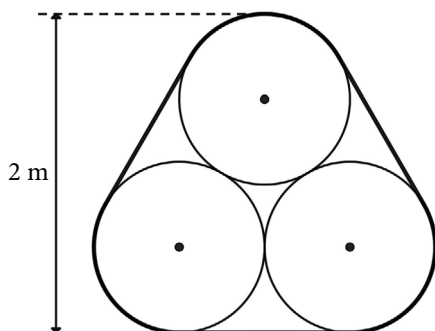


## TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobar, Zagreb

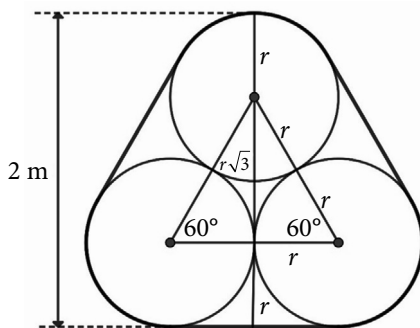
**Primjer 1.** Kolike je duljine remen koji obavija tri jednaka kotača na slici?



**Rješenje:** Središta triju zadanih kružnica vrhovi su jednakostraničnoga trokuta kojemu stranice imaju duljine  $2r$ . Visina jednakostraničnoga trokuta

računa se po formuli  $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , gdje je  $a$  duljina stranice trokuta. U ovom je

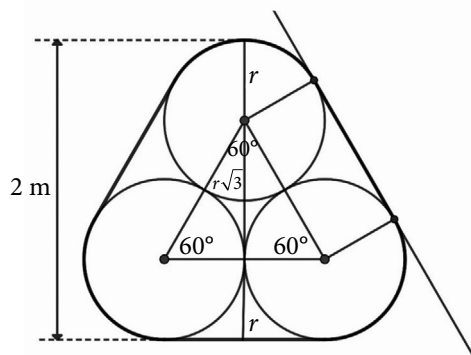
slučaju  $a = 2r$  pa je  $v = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$ .



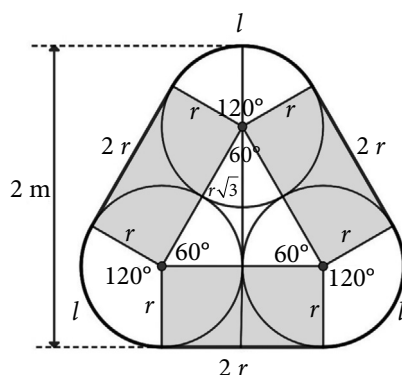
Dopunimo li sliku kako je prikazano, vrijedi  $r + r\sqrt{3} + r = 2$ . Slijedi  $r(2 + \sqrt{3}) = 2$ , tj.  $r = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$  m.

Uočimo da su ravni dijelovi remena usporedni sa stranicama jednakostraničnoga trokuta. Ti su dijelovi na zajedničkoj tangenti dviju kružnica (pravcu koji dira obje kružnice).

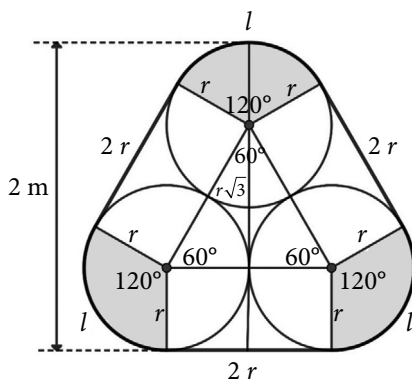




S obzirom na to da su polumjeri kružnica koji spajaju središte i diralište pravca i kružnice okomiti na tangentu, možemo istaknuti tri pravokutnika čije stranice imaju duljine  $r$  i  $2r$ . To znači da ravni dijelovi remena imaju duljine  $2r$ .



Još treba izračunati duljine lukova koji pripadaju trima kružnicama. Tim lukovima odgovaraju središnji kutovi veličine  $120^\circ$  jer je  $360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 120^\circ$ .



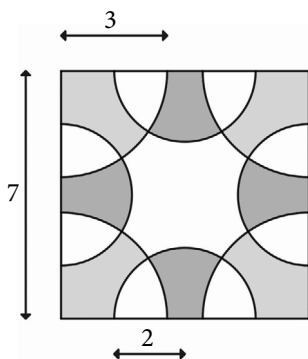
To znači da je duljina  $l$  jednoga luka jednaka  $l = \frac{1}{3} \cdot 2r\pi$ , a ukupna duljina sva tri luka je  $3l = 2r\pi$ .



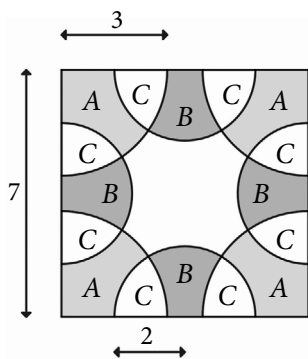
Duljina remena stoga je

$$6r + 2r\pi = r \cdot (6 + 2\pi) = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \cdot (6 + 2\pi) \text{ m} = \frac{12 + 4\pi}{2 + \sqrt{3}} \text{ m} \approx 6.58 \text{ m}.$$

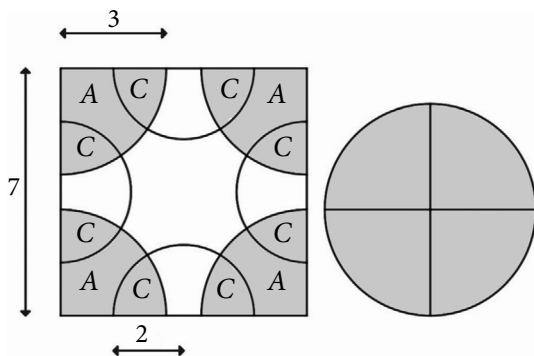
**Primjer 2.** Kolika je razlika površina svjetlije i tamnije obojenih područja ako su zadane duljine stranica kvadrata i radijusi kružnih lukova?



**Rješenje:** Površine svjetlije obojenih područja označit ćemo s  $A$ , a površine tamnije obojenih područja s  $B$ . Površine zajedničkih područja kružnih isječaka i polukrugova označit ćemo s  $C$ . Označene površine vidimo na sljedećoj slici.

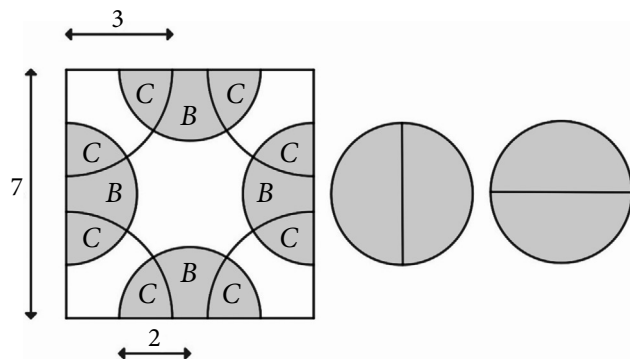


Četiri kružna isječaka u kutovima kvadrata čine krug radijusa 3.



Stoga je zbroj površina svih tih isječaka jednak  $4A + 8C = 3^2 \pi = 9\pi$ .

Četiri polukruga uz stranice kvadrata čine dva kruga radijusa 2.



Stoga je zbroj površina svih tih polukrugova jednak

$$4B + 8C = 2 \cdot 2^2 \pi = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

Ukupna površina svih svjetlijih područja je  $4A$ , a svih tamnijih  $4B$ . Dakle, tražena razlika tih površina jest  $4A - 4B$ .

Imamo sustav od dvije jednačbe. Oduzet ćemo posebno lijeve i desne strane.

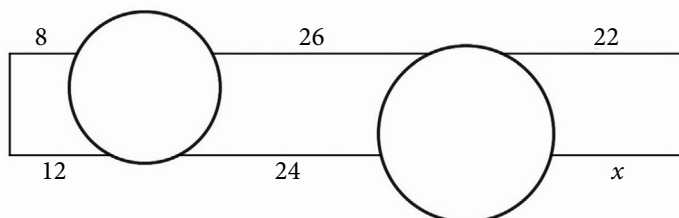
$$\begin{cases} 4A + 8C = 9\pi \\ 4B + 8C = 8\pi \end{cases}$$

$$4A + 8C - (4B + 8C) = 9\pi - 8\pi$$

$$4A + 8C - 4B - 8C = \pi$$

$$4A - 4B = \pi. \text{ Dakle, tražena je površina jednaka } \pi.$$

**Zadatak 1.** Kolika je duljina dužine  $x$ ?



**Izvor:**

1. <https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos>

