

ŠVARCVALDSKI PROBLEM<sup>1</sup>

Marta Cifrek, Zagreb

Esmeralda je uoči svog 14. rođendana odlučila organizirati rođendansku proslavu za prijatelje iz razreda. Za proslavu je odlučila napraviti Švarcvald tortu pa je majku zamolila za recept. Recept glasi ovako:

## ŠVARCVALD TORTA (za kalup promjera 26 cm)

## BISKVIT

- |   |   |
|---|---|
| 5 žumanjaka                               | - zatim dodati                              |
| 150 g kristal šećera                      | 1 prašak za pecivo                          |
| 5 žlica mlake vode                        | 50 g kakao praha                            |
| 1 vanilin šećer                           | 80 g oštrog brašna                          |
| - sastojke umiješati i u tu smjesu dodati | 40 g gustina                                |
| 60 g rastopljenog maslaca                 | - na kraju umiješati snijeg od 5 bjelanjaka |



Tako će se dobiti jedan biskvit koji se pomoću zubnog konca „prereže” na tri jednaka dijela.

## SMJESA OD VIŠANJA

- 1 staklenka višanja (odvojiti sok i višnje)
- u šalicu za čaj staviti veliku (jušnu) žlicu gustina i pomiješati s dijelom soka od višanja (da se ne stvore grudice)
  - preostali sok uliti u posudu za kuhanje, dodati komadić cimetine kore i ostaviti da zakuha
  - kad zakuha, dodati smjesu gustina i soka, smanjiti vatru i miješati dok se ne zgusne pa dodati višnje
  - ostaviti da se ohladi

Izraditi šlag od 700 ml slatkog vrhnja (uz dodatak Šlagfixa i šećera u prahu po želji).

<sup>1</sup>Članak je napisan kao studentski rad u kolegiju Metodika nastave matematike 3 na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, mentorice prof. dr. sc. Aleksandra Čizmešija i Sanja Stilinović, prof.



Esmeralda će na zabavi imati puno prijatelja pa je odlučila napraviti veću tortu. Uzela je kalup za tortu promjera 30 cm i zaključila da dio sastojaka za biskvit treba povećati kako biskvit ne bi bio pretanak. S obzirom na to da je kalup koji je ona izabrala 4 cm većeg promjera, zaključila je kako je to povećanje od  $\frac{4}{26} \approx 0.15384615 \approx 0.15 = 15\%$ . Zato je neke sastojke za biskvit odlučila povećati za otprilike 15%.

Njezin prilagođeni recept za biskvit izgleda ovako:

6 žumanjaka	1 prašak za pecivo
170 g kristal šećera	55 g kakao praha
6 žlica mlake vode	90 g oštrog brašna
1 vanilin šećer	45 g gustina
70 g rastopljenog maslaca	snijeg od 6 bjelanjaka



Ispekla je biskvit i iznenadila se jer je biskvit bio pretanak da bi ga koncem razdvojila na tri biskvita (jednake debljine) kako bi dobila tri „razine” torte.

Nazvala je prijatelja Nedjeljka i opisala mu što se dogodilo. Tražila je pomoć i objašnjenje gdje je pogriješila. Radijus većeg kalupa otprilike je 15% veći pa je i količinu sastojaka povećala za otprilike 15%. Pritom je količine zaokruživala kako bi joj bilo lakše mjeriti pa je, primjerice, umjesto 172.5 g kristal šećera, zaokružila je na 170 g kristal šećera. Pomislila je kako je u tome problem, ali Nedjeljko misli drugačije. On smatra da zaokruživanje na nekoliko grama veću ili manju količinu nije razlog neuspjehu, već da je problem u tome što je količine povećavala za samo 15%.

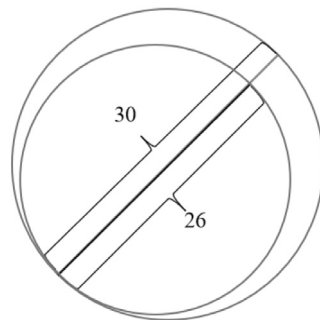
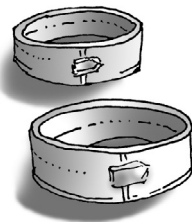
Skicirao je njezinu situaciju kako bi joj bolje objasnio u čemu je pogriješila.

Uvećanje promjera kalupa od 4 cm ne znači povećanje cijele površine kalupa za istu veličinu. Prisjetimo se kako računamo površinu kruga radijusa (polumjera)  $r$ :

$$p = r^2 \pi.$$

Izračunajmo površinu kalupa promjera 26 cm i kalupa promjera 30 cm.

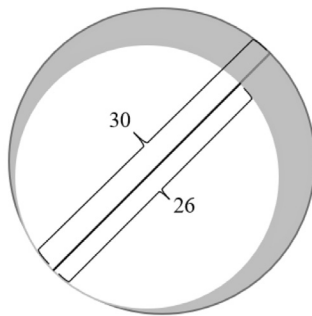
Kalup promjera 26 cm je radijusa 13 cm. Njegova je površina  $p_1 = 13^2 \pi = 169 \pi \text{ cm}^2$ . Kalup promjera 30 cm radijusa je 15 cm. Njegova je površina  $p_2 = 15^2 \pi = 225 \pi \text{ cm}^2$ .



Slika 1.



Dakle, povećanje promjera s 26 cm na 30 cm (odnosno radijusa s 13 cm na 15 cm) znači povećanje površine za  $225\pi - 169\pi = 56\pi \text{ cm}^2$ , tj. postotak povećanja je  $\frac{56\pi}{169\pi} = \frac{56}{169} \approx 0.3314 \approx 33 \%$ .



Slika 2.

Dakle, umjesto povećanja od otprilike 15 % Esmeralda je sastojke trebala povećati za otprilike 33 %.



1. Znajući postotak povećanja, prilagodite napisani recept za biskvit koji će se peći u kalupu promjera 30 cm.
2. Što ako je kalup koji imamo kod kuće 4 cm manjeg promjera (dakle promjera 22 cm)? Hoće li tada smanjenje količine sastojaka biti otprilike 33 %? Uvjerite se računom!
3. Torta se može peći i u kalupu kvadratnog oblika. Izračunajte postotak povećanja/smanjenja u slučaju korištenja kalupa kvadratnog oblika duljine stranice 24 cm.
4. Esmeralda je umjesto 5 jaja (koliko je potrebno po originalnom receptu) u hladnjaku imala samo 4 jaja. Trgovina je bila zatvorena pa nije mogla kupiti još jaja. Koju bi dimenziju okruglog kalupa, a koju kvadratnog trebala izabrati ako želi ispeći tortu sa samo 4 jaja?



## Rješena zadatka

- Sastojci za biskvit u kalupu promjera 30 cm:
  - 7 zumanjaka (ne možemo dodati 6,65 zumanjaka pa zaokružujemo na 7)
  - 200 g kristal šećera (199,5 možemo zaokružiti na 200 jer ne možemo odvagati pola grama)
  - 7 žlica mlake vode (zaokružujemo 6,65)
  - 1,33 vanilin šećer (nakon jednog cijelog paketića iz drugoga otprike presipamo malo manje od pola paketića)
  - 80 g rastopljenog maslaca
  - 1,33 praška za pecivo (nakon jednog cijelog paketića iz drugoga otprike presipamo malo manje od pola paketića)
  - 67 g kakao praha
  - 106 g oštrog brašna
  - 53 g gustina
  - na kraju umiješati smjegu od 7 bjelanjaka
- Ako kalup smanjimo za 4 cm (tj. pečemo u kalupu promjera 22 cm), tortu zapravo pečemo u kalupu površine  $p = 121\pi$  cm<sup>2</sup>. To znači da je kalup smanjen za  $169\pi - 121\pi = 48\pi$  cm<sup>2</sup>. To odgovara postotku smanjenja od  $\frac{48\pi}{169\pi} = \frac{48}{169} \approx 0,2840 \approx 28,4\%$ .
- Ako tortu pečemo u kalupu kvadratnog oblika sa stranicom dužine 24 cm, njegova je površina  $p = 24^2 = 576$  cm<sup>2</sup>. Površina početnog kalupa je  $p_1 = 13^2\pi = 169\pi \approx 531$  cm<sup>2</sup>. Površina kvadratnog kalupa je za približno  $576 - 531 = 45$  cm<sup>2</sup> veća od površine kružnog kalupa, što znači da je potrebno povećanje količine sastojaka od  $\frac{45}{169\pi} \approx 0,084757 \approx 8,5\%$ .
- Ako koristi samo 4 jajca, to je za 1 jajce manje nego što je potrebno prema original-nom receptu. U pitanju je smanjenje od 20%. To znači da i nove površine okruglog i kvadratnog kalupa moraju biti 20% manje od početnog kalupa. Drugim riječima, površine novih kalupa moraju biti jednake  $(100\% - 20\%) \cdot 169\pi = 80\% \cdot 169\pi = 135,2\pi$  cm<sup>2</sup>.  
 Ako Esmeralda želi peći tortu u kalupu okruglog oblika, mora vrtjeti da je  $r^2\pi = 135,2\pi$  (gdje je  $r$ , radijus tog kalupa), odnosno,  $r^2 = 135,2$  (kad obje strane jed-nadzbe podijelimo brojem  $\pi$ ). Konacno zaključujemo da je  $r = \sqrt{135,2} \approx 11,6$  cm. Ukoliko je odlučila tortu peći u kalupu kvadratnog oblika, onda mora vrtjeti da je  $a^2 = 135,2\pi$  (gdje je  $a$  dužina stranice kalupa kvadratnog oblika). To znači da je  $a = \sqrt{135,2\pi} \approx 20,6$  cm.

