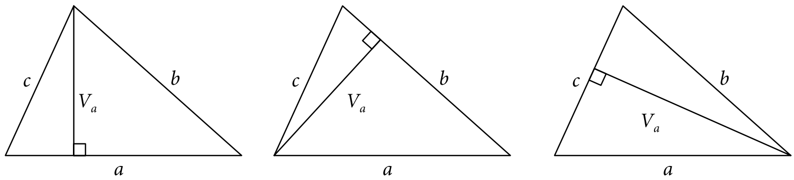
PRIMJENA POVRŠINE TROKUTA U DOKAZIMA

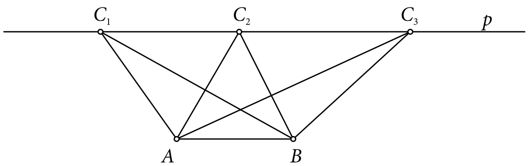
Veselko Čotić, Radoboj

Poznato vam je da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine jedne stranice i duljine visine na tu stranicu. Koristeći tu činjenicu, dokažimo nekoliko tvrdnji.

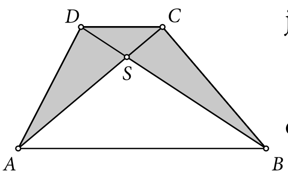


$$p=\frac{a\cdot v_a}{2} \qquad p=\frac{b\cdot v_b}{2} \qquad p=\frac{c\cdot v_c}{2}$$

Primjer 1. Pravac p na slici usporedan je s dužinom $\overline{AB}$. Što možemo reći o površinama trokuta ΔABC_1, ΔABC_2 i ΔABC_3?



Rješenje: Trokuti ΔABC_1, ΔABC_2 i ΔABC_3 imaju zajedničku stranicu $\overline{AB}$ i jednake duljine visina pa su im i površine jednake.

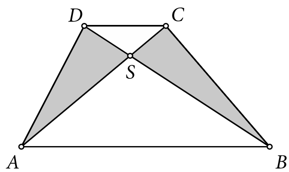


Primjer 2. U trapezu $ABCD$ nacrtane su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Dokažimo da su površine trokuta ΔACD i ΔBCD jednake.

Rješenje: Trokuti ΔACD i ΔBCD imaju zajedničku stranicu $\overline{CD}$ i jednake duljine visina, pa je $p_{\Delta ACD}=p_{\Delta BCD}$.

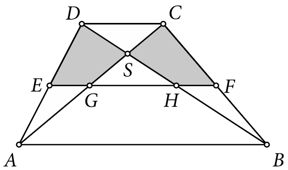
Primjer 3. U trapezu $ABCD$ dijagonale se sijeku u toči S. Dokažimo da su površine trokuta ΔASD i ΔBCS jednake.

Rješenje: Površine trokuta ΔACD i ΔBCD jednake su jer im je stranica $\overline{CD}$ zajednička, a duljine visina su im jednake. Trokut ΔACD sastavljen je od trokuta ΔASD i ΔSCD, a trokut ΔBCD sastavljen je od trokuta ΔBSC i ΔSCD.



Kako je $p_{\Delta ASD}+p_{\Delta SCD}=p_{\Delta BCS}+p_{\Delta SCD}$, slijedi da je $p_{\Delta ASD}=p_{\Delta BCS}$.

Primjer 4. U trapezu $ABCD$ nacrtane su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ i srednjica $\overline{EF}$. Dijagonale trapeza sijeku se u točki S, a sjecišta srednjice i dijagonala su točke G i H. Dokažimo da su površine četverokuta $EGSD$ i $HFCS$ jednake.



Rješenje: Uz oznake kao na slici vrijedi

$$p_{EGSD} = p_{\Delta ASD} - p_{\Delta AGE},\ p_{HFCS} = p_{\Delta BCS} - p_{\Delta HBF},$$

pri čemu je (prema prošlom primjeru) $p_{\Delta ASD} = p_{\Delta BCS} = p_1$.

Budući da je dužina $\overline{EG}$ srednjica trokuta ΔACD, vrijedi da je $|EG| = \frac{1}{2}|CD|$. Isto tako, dužina $\overline{HF}$ srednjica je trokuta ΔBCD, pa vrijedi da je $|HF| = \frac{1}{2}|CD|$. Zato je $|EG| = |HF|$. Trokuti ΔAGE i ΔHBF imaju jednake duljine stranica i jednake duljine visina na te stranice, pa onda i jednake površine. Označimo $p_{\Delta AGE} = p_{\Delta HBF} = p_2$.

Iz navedenog zaključujemo da je

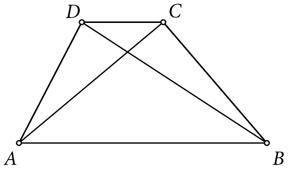
$$p_{EGSD} = p_1 - p_2 \text{ i } p_{HFCS} = p_1 - p_2,$$

tj. $p_{EGSD} = p_{HFCS}$, što je i trebalo dokazati.

Zadatci:

1. U trokutu ABC označite polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom P i Q. Dokažite da su površine trokuta ΔABP i ΔABQ jednake.

2. Na slici je trapez $ABCD$ s dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Dokažite da trokuti ABD i ABC imaju jednake površine.



Literatura:

1. Palman, Dominik, Planimetrija, Element, Zagreb, 1999.
2. Pauše, Željko, Matematički priručnik 1, Školska knjiga, Zagreb, 2003.