Prolegomena 23 (2) 2024: 271-285
doi: https://doi.org/10.26362/20240206

Paradoksi teorije skupova i njihovo prevladavanje: teorija tipova i aksiomatizacija

TIN ADLEŠIĆ
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu,
Trg Marka Marulića 19, 10000 Zagreb, Hrvatska
tadlesic@fkit.unizg.hr

PREGLEDNI RAD – PRIMLJEN: 3/11/2023 PRIHVAĆEN: 6/6/2024

SAŽETAK: U ovom povijesnom prikazu opisujemo dva načina sprječavanja skupovnih paradoksa u ranom 20. stoljeću. Započinjemo s prikazom Russellove teorije tipova, koja kulminira objavom *Principia Mathematica* u kolaboraciji s Whiteheadom. Zatim opisujemo okolnosti nastanka Zermelove aksiomatizacije, koja je i danas glavna aksiomatizacija teorije skupova. Za kraj ukratko navodimo dva druga načina sprječavanja pojave paradoksa: Quineovu teoriju i Bočvarovu metodu trovalentne logike.

KLJUČNE RIJEČI: Russellov paradoks, Burali-Fortijev paradoks, Cantorov paradoks, Teorija tipova, Zermelova aksiomatizacija, Quineova teorija skupova, Trovalentna logika.

1. Uvod

Paradoksi nisu ništa novo za filozofiju, ali isto se ne može reći za matematiku. U drugoj polovici 19. stoljeća javlja se u matematici potreba za većim formalizmom, strožim dokazima i preciznijim definicijama. To je dovelo do otkrića novih područja: matematičke logike (Frege 1879) i teorije skupova (Cantor 1883).[1] Nove discipline pokazuju se izrazito korisnima za precizniji i uspješniji razvoj matematike, ali s vremenom se počinju javljati određene poteškoće u vidu paradoksa.

[1] Danas je teško povući strogu granicu između matematičke logike i teorije skupova, a u kasnom 19. stoljeću to je bilo i teže. Štoviše, većina matematičara je tada teoriju skupova smatrala dijelom logike. Takav je stav kod nekih matematičara prisutan i danas.

Teško je točno odrediti kada su otkriveni prvi skupovni paradoksi. Autori poput Cantora, Hilberta ili Burali-Fortija svakako su bili na tragu, ali ili nisu dobro uočili problem ili nisu smatrali da problem uopće postoji (Ferreiros 2007). Zbog toga paradoksi nisu bili prepoznati u matematičkoj zajednici kao nešto problematično. Prva osoba koja je sustavno proučavala skupovne paradokse bio je Bertrand Russell u svom djelu *Principles of Mathematics* (Russell 2010) iz 1903. godine. Njemu se s pravom mogu pripisati otkrića sva tri glavna skupovna paradoksa (Russellovog, Cantorovog i Burali-Fortijevog) jer ne samo da je pružio detaljnu analizu problema, već je te probleme i posebno naglasio (Russell 2010). Također vrijedi napomenuti da se Cantorov i Burali-Fortijev paradoks prvi puta pojavljuju u tisku upravo u (Russell 2010). Osim toga, Russellovo skretanje pažnje na probleme koje uzrokuju skupovni paradoksi imalo je za posljedicu otkrivanje i mnogih drugih, ponajviše *semantičkih paradoksa*.[2]

Russellov paradoks proizlazi iz pretpostavke postojanja skupa koji sadrži sve one skupove koji ne sadrže sami sebe. U modernoj notaciji, postoji skup $R = \{x \mid \neg(x \in x)\}$. Tada za skup R postoje dvije mogućnosti: ili je element samog sebe ili nije. Ako je R element samog sebe, onda po samoj definiciji R nije element samog sebe. S druge strane, ako R nije element samog sebe, onda on zadovoljava svoj definicijski uvjet pa je element samog sebe. Stoga dobivamo da je R element samog sebe ako i samo ako R nije element samog sebe, što je kontradikcija.

Burali-Fortijev i Cantorov paradoks nije moguće iskazati u tako jednostavnim terminima kao Russellov jer oni ovise o dva strogo matematička pojma. Cantorov paradoks javlja se pretpostavimo li postojanje najvećeg kardinalnog broja, a Burali-Fortijev pretpostavimo li postojanje skupa svih ordinalnih brojeva.[3]

Pojam najvećeg kardinalnog broja nije sam po sebi paradoksalan. Paradoks se pojavljuje tek u kombinaciji s takozvanim *Cantorovim teoremom*. Cantor je u (Cantor 1892) dokazao da za svaki skup A vrijedi da je njegov kardinalni broj strogo manji od kardinalnog broja skupa svih podskupova od A. Simbolički to još možemo zapisati kao $|A| < |P(A)|$, gdje je $<$ dobar uređaj na kardinalnim brojevima. Sada je jasno kako iz

---

[2] Neki od semantičkih paradoksa su Berryev, Richardov i Königov. Russell ih je podrobno analizirao u (Russell 1908).

[3] Neformalno, kardinalni brojevi označavaju broj elemenata nekog skupa, a ordinalni brojevi označavaju poziciju nekog skupa (u ovisnosti o dobrom uređaju na tom skupu) u beskonačnom brojevnom nizu. Za detaljni i formalni prikaz svih pojmova potrebnih za reproduciranje paradoksa upućujemo na (Hrbaček i Jech 1999).

pretpostavke postojanja najvećeg kardinalnog broja i Cantorovog teorema dobiti kontradikciju. Neka je C najveći kardinalni broj. Tada iz Cantorovog teorema dobivamo da je kardinalni broj skupa P(C) strogo veći od C, što je kontradikcija s pretpostavkom da je C najveći kardinalni broj.

Burali-Fortijev paradoks nešto je kompliciraniji od Cantorovog jer su za njegovo izvođenje potrebni određeni pojmovi dobro uređenih skupova. Svaki dobro uređeni skup korespondira s točno jednim ordinalnim brojem, koji nazivamo *ordinalni tip* dobro uređenog skupa. Pretpostavimo da postoji skup svih ordinalnih brojeva B. Ordinalni brojevi mogu se prirodno dobro urediti; označimo taj uređaj s $\prec$. Budući da je skup B dobro uređen s obzirom na $\prec$, njegov ordinalni tip označimo s Ω. No tada je ordinalni tip skupa $\{\alpha \mid \alpha \prec \Omega\}$ (skupa svih ordinalnih brojeva strogo manjih od Ω) strogo manji od Ω. Međutim, može se pokazati da je ordinalni tip od $\{\alpha \mid \alpha \prec \Omega\}$ zapravo jednak ordinalnom broju Ω, iz čega slijedi $\Omega \prec \Omega$, što je kontradikcija.

Problematičnost navedenih paradoksa za matematiku nije odmah jasno uočljiva. Tehnička narav Cantorovog i Burali-Fortijevog paradoksa navodi na pomisao da su paradoksi problem jednog specifičnog, nedovoljno istraženog dijela matematike. Takvo shvaćanje je donekle i ispravno jer su očito potrebna određena ograničenja na pojam klase koji koristi Cantor. Što se tiče Russellovog paradoksa, ni sam Russell nije u početku shvatio njegov značaj. Tek nakon korespondencije s Fregeom (Russell 1902, Frege 1902), koji uočava da Russellov paradoks ima za posljedicu inkonzistentnost njegova vlastitog sustava, Russell postaje svjestan ozbiljnosti situacije. Naime, Fregeov logički sustav u skladu je s tradicionalnim poimanjem logike; stoga općelogička narav Russellovog paradoksa dovodi u pitanje samo ljudsko poimanje logike.

Od tada postaje jasno da se nešto u vezi paradoksa mora napraviti. Iako je Russellov paradoks uzrokovao najviše problema, adekvatno rješenje mora također spriječiti pojave Cantorovog i Burali-Fortijevog paradoksa jer, iako su dio matematičke teorije, neraskidivo su vezani uz logičku teoriju klasa. Reakcija je zatim krenula u tri smjera. Prvim smjerom krenuo je Frege smatrajući da se Russellov paradoks ne može otkloniti, time efektivno odustajući od svog programa svođenja matematike na logiku (Frege 1924/1925). Drugim smjerom krenuo je Russell koji smatra da je logici potrebna potpuna reformulacija i reorganizacija (Russell 1908). U planu ima rješavanje problema uzrokovanih ne samo skupovnim paradoksima, već i općenitim paradoksima. Treći smjer izabrali su Hilbert i Zermelo, koji teoriju skupova vide kao neophodnu za adekvatno utemeljenje matematike, ali odvajajući je od matematičke logike (Hilbert 1904). Zakoni logike moraju usmjeravati razvoj teorije skupova, koja zatim služi kao temelj matematike. Ukratko, zalažu se za “paralelni razvoj” tih teorija.

2. Teorija tipova

Prvi prikaz teorije tipova iznio je Russell u *Dodatku B* svog djela *Principles of Mathematics* (Russell 2010). U njemu posebno naglašava da prezentirana teorija predstavlja samo skicu te da su potrebne određene nadopune i poboljšanja. *Tip* je definiran kao “klasa svih objekata u kojoj svaki element ima jednak doseg značajnosti”, a doseg značajnosti nekog objekta kao kolekcija svih onih objekata za koje dana propozicija ima smisla, tj. može biti istinita ili neistinita. Drugim riječima, dva objekta imaju jednak tip ako “tvore” iste smislene propozicije. Russell razlikuje četiri vrste objekata u svojoj teoriji: individualne objekte, uređene parove, propozicije i brojeve. Svaki od tih objekata tvori najmanji mogući tip, stoga imamo tip individualnih objekata, tip uređenih parova, tip propozicija i tip brojeva. Iz početnih tipova moguće je razviti četiri paralelne hijerarhije tipova. Primjerice, počevši od tipa individualnih objekata, možemo dobiti tip klasa individualnih objekata, zatim tip klasa klasa individualnih objekata itd. Kada se sve to uzme u obzir, očita postaje kompleksnost Russellove rane teorije. Opća hijerarhija tipova nije linearna, već više nalikuje razgranatom stablu. Osim same kompleksnosti, problematična je i definicija tipa kao klase jer time Russell dozvoljava postojanje “totaliteta svih logičkih objekata”, odnosno tipa svih tipova, što dovodi do novih paradoksa.

Russell uskoro napušta prvotnu ideju teorije te u radu “On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types” (Russell 1907) ponovno analizira tri glavna matematička paradoksa. Postojanje određenih problematičnih klasa dovodi do paradoksa, što znači da je potrebno formulirati teoriju koja na neki način zabranjuje postojanje tih problematičnih klasa. Drugim riječima, potrebno je postaviti određena ograničenja na propozicijske funkcije i uvjete pod kojima one definiraju klase. U tu svrhu Russell je ponudio tri nove teorije: *zigzag teoriju*, *teoriju ograničenja veličine* i *ne-klasnu teoriju*. U *zigzag teoriji* propozicijska funkcija definira klasu samo ako je (u nekom smislu) jednostavna, *teorija ograničenja veličine* ograničava postojanje “prevelikih” klasa, a u *ne-klasnoj teoriji* suzdržavamo se od tvrdnje da klase postoje. Najviše nade Russell polaže upravo u *ne-klasnu teoriju* te naknadno dodaje napomenu kako “nema ni malo sumnje da ne-klasna teorija pruža potpuno rješenje svih poteškoća iznesenih u prvom dijelu članka." Russell se teoriji tipova ponovno vraća u radu "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" (Russell 1908), a veliki dio ideja tog rada završit će u *Principia Mathematica*.

Principia Mathematica

Principia Mathematica (Whitehead, Russell 1910, 1912, 1913) rezultat je kolaboracije između Alfreda Northa Whiteheada i Bertranda Russella, objavljena u tri dijela 1910., 1912. i 1913. godine. Glavni cilj *Principia* je razviti logički sistem sa što manjim brojem osnovnih pojmova i aksioma te pomoću njih izvesti cjelokupnu matematiku. Osnovni pojmovi i aksiomi u tom kontekstu moraju biti logičke prirode; stoga je *Principia* zapravo pokušaj da se pokaže kako su matematičke istine zapravo logičke istine.

Ontologija *Principia* sastoji se od individualnih objekata i propozicijskih funkcija. Iako je klasama posvećeno cijelo jedno poglavlje, Whitehead i Russell se suzdržavaju od postuliranja njihova postojanja.[4] Teorija tipova direktno je preuzeta iz (Russell 1908) te je poboljšana verzija teorije prezentirane u *Dodatku B* (Russell 2010). Tipovi se dodjeljuju individualnim objektima i propozicijskim funkcijama. Svaki individualni objekt ima tip 0, a propozicijska funkcija ima tip $n + 1$, ako sve njezine slobodne varijable imaju tip n. Tip klase je zapravo tip propozicijske funkcije koja definira tu klasu. Osim ograničenja na slobodne varijable u vidu tipova, Whitehead i Russell također svrstavaju propozicijske funkcije u redove, odnosno uvode ograničenja na vezane varijable. Individualni objekti su reda 0, propozicijske funkcije koje sadrže samo individualne objekte (kao varijable) su prvog reda, a reda $n + 1$ su ako sadrže barem jednu varijablu reda najviše n. Takvu teoriju tipova nazivamo *ramificirana teorija tipova* kako bismo ju razlikovali od *jednostavne teorije tipova*, u kojoj ne postoji hijerarhija redova. Uvođenje hijerarhije redova nije najspretnije odrađeno i vrlo je nejasna veza s hijerarhijom tipova. Ono što se može zaključiti je da red propozicijske funkcije nikada nije manji od njezinog tipa.

Razloge za uvođenje hijerarhije redova Russell je izložio već u (Russell 1908). Došao je do zaključka da uzrok svih paradoksa treba tražiti u samoreferenciranju, a samoreferenciranje se može spriječiti uvođenjem *principa poročne cirkularnosti*: "ni jedan totalitet ne može sadržavati objekte definirane pomoću njega samog" (Russell 1908). Upravo ramificirana

[4] Stav je preuzet iz Russellove ne-klasne teorije.

teorija tipova iz *Principia* zadovoljava navedeni princip. Nažalost, vrlo brzo se pokazuje kako ramificirana teorija tipova nije dovoljna za adekvatni razvoj matematike. U njoj nije moguće definirati neke osnovne pojmove matematičke analize (poput supremuma), a nije moguća ni zadovoljavajuća formulacija matematičke indukcije. Zbog toga se uvodi *aksiom reducibilnosti*: "Svaka propozicijska funkcija ekvivalentna je nekoj predikativnoj propozicijskoj funkciji s istim argumentima" (Russell 1908). Propozicijska funkcija je predikativna ako je njen red točno za jedan veći od najvećeg reda neke njene varijable, odnosno ako je ona najmanjeg mogućeg reda s obzirom na njene varijable.

Uvođenjem aksioma reducibilnosti autori su gotovo u potpunosti negirali prethodno izgrađenu hijerarhiju redova. Ramificirana teorija tipova s aksiomom reducibilnosti nije ništa drugo nego jednostavna teorija tipova. Kao motivaciju za uvođenje tog aksioma autori navode induktivne razloge, odnosno opravdavaju ga time da se "mnogo propozicija koje su gotovo nesumnjivo istinite mogu iz njega izvesti". (Whitehead, Russell 1910) Navode da takva motivacija nije ništa drugačija od uvođenja bilo kojeg drugog aksioma. Međutim, takvo opravdanje teško je uskladiti s ciljevima *Principia*. Naime, aksiom reducibilnosti nije ni malo intuitivan, sasvim sigurno nije logički aksiom, a upitna je i njegova istinitost. Iako je pomoću njega moguće uvesti neke nužne nove pojmove, zbog navedenih problema autori odustaju od tog aksioma u drugom izdanju *Principia*.

Osim aksioma reducibilnosti, autori još uvode *aksiom multiplikativnosti* i *aksiom beskonačnosti*. Aksiom multiplikativnosti kaže da je Kartezijev produkt nepraznih klasa neprazan,[5] a aksiom beskonačnosti da je skup individualnih objekata beskonačan. Iako su po prirodi ti aksiomi dosta različiti, motivacija za njihovo uvođenje i korištenje je gotovo identična. Oba aksioma koriste se samo kada su potrebni u dokazu nekog teorema i to u obliku kondicionala "ako vrijedi aksiom, onda vrijedi teorem". Drugim riječima, ti aksiomi nisu ništa više do hipoteza. Vrlo je teško opravdati njihovo uvođenje, a još teže objasniti zašto bi trebali biti istiniti. Problematičniji je aksiom beskonačnosti jer je nužan za razvoj aritmetike prirodnih brojeva. U većini slučajeva možemo odbaciti aksiom multiplikativnosti kao pretpostavku, a onda posljedično i teoreme koji o njemu ovise bez težih posljedica, ali isto nije moguće napraviti s aksiomom beskonačnosti.

[5] Aksiom multiplikativnosti ekvivalentan je aksiomu izbora koji kaže da se iz familije nepraznih u paru disjunktnih klasa može dobiti klasa koja sadrži točno jedan element iz svake klase familije.

Zaključak

Principia Mathematica nesumnjivo je jedan od najvažnijih i najambicioznijih radova iz područja matematičke logike. Djelo je značajno utjecalo na mnoge tadašnje i buduće logičare poput Hilberta, Quinea i Tarskog. S pravom se može tvrditi kako je to djelo označilo i oblikovalo matematičko razmišljanje u prvoj polovici 20. stoljeća.

Ipak, kao što smo već spomenuli, djelu ne nedostaje problema. Jedan od njih svakako je suprotnost između motivacije samog projekta i načina njegova izvođenja, posebice kod uvođenja određenih aksioma. Veliki izvor problema također čini nerazlikovanje sintakse i semantike. Kao posljedicu toga, autori tretiraju sve paradokse unutar same teorije. Zato teorija mora nužno zadovoljavati princip poročne cirkularnosti, što znači da je potrebna ramificirana teorija tipova. Budući da ramificirana teorija tipova nije dovoljno jaka za izvođenje cjelokupne matematike, potrebno je "urušavanje" hijerarhije redova, odnosno uvođenje nelogičkog aksioma reducibilnosti. Ukratko, možemo zaključiti da je nerazlikovanje sintakse i semantike jedan od najvećih problema Whitehead-Russellove teorije. Naime, Ramsey je uočio da se razlikovanjem sintakse i semantike (doduše u vrlo rudimentarnom obliku) može formulirati verzija jednostavne teorije tipova koja sprječava glavne skupovne paradokse, a općenitiji paradoksi su onda onemogućeni razlikom između simbola i njihovog značenja (Ramsey 1926). Tako se dobiva teorija tipova koja izbjegava uvođenje principa poročne cirkularnosti, hijerarhije redova, a posljedično i aksioma reducibilnosti.[6] Međutim, i dalje ostaje prisutan problem aksioma beskonačnosti jer nije moguće razviti adekvatnu teoriju tipova koja opisuje cjelokupnu matematiku bez tog aksioma.

Na kraju, čini se da *Principia* ipak nije uspjela ostvariti glavni Russellov cilj: utemeljiti cjelokupnu matematiku na logičkim principima. To je uspjela samo uvjetno, pod pretpostavkom nelogičkih aksioma (izbora i beskonačnosti) i potpuno neintuitivnog aksioma reducibilnosti.

3. Aksiomatizacija teorije skupova

Paralelno s razvojem teorije tipova odvija se razvoj teorije skupova u drugom smjeru. Centralna figura tog razvoja je njemački matematičar Ernst Zermelo. Zermelo svoju znanstvenu karijeru započinje na Sveuči-

[6] Strogo gledano Ramseyjeva teorija tipova ne izbjegava upotrebu redova propozicijskih funkcija, ali ju je moguće preformulirati u ekvivalentnu teoriju koja ih izbjegava.

lištu u Göttingenu 1897. godine kao teorijski fizičar, a Cantorovu teoriju skupova počinje proučavati tri godine kasnije pod utjecajem Hilberta. Zermelo je već oko 1900. naišao na Russellov paradoks, ali nije ga smatrao problematičnim. Stoga se postavlja pitanje je li Zermelo bio svjestan da je zaista otkrio nešto paradoksalno ili ne. On svoja saznanja nije objavio, već je paradoks ostao skriven u njegovim nastavnim materijalima o teoriji skupova (Ferreiros 2007).

Prvi važan Zermelov doprinos teoriji skupova je dokaz teorema o dobrom uređaju, koji će kasnije postati poznat pod njegovim imenom: svaki skup može se dobro urediti. Zermelo je teorem dokazao u radu "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann" (Zermelo 1904) koristeći se aksiomom izbora. To je prva eksplicitna pojava tog aksioma u matematici, a njegovo korištenje isprva nije dočekano s odobravanjem. Upravo je aksiom izbora razlog zašto Zermelov dokaz nije pozitivno prihvaćen u matematičkoj zajednici. Nepovjerenje u Cantorovu teoriju skupova, prividno nova pretpostavka te strah od novih paradoksa zasigurno nisu bile povoljne okolnosti za prihvaćanje novih hipoteza. Kako bi opravdao svoj dokaz, Zermelo nastoji zadati odgovarajući aksiomatski sustav pomoću kojeg bi mogao izvesti Cantorovu teoriju skupova i svoj teorem. Svoj sustav želi dodatno osnažiti činjenicom da se u njemu ne pojavljuju paradoksi, iako sprječavanje paradoksa gotovo sigurno nije bila glavna motivacija uvođenja aksiomatizacije (Moore 1978). U početku se Zermelo pod utjecajem Hilberta bavi proučavanjem isključivo Cantorove teorije skupova, no 1905. godine otkriva Dedekindove radove o teoriji skupova (Ferreiros 2007). Dva rada u kojima će se uvelike ogledati Dedekindov utjecaj na Zermela su "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung" (Zermelo 1908) i "Untersuchung über die Grundlagen der Mengelehre I" (Zermelo 1908a), oba objavljena 1908. godine.

Rad "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung" sastoji se od dva dijela. U prvom dijelu Zermelo prezentira novi dokaz teorema o dobrom uređaju. U novom dokazu ponovno se koristi aksiomom izbora, no sada s manje pretpostavki na pojmove dobrog uređaja i ordinalnih brojeva te se koristi Dedekindovim pojmom lanca. Tako prezentirani dokaz nešto je općenitiji od prvog, a korištenje Dedekindovih precizno definiranih pojmova za posljedicu ima formalniji dokaz. U drugom dijelu Zermelo se bavi primjedbama iznesenima protiv njegova prvog dokaza te uspješno odgovara na upućene kritike. Iako je Zermelo kritike uspješno otklonio, za prihvaćanje aksioma izbora trebalo je proći još neko vrijeme. Međutim, postajalo je sve jasnije da mnogo važnih matematičkih teorema ovisi o njemu.

Aksiomatski sustav

Zermelo je svoj aksiomatski sustav predstavio u (Zermelo 1908a). Vrlo jasno na samom početku naglašava da je za njega teorija skupova matematička teorija koja za cilj ima "matematički istražiti osnovne pojmove 'broja', 'uređaja' i 'funkcije'", a onda pomoću njih razviti ostalu matematiku. Očito se Zermelov pristup značajno razlikuje od Russellovog koji teoriju skupova smatra dijelom sveobuhvatne opće logičke teorije. Također se razlikuju u pristupu prema klasnoj komprehenziji. Russell želi očuvati neograničenu komprehenziju (svaka klasa je definirana nekim svojstvom) kako god je moguće, a Zermelo smatra da bi ju trebalo primjenjivati ograničeno. Zermelo polazi od postojeće Cantorove teorije skupova, a aksiomima ju nastoji što je moguće bolje opisati i sačuvati, a da pri tome onemogući pojavljivanje paradoksa. Glavni cilj aksiomatizacije je stoga pokazati da se "cjelokupna teorija stvorena od strane Cantora i Dedekinda može svesti na nekoliko definicija i sedam principa, ili aksioma, koji su međusobno nezavisni."

Zermelo kolekciju objekata kojom se bavi teorija skupova naziva "domenom individualnih objekata", a ona se sastoji od skupova i atoma. Zadatak aksioma je na odgovarajući način opisati tu domenu. Navodimo sedam Zermelovih aksioma, uz ponešto moderniziranu terminologiju:

I. *Aksiom ekstenzionalnosti*: dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.
II. *Aksiom praznog skupa*: postoji skup koji nema elemenata.
III. *Aksiom separacije:* ako je $F(x)$ definitna propozicijska funkcija za sve elemente skupa M, onda postoji M_F, podskup od M koji sadrži sve elemente iz M za koje je F istinito.
IV. *Aksiom partitivnog skupa*: za svaki skup T postoji skup UT koji se naziva partitivnim skupom od T i sadrži sve podskupove od T.
V. *Aksiom unije*: za svaki skup T postoji skup CT koji se naziva unijom od T i sadrži one elemente koji se nalaze u nekom elementu od T.
VI. *Aksiom izbora*: ako je T skup nepraznih skupova koji su međusobno disjunktni, onda njihova unija sadrži barem jedan podskup S_1 koji ima točno jedan zajednički element sa svakim elementom od T.
VII *Aksiom beskonačnosti*: postoji skup Z koji sadrži prazan skup i ako sadrži a, onda sadrži $a \cup \{a\}$.

U prvom dijelu rada Zermelo pomoću do tada uvedenih aksioma dokazuje odgovarajuće tvrdnje teorije skupova, a u drugom dijelu razvija cijelu teoriju ekvivalencije skupova, odnosno teoriju kardinalnosti. Međutim, zbog nedostatka uređenih parova ne može definirati na zadovoljavajući način pojmove preslikavanja i kardinalnog broja. Od pojma kardinalnog broja u potpunosti odustaje i koristi se općenitim skupovima, ali dokazuje neke važne teoreme poput Schröder-Bernsteinovog i Cantorovog.

Na kraju uvoda Zermelo napominje da ima u planu objaviti nastavak rada u kojem bi pomoću svojih aksioma razvio teoriju dobro uređenih skupova s primjenom na konačne skupove i aritmetiku. Međutim, idući rad objavljen 1909. godine ne spominje dobro uređene skupove, već samo dio o konačnim skupovima i aritmetici.

Prihvaćanje Zermelove aksiomatizacije

Većina aksioma prihvaćena je od strane matematičke zajednice gotovo odmah kao neproblematična. Potencijalno problematični aksiomi bili su aksiom izbora, aksiom beskonačnosti i aksiom separacije. Već smo spomenuli da se Zermelo na zadovoljavajući način obračunao s kritikama na račun aksioma izbora. Aksiom beskonačnosti svoje opravdanje nalazi u činjenici da se bez njega ne može razviti zadovoljavajuća aritmetika. Ovdje vrijedi naglasiti da iako je Zermelov aksiom beskonačnosti epistemološki jednak Russellovom, ontološki se oni uvelike razlikuju. Zermelo aksiom beskonačnosti uvodi u strogo matematičkom kontekstu, kao dio formalne matematičke teorije, što je svakako opravdano. S druge strane, Russell aksiom beskonačnosti uvodi u svijet općih logičkih principa, a tamo mu sasvim sigurno nije mjesto. Kod aksioma separacije jedino pitanje je može li ga se koristiti bez bojazni od pojave paradoksa. Zermelo pokazuje da je to istina jer se pomoću aksioma separacije objekti "separiraju" iz već postojećih skupova pa nije moguće definirati problematične skupove poput skupa svih skupova, skupa svih ordinalnih brojeva i skupa svih kardinalnih brojeva.

U izvjesnom smislu je Zermelova aksiomatizacija slična Russellovoj teoriji ograničenja veličine, no nije joj istovjetna, što se često pogrešno tumači. Skupovni paradoksi se onemogućuju separacijom, a ostali paradoksi nekom vrstom rudimentarne distinkcije između sintakse i semantike, koja se pojavljuje u pojmu definitnosti propozicijske funkcije. Definicija definitnosti je pomalo nejasna. Svojstvo je definitno ako "[relacija 'biti element'], zajedno s aksiomima i univerzalnim zakonima logike, određuje bez proizvoljnosti vrijedi li [neko svojstvo] ili ne". Glavna nepreciznost je u tome što nije rečeno što su to "univerzalni zakoni logike" koji stoje u pozadini definicije. Ipak, definitnost se lako može razumjeti bez velikih poteškoća. Propozicijska funkcija je definitna ako ju je moguće izraziti u logičkom jeziku, zajedno s dvomjesnim relacijskim simbolom "biti element". Kasniji autori će pojam definitnosti puno preciznije i bolje objasniti.

Zermelo je teoriji skupova aksiomatizacijom u duhu Hilbertove škole podario snažne, iako skromnije temelje od Whitehead-Russellovih. Njegov sustav nije u početku naširoko korišten, ali već će se od 1920.-ih godina početi smatrati standardnim, dok ne postane (u nešto izmijenjenom obliku) dominantna aksiomatizacija teorije skupova. Iako na trenutke izgleda proizvoljna, što je na neki način i istina, aksiomatizacija je rezultat duboke i detaljne analize Cantorovog i Dedekindovog matematičkog djelovanja. Njome je, zajedno s dokazom teorema dobrog uređaja, postignuto jedinstvo teorije ordinalnih i kardinalnih brojeva, odnosno teorije skupova.

4. Quineova teorija skupova i Bočvarova trovalentna logika

Iako je Zermelova teorija zaokruženija i bez značajnih prigovora, većina matematičke zajednice prednost je ipak u početku dala teoriji iz *Principia*. Privlačnost te teorije je u njenoj velikoj preciznosti i strogim dokazima, što se smatralo sigurnijom opcijom za utemeljenje matematike. Međutim, tada ona više nije imala za zadaću reformulirati cjelokupnu logiku, već samo poslužiti kao odgovarajući okvir za daljnji razvoj, slično kako je Hilbert zamislio svoj "paralelni razvoj". U to vrijeme, dok je Zermelova teorija dobivala sve više sljedbenika i polako počela preuzimati primat nad sustavom *Principia*, pojavila su se dva nova načina prevladavanja paradoksa. Jedan je način usko povezan s Whitehead—Russellovom teorijom, a drugi motivaciju crpi iz Russellove ideje reformulacije logike.

Quineova teorija

Quine je svoju teoriju "Novi temelji" ("New Foundations") prvi puta prezentirao u (Quine 1937), iako se ona već nazire u njegovoj doktorskoj disertaciji nekoliko godina ranije. "Novi temelji" mogu se smatrati srednjim putom između teorije *Principia* i Zermelove aksiomatizacije. Iako ju Quine nije originalno zamislio kao teoriju skupova, ona će s vremenom to postati. Quineova glavna ideja je da se ne odbacuje neograničena komprehenzija, ali da se na formule prvog reda koje u njoj sudjeluju nametnu određena sintaksna ograničenja. Ta ograničenja nazivaju se *uvjeti stratificiranosti*. Formula je *stratificirana* (zadovoljava uvjete stratificiranosti) ako je njenim varijablama moguće dodijeliti tipove tako da ona postane valjana formula teorije tipova. Tako su tipovi premješteni u metateoriju, što omogućuje formuliranje Quineove teorije u logici prvog reda. Primjerice, formule $x = x$ i $x \in y \wedge y \in z$ su stratificirane, a formula $x \in x$ nije.

Teorija "Novi temelji" opisana je *aksiomom ekstenzionalnosti* i *shemom aksioma stratificirane komprehenzije*. Aksiom ekstenzionalnosti kaže da su dva skupa jednaka ako sadrže jednake elemente i ne razlikuje se od prvog Zermelovog aksioma. Simbolički: $\forall x \forall y \forall z((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$. Aksiom stratificirane komprehenzije kaže da za svaku stratificiranu formulu φ postoji skup svih onih elemenata koji ju zadovoljavaju, odnosno postoji skup $\{x \mid \varphi(x)\}$. Ukratko, stratificirana komprehenzija osigurava postojanje skupova u teoriji, a ekstenzionalnost osigurava njihovu jedinstvenost.

Iz aksioma stratificirane komprehenzije jednostavno slijedi da u Quineovoj teoriji postoji *univerzalni skup*. Naime, već je spomenuto da je formula $x = x$ stratificirana; stoga, po aksiomu stratificirane komprehenzije, postoji skup $V = \{ x \mid x = x\}$. Uz univerzalni, postoje još mnogi "veliki" skupovi, od kojih vrijedi istaknuti skup svih ordinalnih i skup svih kardinalnih brojeva. Skupovni paradoksi izbjegavaju se na sličan način kao u *Principia*, no sada više nije potreban princip poročne cirkularnosti, već su dovoljni uvjeti stratificiranosti. Naime, Russellov paradoks ne može se reproducirati u Quineovoj teoriji jer nije moguće dokazati postojanje problematičnog skupa R, s obzirom na to da formula $x \in x$, a onda i $\neg(x \in x)$, nije stratificirana. Cantorov i Burali-Fortijev paradoks sprječavaju se tako što se općenita primjenjivost odgovarajućih teorema koji sudjeluju u njihovom generiranju ograničava uvjetima stratificiranosti. Primjerice, Cantorov teorem ne vrijedi u Quineovoj teoriji u punoj općenitosti; ne može se dokazati $\mid V \mid < \mid P(V) \mid$.

Quineova teorija vrlo je brzo potpala pod sjenu poboljšane Zermelove teorije, za što postoji nekoliko razloga. Prvi je razlog taj što je teško služiti se teorijom koja se zasniva na komprehenziji sa sintaksnim ograničenjima. Naime, skup u Quineovoj teoriji postoji jedino ako ga je moguće definirati stratificiranom formulom.[7] Zbog toga se u svakom, i najmanjem koraku razvoja teorije, mora dokazivati da su odgovarajuće formule stratificirane. Iako je adekvatnim pristupom moguće za svaku

[7] Ponekad se postojanje nekog skupa može dokazati neposredno, na druge načine, ali to je više iznimka nego pravilo.

formulu odrediti je li ona stratificirana ili nije, takav postupak često ometa istraživanje svojstava same teorije. Drugi je razlog taj što je Specker u (Specker 1953) pokazao da u Quineovoj teoriji ne vrijedi aksiom izbora. Iako iz toga slijedi da u Quineovoj teoriji vrijedi aksiom beskonačnosti, nedostatak aksioma izbora problematičan je ako se teorijom želimo koristiti kao temeljnom teorijom matematike.

Često se i kao treći razlog navodi nedostatak dokaza konzistentnosti Quineove teorije. Nije sasvim jasno zašto bi to bio problem jer ne postoji ni dokaz konzistentnosti Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Unatoč problemima, Quineova teorija i dalje je aktivni predmet istraživanja.

Bočvarova trovalentna logika

Bočvar problemu paradoksa pristupa potpuno drugačije i nadasve inovativno. Umjesto ograničenja na propozicije koje definiraju skupove ili uvođenja određenih aksioma, Bočvar odbacuje klasičnu logiku. Propozicije u klasičnoj logici imaju samo dvije istinosne vrijednosti: istinu i laž, a Bočvarova logika u igru uvodi i treću vrijednost koju on naziva "besmisleno". Dakle, propozicije mogu biti istinite, lažne ili besmislene. Originalni rad Bočvar je objavio 1937. godine na ruskom jeziku i trebalo je čekati preko četrdeset godina za prijevod na engleski jezik (Bochvar i Bergman 1980). U radu se postepeno razvija trovalentna logika prvo za logiku sudova, a zatim za logiku prvog reda. Russellov paradoks lako se rješava zbog njegove općenitosti tako što se pokazuje da je propozicija koja generira paradoks besmislena. Nažalost, Bočvar svoju metodu nije proširio na kardinalne i ordinalne brojeve, a još i danas ostaje otvoreno pitanje može li se to uopće napraviti.

5. Zaključak

Kriza koju su prouzrokovali paradoksi izravno je odgovorna za brzi razvoj matematičke logike i otkrića dva velika matematičko-logička sustava. Teorija tipova i Zermelova aksiomatika naizgled isti problem rješavaju na različite načine, ali između njih postoji mnogo sličnosti. Nije stoga iznenađujuće da se daljnji razvoj tih dviju teorija odlikuje njihovim međusobnim zbližavanjem; aksiomatizacija teorije skupova preuzela je mnoge značajke teorije tipova i obrnuto. Ipak je teško objasniti zašto je Zermelova aksiomatizacija dosegla takav dominantni status. Međutim, teorija tipova i dalje je ostala prisutna u matematici, ponajviše u računarstvu, ali u proširenom i izmijenjenom izdanju. Moderne teorije tipova poput homotopske teorije tipova (*homotopy type theory*) direktan su nasljednik Whitehead-Russellove teorije.

I ostale teorije, nastale direktno zbog problema paradoksa ili jednostavno kao varijante prethodna dva sustava, pronašle su svoje mjesto u matematici. Već smo spomenuli da se Quineova teorija nastavlja razvijati i danas. Nadalje, Bočvarov pristup trovalentne logike jedan je od prethodnika modernih viševrijednosnih logika. Iako Bočvarov način sprječavanja paradoksa nije previše zaokupio pažnju matematičke javnosti, čini se da dublje proučavanje i proširivanje Bočvarovog pristupa ima veliki znanstveni potencijal.

Paradoksi ne predstavljaju danas toliki problem matematici i matematičkoj logici. Iako nisu više glavna motivacija za proučavanje logičkih sustava, ne smije se smetnuti s uma njihova velika važnost za matematiku, matematičku logiku i filozofiju matematike.

Literatura

Bochvar, D. A. i M. Bergman. 1980. “On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus”, *History and Philosophy of Logic*, *2*, 87–112

Cantor, G. 1883. “Foundation of a general theory of manifolds: a mathematico-philosophical investigation into the theory of infinite”, u W. Ewald (ur.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics, Volume II* (Oxford: Oxford University Press), 878–920.

Cantor, G. 1892. “Über eine elementare Frage der Mannigfalitgkeitslehre”, u E. Zermelo (ur.), *Gesammelte Abhandlugen* (Hildesheim / Zürich / New York: Georg Olms Hildesheim), 278–281.

Ferreiros, J. 2007. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics* (Basel: Birkhäuser Verlag AG)

Frege, G. 1879. “Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought”, u J. van Heijenoort (ur.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 1–82.

Frege, G. 1902. “Letter to Russell”, u J. van Heijenoort (ur.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 126–128.

Frege, G. 1924/5. “Sources of Knowledge of Mathematics and the mathematical natural Sciences”, u H. Hermes, F. Kambartel i F. Kaulbach (ur.), *Gottlob Frege: Posthumous Writings* (Oxford: Basil Blackwell), 267–275.

Hilbert, D. 1904. "On the foundation of logic and arithmetic", u J. van Heijenoort (ur.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 129–138.

Hrbaček, K i T. Jech. 1999. *Introduction to Set Theory* (London: Taylor & Francis).

Moore, G. 1978. "The origins of Zermelo's axiomatization of set theory", *Journal of Philosophical Logic*, 7(1), 307–329

Quine, W. V. 1937. "New fondations for mathematical logic", *The American Mathematical Monthly*, 44(2), 70–80.

Ramsey, F. 1926. "The foundations of mathematics", *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-25(1), 338–384.

Russell, B. 1902. "Letter to Frege", u J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 124–125.

Russell, B. 1907. "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-4(1), 29–53.

Russell, B. 1908. "Mathematical logic as based on the theory of types", *American Journal of Mathematics*, 30(3), 222–262.

Russell, B. 1910, 1912, 1913. *Principia Mathematica* (Cambridge: Cambridge University Press).

Russell, B. 2010. *Principles of Mathematics* (London: Routledge).

Specker, E. 1953. "The axiom of choice in Quine's new foundations for mathematical logic", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(2), 972–975.

Zermelo, E. 1904. "Proof that every set can be well-ordered", u J. van Heijenoort (ur.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 139–141.

Zermelo, E. 1908. "A new proof of the possibility of a well-ordering", u J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 183–198.

Zermelo, E. 1908a. "Investigation in the foundation of set theory I", u J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 199–215.