

MATEMATIČKO PUTOVANJE – HRVATSKE RIJEKE¹

Marko Knezović, Pula

Rijeke, zemljini najveći prirodni vodotoci, jedne su od mnogih hrvatskih prirodnih ljepota. Tijekom povijesti rijeke su imale neopisivo važnu ulogu. Prve civilizacije i gradovi nastajali su upravo uz rijeke jer one su izvor pitke vode, hrane, služe za navodnjavanje površina za agrokulturu, izvor su materijala za gradnju, mogu poslužiti za kupanje, prijevoz ljudi, robe, a često su i prirodne granice među državama. Važnost rijeka u suvremeno doba nije posustala. Zbog svoje ljepote postale su turistička atrakcija, bilo za umirujuću šetnju uz njihov tok, rekreativni ribolov ili za ugodnu plovidbu splavima i drugim čamcima. U doba kada su alternativni izvori energije od velike važnosti, mnoge države na rijekama izgrađuju hidroelektrane.

Hrvatske rijeke nisu iznimka svim navedenim ulogama. Republika Hrvatska ima čak 45 rijeka, od kojih su 32 dulje od 50 kilometara. Najdulja je rijeka Sava koja sa svojih 562 km prolazi kroz Hrvatsku, a najkraća je Ombla sjeveroistočno od Dubrovnika, čija je duljina jedva 30 metara. U sljedećoj su tablici navedena imena 10 najduljih rijeka u Hrvatskoj, duljine njihova toka kroz Hrvatsku i njihova ukupna duljina:

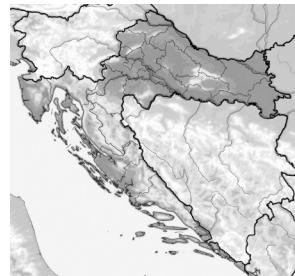
	Rijeka	Duljina u Hrvatskoj (km)	Ukupna duljina (km)
1.	Sava	562	945
2.	Drava	305	749
3.	Kupa	296	296
4.	Dunav	188	2860
5.	Bosut	151	186
6.	Korana	134	134
7.	Bednja	133	133
8.	Lonja-Trebež	133	133
9.	Česma	124	124
10.	Una	120	212

Tablica 1. Popis hrvatskih rijeka

Navedimo neke zanimljivosti o najduljim hrvatskim rijekama – Savi, Dravu, Kupi i Dunavu.

Sava je najdulja rijeka u Hrvatskoj. Jedna je od rijetkih dugačkih rijeka koje se ne ulijevaju u more, već se ulijeva u još veću rijeku, Dunav. Upravo zato što se ulijeva u Dunav, Sava pripada crnomorskom slijevu. Protjeće kroz čak četiri države: Sloveniju, Bosnu i Hercegovinu, Srbiju i, naravno, Hrvatsku.

¹Članak je napisan kao studentski rad u kolegiju Metodika nastave matematike 3 na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, mentorice prof. dr. sc. Aleksandru Čižmešiju i Sanju Stilinović, prof.





Protjeće i kroz tri glavna grada: Ljubljani, Zagreb i Beograd. No, takvu rijeku treba nekako prijeći! Savu premošćuje čak 85 mostova (66 cestovnih, 11 željezničkih i 8 pješačkih). Broj mostova opada što se više udaljavamo od izvora, a najveći broj mostova preko Save izgrađen je upravo tamo gdje je najpotrebnije, u glavnim gradovima.



Slika 1. Most na Savi u Beogradu

Zadatak 1. a) Odredite broj mostova u glavnim gradovima ako se 72 % mostova ne nalazi u njima. Rješenje zaokružite na cijeli broj.

b) Trećina mostova nalazi se u Beogradu, a 29 % u Ljubljani. Koliko se mostova nalazi u Zagrebu?

Površina savskog porječja iznosi $96\ 328\ km^2$, a u njemu živi više od 8 milijuna ljudi. Sava predstavlja kratku granicu između Slovenije i Hrvatske, veliku između Hrvatske i Bosne i Hercegovine te malim dijelom razgraničava Bosnu i Hercegovinu od Srbije. Iako nije plovna kroz sam Zagreb, velikim brodom možete putovati od Siska do ušća u Dunav (sveukupno 593 km). Zbog hidroelektrana koje se nalaze na njoj, Sava ima velik potencijal postati najvažniji izvor električne energije za sjeverozapadnu Hrvatsku i južnu Sloveniju.

Svake godine u prvom danu mjeseca lipnja sve države slijeva Save obilježavaju Dan rijeke Save.

Zadatak 2. Rješenje (a , b , c) sustava jednadžbi $\begin{cases} 4a + b = 8 \\ b - 2c = -14 \\ a - c = -5 \end{cases}$ znamenke

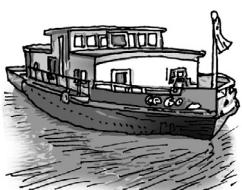
su broja \overline{abbc} čija vrijednost predstavlja godinu službenog proglašenja Dana rijeke Save u Zagrebu.

Savski je slijev jedan od najraznolikijih i najbolje očuvanih riječnih sustava u Europi. Upravo zato što je rijeka Sava toliko očuvana, njen slijev bogat je raznolikim krajolicima i bioraznolikostima. Naša najveća rijeka ima veliku ekološku vrijednost, gospodarski i turistički potencijal, stoga je trebamo čuvati.



Drava je druga najdulja rijeka u Hrvatskoj. Izvire u talijanskim planinama (južni Tirol), teče kroz Austriju, Sloveniju, Hrvatsku i Mađarsku (predstavljajući prirodnu granicu između Mađarske i Hrvatske) te se konačno ulijeva u Dunav.

Zadatak 3. Duljina rijeke Drave kroz Austriju iznosi 261 km, Sloveniju 144 km, a ostatak duljine pripada Italiji i Mađarskoj. Postotkom izrazite udjele duljine toka rijeke Drave u pojedinoj državi te ih prikažite kružnim dijagrame.



Plovidba rijekom moguća je 250 do 260 dana godišnje, a zaledena je 15 do 35 dana godišnje. Glavno joj je pristanište u Osijeku, pri čemu lukom prometuju i brodovi i tegljači.

Zadatak 4. Drava nije plovna na 88 % svoje ukupne duljine. Odredite koliko je metara Drava plovna.

Pijesak i šljunak iz Drave koriste se kao građevinski materijal, a u davnim vremenima ljudi su u njenom pijesku tražili zlatne čestice. Kako je jedna od najočuvanijih rijeka Europe, bogata je florom i faunom. U vodi ima čak 70 vrsta riba, u njezinim naplavnim šumama gnijezde se ptice, a dom u njima nalaze jeleni, srne i divlje svinje. Na ušću Drave u Dunav nalazi se i poznati park prirode Kopački rit. Drava također ima energetsko značenje, s čak 22 hidroelektrane u Austriji, Sloveniji i Hrvatskoj.



HE Fala prva je hidroelektrana izgrađena na Dravi još 1913. godine, a godine 2008. odlukom Vlade Republike Slovenije proglašena je kulturnim spomenikom. Izvorno očuvan dio elektrane danas je muzej, a zbog originalne opreme i suvremenih eksperimenta koji prikazuju pretvaranje energije zanimljiv je osobama razne dobi.

Kupa je treća najdulja rijeka u Hrvatskoj i prva kojoj je i izvor i ušće u Hrvatskoj. Izvor rijeke nalazi se u Nacionalnom parku Risnjak, a ulijeva se u Savu. Izvor Kupe je u obliku jezerca predivne plavo-zelene boje koje je od 1963. godine zaštićen kao spomenik prirode.

Zadatak 5. Zamislimo izvor Kupe kao kružni oblik površine $2500 \pi \text{ m}^2$. Odredite koliko iznosi najmanja duljina staze oko izvora.

Iako je u izvoru brza, nakon nekoliko kilometara smiruje se, pa su tijekom povijesti na mirnom dijelu rijeke radili umjetne slapove koji su služili za pokretanje mlinova i pilana. Za razliku od naših ranije spomenutih rijeka, Kupa je više orijentirana na sport i rekreaciju. Do izvora Kupe postoje dva šetališta koja su dostupna u svako godišnje doma. Staza Razloge – Izvor Kupe duga je 1820 m,





a staza Hrvatsko – Izvor Kupe iznosi 4850 m, no trenutačno je zatvorena zbog pješačkog mosta koji je razrušila bujična poplava. Rijeka Kupa pogodna je za vožnju kanuom i kajakom, a u ljetnim mjesecima i za kupanje, s mnogim uređenim kupalištima. Kako je bogata ribom, vrlo je pogodna i za sportski ribolov.

Kupa je, zbog raznolikosti i brojnosti leptira, poznata i pod imenom „čudesna dolina leptira”.

Zadatak 6. Rješenje jednadžbe $730 + 3\left(\frac{7}{3}x - 10\right) = 5\left(\frac{8}{5}x + 40\right)$ označava broj vrsta leptira u okolini rijeke Kupe.

Dunav je četvrta najdulja rijeka u Hrvatskoj, ujedno druga najdulja i vodom najbogatija rijeka u Europi. Od Dunava je dulja samo rijeka Volga u Rusiji. Naziv potječe od latinskog izvora „Danubius”, što je ime rimskog riječnog boga. Protjeće kroz čak deset europskih država: Njemačku, Austriju, Slovačku, Mađarsku, Hrvatsku, Srbiju, Bugarsku, Rumunjsku, Moldaviju i Ukrajinu.

Zadatak 7. Vrijednost izraza:

$$2^3 \cdot 10^5 + 10^4 + (2^3 - 1) \cdot 10^3$$

jednaka je površini porječja Dunava u kvadratnim kilometrima. Površina hrvatskog dijela porječja Dunava iznosi oko $35\ 000\ km^2$. Odredite koliko površine porječja Dunava ne pripada Hrvatskoj.

Cijelu povijest Dunav se koristio kao međunarodni plovni put sa svojih impresivnih 2415 km plovnosti. Važan je izvor hidroenergije pa je čak 5 zemalja koristi za hidroelektrane. Na Dunavu se ujedno nalazi druga najveća hidroelektrična centrala u Europi, HE Đerdap. Uz hidroenergiju, dunavska voda koristi se za hlađenje tri nuklearne elektrane. Dana 29. lipnja 1994. godine potpisana je međunarodna Konvencija o zaštiti rijeke Dunav (u kojoj je jedna od potpisnica bila i Hrvatska), te se taj datum obilježava kao Međunarodni dan Dunava.



Slika 2. Torta Val Dunava

Njemačka slastica *Donauwelle* nazvana je po Dunavu, a prijevod njezina imena je *Val Dunava*. Torta se izrađuje od slojeva običnog i čokoladnog biskvita tako da između imaju valovitu granicu. Sadrži višnje, a prekrivena je kremom od maslaca i čokoladnom glazurom.

Zadatak 8. S 350 grama višanja mogli bismo napraviti 12 porcija *Dona-wellea*. Koliko porcija možemo napraviti sa 100 grama višanja?





Izvori:

- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_rivers_of_Croatia (2. 11. 2022.)
- Portal ABC Geografija, Denis Cerić, <http://abcgeografija.com/teme/sava/> (2. 11. 2022.)
- Hrvatske vode, <https://www.voda.hr/hr/novost/dan-rijeke-save-0> (2. 11. 2022.)
- Mozaik knjiga, Niko Borovac, <https://mozaik-knjiga.hr/rijeka-drava/> (2. 11. 2022.)
- Drava. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=16202> (2. 11. 2022.)
- Dravske elektrarne Maribor, skupina hse <https://www.dem.si/en/museum-of-the-fala-hydro-power-plant/history-of-the-fala-hydro-power-plant/> (2. 11. 2022.)
- <https://hr.wikipedia.org/wiki/Kupa> (2. 11. 2022.)
- Hrvatske vode, <https://voda.hr/hr/novost/kupa-rijeka-tirkiznog-izvora-koja-izvire-u-nacionalnom-parku> (2. 11. 2022.)
- Nacionalni park Risnjak <https://www.np-risnjak.hr/kupa/> (2. 11. 2022.)
- Kitchen stories, Christian Ruß <https://www.kitchenstories.com/en/recipes/german-donauwelle-cake> (2. 11. 2022.)
- Hrvatske vode, <https://voda.hr/hr/novost/ljepi-plavi-dunav> (2. 11. 2022.)
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Danube> (2. 11. 2022.)
- Izvor slika <https://pixabay.com/> (2. 11. 2022.)

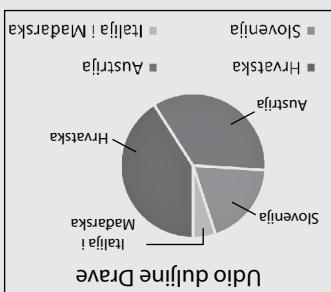
Zadatak 8. Sa 100 grama višanja možemo napraviti 3.43 porcije kolaca.

Zadatak 7. $881700 \text{ km}^2 - 35000 \text{ km}^2 = 782000 \text{ km}^2$

Zadatak 6. $x = 500$

Zadatak 5. $p = 2500 \text{ m} = r^2 \pi \Rightarrow r = 50 \Rightarrow o = 2\pi r = 2 \cdot 50\pi = 100\pi \text{ m} \approx 314 \text{ m}$

Zadatak 4. $100\% - 88\% = 12\% \text{, } 749 \text{ km} \cdot 12\% = 89.88 \text{ km} \cdot 89.88 \text{ km} = 8980 \text{ m}$



država	Hrvatska	Austrija	Slovenija	Madarska
postotak	41 %	35 %	19 %	5 %
relativna frekvencija	0.41	0.35	0.19	0.05
kilometara	305	261	144	39
broj				

Zadatak 3.

Zadatak 2. $(2, 0, 7)$

$$\text{b)} 24 - 24 \cdot \frac{3}{1} - 24 \cdot 29\% = 24 - 8 - 6.96 = 9.04 \approx 9$$

Zadatak 1. a) $100\% - 72\% = 28\%$, $85 \cdot 28\% = 23.8 \approx 24$

Rješenja zadataka

