix} \right\rangle.$$

Prethodno definirane operacije su komutativne, što slijedi iz komutativnosti zbrajanja i množenja u $\mathbb{R}$. Dakle, vrijedi:

- $A + B = B + A, \quad \forall A, B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R}),$
- $\alpha A = A\alpha, \quad \forall A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R},$
- $A \circ B = B \circ A, \quad \forall A, B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R}).$

Ovako definirane operacije na skupu rotrica daju poznate algebarske strukture, kako slijedi.

Definicija 2.1. *Abelova Grupa* $(G,*)$ *je skup G s operacijom* $*$, *koja zadovoljava pet svojstava:*

1. *(Zatvorenost)* $\forall a, b \in G \implies a * b \in G,$
2. *(Asocijativnost)* $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b \in G,$
3. *(Neutralni element)* $\exists e \in G$ *takav da je* $e * a = a * e = a, \forall a, b, c \in G,$
4. *(Inverzni element)* $\forall a \in G \; \exists a' \in G$ *takav da je* $a * a' = a' * a = e$ *i*
5. *(Komutativnost)* $a * b = b * a, \forall a, b \in G.$

Propozicija 2.1. $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+)$ *je Abelova grupa.*

Dokaz. Zatvorenost skupa $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ na operaciju zbrajanja, kao i asocijativnost te komutativnost zbrajanja slijede iz definicije zbrajanja rotrica i svojstva polja $\mathbb{R}$. Za postojanje neutralnog elementa, potrebno je promotriti $O \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$,

$$O = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Tada je

$$O + A = \left\langle \begin{matrix} & 0 + a_1 & \\ 0 + a_2 & 0 + h(A) & 0 + a_3 \\ & 0 + a_4 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & h(A) & a_3 \\ & a_4 & \end{matrix} \right\rangle = A,$$

$$A + O = \left\langle \begin{matrix} & a_1 + 0 & \\ a_2 + 0 & h(A) + 0 & a_3 + 0 \\ & a_4 + 0 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & h(A) & a_3 \\ & a_4 & \end{matrix} \right\rangle = A.$$

Stoga je $O \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ neutralni element za zbrajanje. Za inverz elementa $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$, neka je $-A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$,

$$-A = \left\langle \begin{matrix} & -a_1 & \\ -a_2 & -h(A) & -a_3 \\ & -a_4 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Tada je

$$A + (-A) = \left\langle \begin{matrix} & a_1 + (-a_1) & \\ a_2 + (-a_2) & h(A) + (-h(A)) & a_3 + (-a_3) \\ & a_4 + (-a_4) & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle,$$

$$-A + A = \left\langle \begin{matrix} & -a_1 + a_1 & \\ -a_2 + a_2 & -h(A) + h(A) & -a_3 + a_3 \\ & -a_4 + a_4 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Stoga svaka rotrica $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ ima inverz $-A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. $\square$

Prije navođenja sljedećeg rezultata, potrebno je spomenuti definiciju polja i vektorskog prostora.

Definicija 2.2. *Ako su na nepraznom skupu $\mathbb{F}$ zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, onda uz svojstva:*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{F}$,
2. $\exists 0 \in \mathbb{F}$ *sa svojstvom* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{F}$,
3. $\forall a \in \mathbb{F}\ \exists -a \in \mathbb{F}$ *tako da je* $a + (-a) = -a + a = 0$,
4. $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{F}$,
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{F}$,
6. $\exists 1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *sa svojstvom* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{F}$,
7. $\forall a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{F}$ *tako da je* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$,
8. $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{F}$,
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{F}$,

uređenu trojku $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ *nazivamo polje.*

Definicija 2.3. *Ako su na nepraznom skupu V zadane dvije operacije, binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarom iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, onda uz svojstva:*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$,
2. $\exists e \in V$ *sa svojstvom* $a + e = e + a = a, \forall a \in V$,
3. $\forall a \in V\ \exists a' \in V$ *tako da je* $a + a' = a' + a = e$,

4. $a+b=b+a, \forall a, b \in V$,

5. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$,

6. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$,

7. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V$ *i*

8. $1a=a, \forall a \in V$,

uređenu trojku $(V,+,\cdot)$ *nazivamo vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

Propozicija 2.2. $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Prema propoziciji 2.1 prva četiri svojstva su zadovoljena, a prema definiciji množenja skalarom, vrijedi i posljednje svojstvo. Preostaje pokazati 5., 6., i 7. svojstvo. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $A, B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Tada je

$$\alpha(\beta A)=\alpha\left\langle \begin{matrix} & \beta a_1 & \\ \beta a_2 & \beta h(A) & \beta a_3 \\ & \beta a_4 & \end{matrix}\right\rangle=\left\langle \begin{matrix} & \alpha\beta a_1 & \\ \alpha\beta a_2 & \alpha\beta h(A) & \alpha\beta a_3 \\ & \alpha\beta a_4 & \end{matrix}\right\rangle,$$

$$(\alpha\beta)A=\left\langle \begin{matrix} & (\alpha\beta)a_1 & \\ (\alpha\beta)a_2 & (\alpha\beta)h(A) & (\alpha\beta)a_3 \\ & (\alpha\beta)a_4 & \end{matrix}\right\rangle=\left\langle \begin{matrix} & \alpha\beta a_1 & \\ \alpha\beta a_2 & \alpha\beta h(A) & \alpha\beta a_3 \\ & \alpha\beta a_4 & \end{matrix}\right\rangle.$$

Prema tome, vrijedi 5. svojstvo. Nadalje,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)A&=\left\langle \begin{matrix} & (\alpha+\beta)a_1 & \\ (\alpha+\beta)a_2 & (\alpha+\beta)h(A) & (\alpha+\beta)a_3 \\ & (\alpha+\beta)a_4 & \end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle \begin{matrix} & \alpha a_1+\beta a_1 & \\ \alpha a_2+\beta a_2 & \alpha h(A)+\beta h(A) & \alpha a_3+\beta a_3 \\ & \alpha a_4+\beta a_4 & \end{matrix}\right\rangle=\alpha A+\beta A.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi i 6. svojstvo. Na kraju,

$$\begin{aligned}\alpha(A+B)&=\left\langle \begin{matrix} & \alpha(a_1+b_1) & \\ \alpha(a_2+b_2) & \alpha(h(A)+h(B)) & \alpha(a_3+b_3) \\ & \alpha(a_4+b4) & \end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle \begin{matrix} & \alpha a_1+\alpha b_1 & \\ \alpha a_2+\alpha b_2 & \alpha h(A)+\alpha h(B) & \alpha a_3+\alpha b_3 \\ & \alpha a_4+\alpha b_4 & \end{matrix}\right\rangle=\alpha A+\alpha B,\end{aligned}$$

pa vrijedi i 7. svojstvo. ∎

Kako je $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, moguće je primijeniti sve rezultate linearne algebre na rotrice. Primjerice, može se pokazati da rotrice $I, J, K, L, M \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ dane sa

$$I = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle, J = \left\langle \begin{matrix} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle, K = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle, L = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle \text{ i}$$

$$M = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \end{matrix} \right\rangle,$$

tvore bazu vektorskog prostora $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$. Definicija baze vektorskog prostora može se pronaći u [5]. Sljedeća dva rezultata vezana su uz h-produkt rotrica.

Definicija 2.4. *Monoid $(G,*)$ je skup G s operacijom $*$, koja zadovoljava tri svojstva:*

1. *(Zatvorenost) $\forall a, b \in G \implies a * b \in G$,*
2. *(Asocijativnost)$(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b \in G$,*
3. *(Neutralni element)$\exists e \in G$ takav da je $e * a = a * e = a$, $\forall a, b, c \in G$.*

Propozicija 2.3. *$(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),\circ)$ je monoid.*

Dokaz. Svojstvo zatvorenosti slijedi iz definicije h-produkta. Neka su dane rotrice $A, B, C \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ i $D = (A \circ B) \circ C$. Tada su elementi rotrice D dani sa

$$\begin{aligned} d_i &= (a_i h(B) + b_i h(A))h(C) + c_i h(A)h(B), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D) &= (h(A)h(B))h(C), \end{aligned}$$

tj. nakon sređivanja desne strane gornjih jednakosti

$$\begin{aligned} d_i &= a_i h(B)h(C) + b_i h(A)h(C) + c_i h(A)h(B), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D) &= h(A)h(B)h(C). \end{aligned}$$

S druge strane, neka je $D' = A \circ (B \circ C)$.Tada su elementi rotrice D' dani sa

$$\begin{aligned} d'_i &= a_i h(B)h(C) + (b_i h(C) + c_i h(B))h(A), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D') &= h(A)(h(B)h(C)), \end{aligned}$$

tj. nakon sređivanja desne strane gornjih jednakosti

$$\begin{aligned} d_i' &= a_i h(B)h(C) + b_i h(C)h(A) + c_i h(B)h(A), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D') &= h(A)h(B)h(C). \end{aligned}$$

Iz komutativnosti množenja elemenata rotrice, izjednačavanjem prethodnih jednakosti slijedi $D = D'$, pa je h-produkt asocijativna operacija. Preostaje pokazati da je rotrica $I \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$, dana sa

$$I = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle,$$

neutralni element. Za $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ slijedi:

$$\begin{aligned} I \circ A &= \left\langle \begin{matrix} & 0 \cdot h(A) + a_1 \cdot 1 & \\ 0 \cdot h(A) + a_2 \cdot 1 & 1 \cdot h(A) & 0 \cdot h(A) + a_3 \cdot 1 \\ & 0 \cdot h(A) + a_4 \cdot 1 & \end{matrix} \right\rangle = A, \\ A \circ I &= \left\langle \begin{matrix} & a_1 \cdot 1 + 0 \cdot h(A) & \\ a_2 \cdot 1 + 0 \cdot h(A) & h(A) \cdot 1 & a_4 \cdot 1 + 0 \cdot h(A) \\ & a_4 \cdot 1 + 0 \cdot h(A) & \end{matrix} \right\rangle = A. \end{aligned}$$

Stoga je $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),\circ)$ monoid. □

Definicija 2.5. *Ako su na nepraznom skupu R zadane operacije zbrajanja i množenja onda uz svojstva:*

1. $(R, +)$ *je Abelova grupa,*
2. $(R, \cdot)$ *je polugrupa (tj. množenje je asocijativno),*
3. $a(b + c) = ab + ac$ *i* $(a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in R$,

uređenu trojku $(R, +, \cdot)$ *nazivamo prsten.*

Propozicija 2.4. $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ)$ *je prsten.*

Dokaz. Prva dva svojstva su direktna posljedica propozicije 2.1 i propozicije 2.3. Preostaje pokazati 3. svojstvo. Neka su dane rotrice $A, B, C \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ i neka je $D = A \circ (B + C)$. Tada su elementi rotrice D dani sa

$$\begin{aligned} d_i &= a_i(h(B) + h(C)) + (b_i + c_i)h(A), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D) &= (h(B) + h(C))h(A), \end{aligned}$$

tj. nakon sređivanja desne strane gornjih jednakosti

$$\begin{aligned} d_i &= (a_i h(B) + b_i h(A)) + (a_i h(C) + c_i h(A)), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D) &= (h(A)h(B)) + (h(A)h(C)). \end{aligned}$$

Tada je $D = A \circ B + A \circ C$. S druge strane, neka je $D' = (A + B) \circ C$.Tada su elementi rotrice D' dani sa

$$\begin{aligned} d'_i &= (a_i + b_i)h(C) + c_i(h(A) + h(B)), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D') &= (h(A) + h(B))h(C), \end{aligned}$$

tj. nakon sređivanja desne strane gornjih jednakosti

$$\begin{aligned} d'_i &= (a_i h(C) + c_i h(A)) + (b_i h(C) + c_i h(B)), i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(D') &= (h(A)h(C)) + (h(B)h(C)). \end{aligned}$$

Tada je $D' = A \circ C + B \circ C$, pa je $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ)$ prsten. □

Štoviše, kako je h-produkt komutativna operacija, a prema propoziciji 2.3 postoji neutralni element, $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ)$ je komutativan prsten s jedinicom. To je ujedno i najbolja algebarska struktura koja je moguća na skupu rotrica. Neka su $R, Q \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ dani sa:

$$R = \left\langle \begin{matrix} & r_1 & \\ r_2 & 0 & r_3 \\ & r_4 & \end{matrix} \right\rangle, Q = \left\langle \begin{matrix} & q_1 & \\ q_2 & 0 & q_3 \\ & q_4 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Tada je

$$R \circ Q = \left\langle \begin{matrix} & r_1 \cdot 0 + q_1 \cdot 0 & \\ r_2 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & r_3 \cdot 0 + q_3 \cdot 0 \\ & r_4 \cdot 0 + q_4 \cdot 0 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Stoga su rotrice R i Q djelitelji nule u prstenu rotrica, pa $(\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ)$ nije ni integralna domena ni polje. Definicije djelitelja nula i integralne domene mogu se pronaći u [3]. Postoji još nekoliko rezultata koji su vezani uz algebarske strukture rotrica, a mogu se pronaći u [4].

3 Inverz, potenciranje i korjenovanje rotrica

Multiplikativni inverz rotrice je definiran kao i multiplikativni inverz kvadratne matrice.

Definicija 3.1. *Neka je $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Kažemo da je $B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ inverzna rotrica rotrice A, ako vrijedi $A \circ B = B \circ A = I$, pri čemu je $I \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ neutralni element za h-produkt. U tom slučaju, kažemo da je rotrica A regularna ili invertibilna rotrica.*

Kako je h-produkt komutativna operacija, dovoljno je razmatrati $A \circ B = I$. Ako je rotrica A invertibilna, a B njezin inverz, tada je

$$
\begin{aligned}
A \circ B &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a_1 \cdot h(B) + b_1 \cdot h(A) & \\ a_2 \cdot h(B) + b_2 \cdot h(A) & h(A)h(B) & a_3 \cdot h(B) + b_3 \cdot h(A) \\ & a_4 \cdot h(B) + b_4 \cdot h(A) & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

O uvjetima invertibilnosti rotrice A i određivanju inverzne rotrice B govori sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.1. *Rotrica $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ je invertibilna ako i samo ako je $h(A) \neq 0$. U tom slučaju, elementi jedinstvene inverzne rotrice B su dani sa:*

$$
\begin{aligned}
h(B) &= \frac{1}{h(A)}, \\
b_i &= \frac{-a_i}{(h(A))^2}, i \in \{1, 2, 3, 4\}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz uvjeta invertibilnosti $A \circ B = I$ slijedi da je $h(A)h(B) = 1$, gdje je $h(A)h(B)$ srce rotrice $A \circ B$. Slijedi da je $h(A) \neq 0$ i $h(B) = \dfrac{1}{h(A)}$.
Iz jednakosti preostalih elemenata slijedi

$$
\begin{aligned}
a_i h(B) + b_i h(A) &= 0, \\
a_i \frac{1}{h(A)} + b_i h(A) &= 0, \\
b_i &= \frac{-a_i}{(h(A))^2},
\end{aligned}
$$

pri čemu je $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Za pokazivanje jedinstvenosti inverza, neka je $C \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ takva da je $A \circ C = I$. Tada je $h(A)h(C) = 1$, pa je

$$
\begin{aligned}
h(C) &= \frac{1}{h(A)}, \\
c_i &= \frac{-a_i}{(h(A))^2},
\end{aligned}
$$

za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Prema tome, $B = C$, pa je inverz rotrice A jedinstven. □

Direktna posljedica prethodne tvrdnje je da niti jedna rotrica $R \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ za koju je $h(R) = 0$, nije invertibilna.

Napomena 3.1. *U nastavku, za inverz B rotrice A koristit ćemo oznaku A^{-1}, pri čemu je $A^{-1} = (A)^{-1}$, a za elemente oznaka a_i^{-1}, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Primjer 3.1. *Neka je dana rotrica*

$$A = \left\langle \begin{matrix} & 27 & \\ 36 & 3 & 9 \\ & 18 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Prema teoremu 3.1, elementi inverzne rotrice A^{-1} jednaki su

$$\begin{aligned} h(A^{-1}) &= \frac{1}{h(A)} = 1/3 \\ a_1^{-1} &= \frac{-a_1}{(h(A))^2} = \frac{-27}{9} = -3, \\ a_2^{-1} &= \frac{-a_2}{(h(A))^2} = \frac{-36}{9} = -4, \\ a_3^{-1} &= \frac{-a_3}{(h(A))^2} = \frac{-9}{9} = -1, \\ a_4^{-1} &= \frac{-a_4}{(h(A))^2} = \frac{-18}{9} = -2. \end{aligned}$$

Stoga je

$$A^{-1} = \left\langle \begin{matrix} & -3 & \\ -4 & 1/3 & -1 \\ & -2 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Analogno kao što je to slučaj kod matrica, uvodi se potenciranje rotrica. Za $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ s A^2 se označava h-produkt $A \circ A$. Općenito, n-ta potencija rotrice A je uzastopan h-produkt n rotrica A, tj. $A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je

$$A = \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & h(A) & a_3 \\ & a_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Tada je

$$A^2 = A \circ A = \left\langle \begin{matrix} & 2a_1 h(A) & \\ 2a_2 h(A) & (h(A))^2 & 2a_3 h(A) \\ & 2a_4 h(A) & \end{matrix} \right\rangle = h(A) \left\langle \begin{matrix} & 2a_1 & \\ 2a_2 & h(A) & 2a_3 \\ & 2a_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Općenito, za A^n vrijedi

$$A^n = (h(A))^{n-1} \left\langle \begin{matrix} & na_1 & \\ na_2 & h(A) & na_3 \\ & na_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Prethodna jednakost vrijedi za sve cjelobrojne potencije invertibilne rotrice A, kako slijedi.

Teorem 3.2. *Neka je $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ invertibilna rotrica. Tada $\forall m \in \mathbb{Z}$ vrijedi:*

$$A^m = (h(A))^{m-1} \left\langle \begin{matrix} & ma_1 & \\ ma_2 & h(A) & ma_3 \\ & ma_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Dokaz. Dokaz se provodi u tri dijela.

1. Za $m \in \mathbb{N}$, dokaz slijedi metodom matematičke indukcije.
   $m = 1$:
   $$A^1 = (h(A))^{1-1} \left\langle \begin{matrix} & 1a_1 & \\ 1a_2 & h(A) & 1a_3 \\ & 1a_4 & \end{matrix} \right\rangle = A.$$
   $m = k$:
   $$A^k = (h(A))^{k-1} \left\langle \begin{matrix} & ka_1 & \\ ka_2 & h(A) & ka_3 \\ & ka_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$
   $m = k + 1$:
   $$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \circ A \\ &= (h(A))^{k-1} \left\langle \begin{matrix} & ka_1h(A) + a_1h(A) & \\ ka_2h(A) + a_2h(A) & (h(A))^2 & ka_3h(A) + a_3h(A) \\ & ka_4h(A) + a_4h(A) & \end{matrix} \right\rangle \\ &= (h(A))^k \left\langle \begin{matrix} & (k+1)a_1 & \\ (k+1)a_2 & h(A) & (k+1)a_3 \\ & (k+1)a_4 & \end{matrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

2. Za $m = 0$ direktno slijedi
   $$\begin{aligned} A^0 &= (h(A))^{0-1} \left\langle \begin{matrix} & 0 \cdot a_1 & \\ 0 \cdot a_2 & h(A) & 0 \cdot a_3 \\ & 0 \cdot a_4 & \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle = I. \end{aligned}$$

3. Neka je $m = -k$, za $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A^m = A^{-k}$, a iz prvog dijela dokaza slijedi

$$A^k = (h(A))^{k-1} \left\langle \begin{matrix} & ka_1 & \\ ka_2 & h(A) & ka_3 \\ & ka_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Prema teoremu 3.1, slijedi

$$\begin{aligned} A^{-k} &= \frac{-1}{(h(A)^k)^2} (h(A))^{k-1} \left\langle \begin{matrix} & ka_1 & \\ ka_2 & -h(A) & ka_3 \\ & ka_4 & \end{matrix} \right\rangle \\ &= (h(A))^{-k-1} \left\langle \begin{matrix} & -ka_1 & \\ -ka_2 & h(A) & -ka_3 \\ & -ka_4 & \end{matrix} \right\rangle \\ &= (h(A))^{m-1} \left\langle \begin{matrix} & ma_1 & \\ ma_2 & h(A) & ma_3 \\ & ma_4 & \end{matrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

□

Primjer 3.2. *Neka je dana rotrica*

$$A = \left\langle \begin{matrix} & 0.5 & \\ 0.5 & 4 & 0.5 \\ & 0.5 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Tada je $h(A) = 4$, pa je kvadrat rotrice A dan sa

$$A^2 = (4)^{2-1} \left\langle \begin{matrix} & 2 \cdot 0.5 & \\ 2 \cdot 0.5 & 4 & 2 \cdot 0.5 \\ & 2 \cdot 0.5 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 4 & \\ 4 & 16 & 4 \\ & 4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

U dokazu teorema 3.2, uvjet invertibilnosti je nužan zbog negativne cjelobrojne potencije. Ako je $h(A) = 0$, onda vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 3.1. *Neka je*

$$O = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Ako je $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$, $A \neq O$, onda je $A^{n+1} = O$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ako i samo ako je $h(A) = 0$.

Dokaz. Neka je

$$A = \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & 0 & a_3 \\ & a_4 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Tada je

$$A^{n+1} = (0)^n \left\langle \begin{matrix} & (n+1)a_1 & \\ (n+1)a_2 & 0 & (n+1)a_3 \\ & (n+1)a_4 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle .$$

Obratno, neka je $A^{n+1} = O$. Tada je

$$A^{n+1} = (h(A))^n \left\langle \begin{matrix} & (n+1)a_1 & \\ (n+1)a_2 & h(A) & (n+1)a_3 \\ & (n+1)a_4 & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \right\rangle ,$$

a to povlači da je $h(A)^{n+1} = 0$, tj. $h(A) = 0$. □

Više svojstava vezanih uz potenciranje rotrice se može pronaći u [6]. Osim potenciranja, definira se i n-ti korijen rotrice i to na sljedeći način.

Definicija 3.2. *Rotrica $A' \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ naziva se n-ti korijen rotrice $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ ukoliko je $(A')^n = A$, za $n \in \mathbb{N}$.*

Umjesto A', n-ti korijen rotrice će se (prema oznakama iz [1]) označavati s $\sqrt[n]{A}$. Ako je $h(A) > 0$, onda se, kao posljedica teorema 3.2, može odrediti $\sqrt[n]{A}$.

Korolar 3.2. *Neka je $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Ako je $h(A) > 0$, onda je rotrica $\sqrt[n]{A}$, za $n \in \mathbb{N}$, dana sa*

$$\sqrt[n]{A} = \left\langle \begin{matrix} & a_1 n^{-1} \sqrt[n]{h(A)}^{1-n} & \\ a_2 n^{-1} \sqrt[n]{h(A)}^{1-n} & \sqrt[n]{h(A)} & a_3 n^{-1} \sqrt[n]{h(A)}^{1-n} \\ & a_4 n^{-1} \sqrt[n]{h(A)}^{1-n} & \end{matrix} \right\rangle .$$

Dokaz. Neka je $B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ tako da je $B^n = A$, za $A \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Tada je $B = \sqrt[n]{A}$. Prema teoremu 3.2, vrijedi:

$$\begin{aligned} B^n &= (h(B))^{n-1} \left\langle \begin{matrix} & nb_1 & \\ nb_2 & h(B) & nb_3 \\ & nb_4 & \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & h(A) & a_3 \\ & a_4 & \end{matrix} \right\rangle = A. \end{aligned}$$

Usporedbom elemenata rotrica A i B dobiva se

$$\begin{aligned} h(A) &= (h(B))^n, \\ a_i &= b_i n (h(B))^n, i \in \{1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

Iz $h(A) = (h(B))^n$, zbog $h(A) > 0$, slijedi da je $h(B) = \sqrt[n]{h(A)}$, pa su preostali elementi rotrice B dani sa

$$b_i = a_i n^{-1} \sqrt[n]{h(A)}^{1-n},$$

za $i \in \{1,2,3,4\}$. $\square$

Primjer 3.3. *Neka je dana rotrica*

$$A = \left\langle \begin{matrix} & 4 & \\ 4 & 16 & 4 \\ & 4 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Tada je $h(A) = 16$, pa je drugi korijen rotrice A dan sa

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \left\langle \begin{matrix} & 4 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt{16}^{1-2} & \\ 4 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt{16}^{1-2} & \sqrt{16} & 4 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt{16}^{1-2} \\ & 4 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt{16}^{1-2} & \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} & 0.5 & \\ 0.5 & 4 & 0.5 \\ & 0.5 & \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ako je srce rotrice $h(A) < 0$, onda se mogu odrediti samo neparni korijeni rotrice A, kao što je to slučaj s elementima skupa $\mathbb{R}$.

4 Linearni sustavi rotrica $A \circ X = B$

Neka su $A, B \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Riješiti sustav $A \circ X = B$ znači odrediti rotricu $X \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ koja zadovoljava prethodnu jednakost. Treba napomenuti da je, zbog komutativnosti h-produkta, $A \circ X = X \circ A = B$. Konstrukcija rješenja sustava $A \circ X = B$ je slična određivanju inverza rotrice. Sljedeća tvrdnja (razmatrana u [1]) govori o nužnim i dovoljnim uvjetima za rješenje navedenog sustava.

Teorem 4.1. *Neka su $A, B, X \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$. Tada sustav $A \circ X = B$:*

1. *ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je* $h(A) \neq 0$ *i* $h(B) \neq 0$,

2. *ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je* $h(A) = 0$, $h(B) = 0$ *i* $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ *takav da je* $B = \lambda A$,

3. *nema rješenja ako i samo ako je* $h(A) = 0$, $h(B) = 0$ *i ne postoji* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takav da je* $B = \lambda A$ *ili* $h(A) = 0$ *i* $h(B) \neq 0$.

Dokaz. Iz $A \circ X = B$, uz standardno označavanje rotrica, izjednačavanjem odgovarajućih elemenata lijeve i desne strane jednakosti, dobivaju se jednadžbe

$$\begin{aligned} a_i h(X) + x_i h(A) &= b_i, i \in \{1,2,3,4\}, \\ h(A)h(X) &= h(B). \end{aligned}$$

Iz jednakosti $h(A)h(X) = h(B)$ slijedi:

1. $h(X)$ je jedinstven ako i samo ako je $h(A) \neq 0$ i $h(B) \neq 0$, pa je

   $$h(X) = \frac{h(B)}{h(A)},$$

   a preostali elementi rotrice X su dani sa

   $$x_i = \frac{b_i h(A) - a_i h(B)}{(h(A))^2}, i \in \{1,2,3,4\}.$$

2. iz jednakosti $a_i h(X) + x_i h(A) = b_i, i \in \{1,2,3,4\}$ je

   $$h(X) = \frac{b_i}{a_i}, i \in \{1,2,3,4\},$$

   pri čemu su $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ proizvoljni u slučaju da je $h(A) = 0$, $h(B) = 0$ i $h(X) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Ako u 2. slučaju ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $h(X) = \lambda$ onda $h(X)$ poprima različite vrijednosti, što nije moguće. Nadalje, u slučaju da je $h(A) = 0$ i $h(B) \neq 0$ ne postoji $h(X)$ takav da je $h(A)h(X) = h(B)$, pa sustav nema rješenja. $\square$

Ilustracija određivanja rješenja sustava $A \circ X = B$ je dana sljedećim primjerom.

Primjer 4.1. *Treba odrediti rješenje sustava $A \circ X = B$ ako su dane rotrice*

$$A = \left\langle \begin{matrix} & 5 & \\ 3 & 4 & 8 \\ & 6 & \end{matrix} \right\rangle, \; B = \left\langle \begin{matrix} & 0 & \\ -1 & 12 & 6 \\ & 7 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{h(B)}{h(A)} = \frac{12}{4} = 3, \\ x_1 &= \frac{0 \cdot 4 - 5 \cdot 12}{4^2} = -3.75, \\ x_2 &= \frac{-1 \cdot 4 - 3 \cdot 12}{4^2} = -2.5, \\ x_3 &= \frac{6 \cdot 4 - 8 \cdot 12}{4^2} = -4.5, \\ x_4 &= \frac{7 \cdot 4 - 6 \cdot 12}{4^2} = -2.75. \end{aligned}$$

Tada je

$$X = \left\langle \begin{matrix} & -3.75 & \\ -2.5 & 3 & -4.5 \\ & -2.75 & \end{matrix} \right\rangle.$$

Na kraju, treba napomenuti kako se sve navedene tvrdnje u ovom radu mogu poopćiti za rotrice n-tog reda, što slijedi iz svojstava definiranih operacija.

5 Zaključak

Rotrice su jedan vrlo zanimljiv matematički pojam, koji je vrlo sličan matricama. S prikazanim operacijama koje je definirao matematičar Ajibade, pokazuje se da rotrice imaju razna svojstva koja daju mogućnost daljnjeg razvijanja nove teorije. Iako je rotrica nov pojam u svijetu matematike, sigurno će u budućnosti pronaći svoje mjesto u primjenama. U svakom slučaju rotrice imaju svoj doprinos u smislu obogaćivanja matematike kao znanosti.

Literatura

[1] A. Aminu, *On the linear systems over rhotrices*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **4**(2009), 7–12.

[2] A. O. Ajibade, *The concept of rhotrix in mathematical enrichment*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **3**4(2003), 175–179.

[3] D. Buntić, *Euklidske domene*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, Diplomski rad, 2024.
URL: `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:677787`

[4] B. Coşgun, E. Çiftlikli, U. Acar, *A Note on Rhotrices Ring*, Journal of New Theory, **2**9(2019), 32–41.

[5] L. Lovrić, *Konačni napeti bazni okviri*, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Diplomski rad, 2020.
URL: `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:802848`

[6] A. Mohammed, *A note on rhotrix exponent rule and its applications to some special series and polynomial equations defined over rhotrices*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **1**(2007), 1–15.

[7] A. Mohammed, A. O. Ajibade, E. E. Absalom, *Generalization of Heart-Oriented Rhotrix Multiplication and its Algorithm Implementation*, International Journal of Computer Applications, **1**3(2011), 5–11.

[8] C. M. Peter, *Row-wise representation of arbitrary rhotrix*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **1**8(2011), 1–27.