Matka 32 (2023./2024.) br. 127

Petar Mladinić, Zagreb

MAJMUN I KOKOSOVI ORASI

Stari i mladi Matemagičari često zadaju probleme za čije rješavanje treba samo domišljatost. Ovdje ćemo ilustrirati probleme razdiobe elemenata u nekom skupu kojima su se bavili Matemagičari prije stotinjak godina. Često su se takvi problemi popularizirali objavom u novinama koje su objavljivale i rješenja svojih čitatelja.

U ovom ćemo tekstu ispričati priču o jednoj vrsti mozgalica (i kasnijim inačicama) koja se pojavila 1912. godine i koju je objavio **Norman Anning**, profesor na Odsjeku za matematiku Sveučilišta u Michiganu. Radi se o tri čovjeka i zalihama kokosa.

U listu *The Saturday Evening Post* u broju od 9. listopada 1926. godine pojavila se kratka priča **Bena Amesa Williamsa** pod naslovom *Kokosi* koja je izazvala zanimanje čitatelja i potaknula velik broj njih na traženje rješenja koje u listu nije bilo objavljeno uz zadatak.

Problem iz Williamsove priče glasi:

Pet muškaraca i majmun doživjeli su brodolom i na pustom su otoku.

Prvi su dan proveli skupljajući kokose za hranu. Skupili su ih sve zajedno na hrpu i otišli spavati.

Kad su svi zaspali, jedan se čovjek probudio i pomislio da bi se mogli ujutro posvađati oko podjele kokosa *pa je odlučio uzeti svoj dio. Tako je podijelio kokosove orahe na pet hrpica. Ostao mu je jedan kokos koji je dao majmunu. Sakrio je svoju hrpu kokosa, a ostale ostavio zajedno na hrpi.*

Nakon toga i drugi se čovjek probudio i učinio istu stvar. Ostao mu je jedan kokos viška koji je dao majmunu.

Sva su petorica muškaraca učinila istu stvar, jedan za drugim, tj. svaki je od njih, kad se probudio, uzeo petinu kokosa s hrpe i svakome je ostao po jedan kokos za majmuna.

Ujutro su podijelili kokose koji su ostali na pet jednakih dijelova.

Naravno, svaki je znao da nedostaju kokosi koje su uzeli po noći. Svatko je bio kriv, pa nisu ništa rekli.

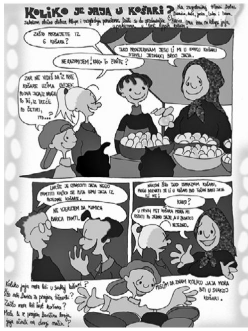
Koliko je plodova kokosa bilo na početku?

Uredništvo *The Saturday Evening Posta* bilo je, tijekom prvog tjedna nakon što je objavljen problem, obasuto s nekih 2000 pisama. Zanimljivo je da je

Williams još 20 godina nastavio primati pisma u kojima se tražio odgovor ili su se predlagala nova rješenja.

Problem kokosa Williams nije izmislio. Mnogo stariji problem aktualizirao je dodavanjem kokosa.

Iz zaborava je tu mozgalicu izvukao slavni Matemagičar **Martin Gardner** u 9. poglavlju *The Monkey and the Coconuts* godine 1958. u knjizi *Mathematical Puzzles & Diversions*. Njegova objava mozgalice potaknula je mnoge ugledne Matemagičare, kao i pripadnike nekih drugih struka, na rješavanje problema. Njihova rješenja nudila su mnogo domišljatosti i metoda rješavanja.



No, danas uočavamo da se ova i slične mozgalice mogu rješavati metodama za rješavanje linearnih Diofantskih jednadžbi. Već je davno Matemagičar **Leonhard Euler** jednu svoju metodu rješavanja linearnih Diofantskih jdnadžbi nazvao *metodom slijepca*.

Inačica takvog problema, nazvana *Koliko je jaja u košari?*, objavljena je u *Matki* broj 20 kao strip-zadatak (vidi sliku na rubu).

Uvod

Za one Matemagičare kojima je preteško rješavanje ili ne znaju metode rješavanja Diofantskih jednadžbi, evo nekoliko primjera jednostavnog kokosovog problema bez „Diofantovih poteškoća".

Primjer 1. Tri mornara nailaze na hrpu kokosa. Prvi mornar uzima pola njih plus pola kokosa. Drugi mornar uzima pola onoga što je ostalo plus pola kokosa. Treći mornar također uzima pola onoga što ostane plus pola kokosa. Ostao je točno jedan kokos koji su dali majmunu.

Koliko je kokosa na hrpi i koliko je kokosa dobio svaki mornar?

Za rješavanje ove mozgalice primijenit ćemo matematičko razmatranje od *pojedinačnog prema općem* problemu, tj. *induktivnu metodu*. Dakle, prvo razmotrimo jednostavniji primjer mozgalice. Nakon toga povećavat ćemo broj mornara uz iste uvjete razdiobe.

Primjer 2. Dva mornara nailaze na hrpu kokosa. Prvi mornar uzima pola njih plus pola kokosa. Drugi mornar uzima pola onoga što je ostalo plus pola kokosa. Ostao je točno jedan kokos koji su dali majmunu.

Koliko je kokosa na hrpi i koliko je kokosa dobio svaki mornar?

Rješenje primjera 2. Neka je N broj kokosa na hrpi. Prvi mornar uzeo je $\frac{N}{2}+\frac{1}{2}$ kokosa, odnosno prvi mornar uzeo je $\frac{N+1}{2}$ kokos, a ostalo je

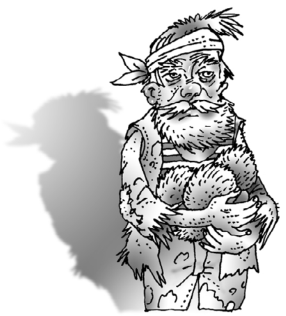
$N-\dfrac{N+1}{2}=\dfrac{N-1}{2}$ kokosa. Drugi mornar uzeo je $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{N-1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{N+1}{4}$ kokos. Prema uvjetima mozgalice, broj kokosa je za jedan veći od onoga što su uzeli prvi i drugi mornar zajedno, tj. $N=\dfrac{N+1}{2}+\dfrac{N+1}{4}+1$. Odavde dobivamo da je $N = 7$, što znači da je prvi mornar uzeo 4 kokosa, drugi mornar 2 kokosa, a majmunu je pripao 1 kokos.

Rješenje primjera 1. Neka je N broj kokosa na hrpi.
Prvi mornar uzima $\dfrac{N}{2}+\dfrac{1}{2}$ kokosa, odnosno $1.\text{mornar}=\dfrac{N+1}{2}$ kokos.
Drugi mornar uzima $2.\text{mornar}=\dfrac{N-1.\text{mornar}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{N+1}{4}$ kokos.
Treći mornar uzima $3.\text{mornar}=\dfrac{N-1.\text{mornar}-2.\text{mornar}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{N+1}{8}$ kokos.
Prema uvjetima mozgalice vrijedi odnosno $N=\dfrac{N+1}{2}+\dfrac{N+1}{4}+\dfrac{N+1}{8}+1$.

Odavde dobivamo da je $N = 15$, što znači da je prvi mornar uzeo 8 kokosa, drugi mornar 4 kokosa, treći mornar 2 kokosa, a majmunu je pripao 1 kokos.

Primijenite sličan račun i zaključivanje u rješavanju sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1. Četiri mornara nailaze na hrpu kokosa. Prvi mornar uzima pola njih plus pola kokosa. Drugi mornar uzima pola onoga što je ostalo plus pola kokosa. Treći mornar uzima pola onoga što ostane plus pola kokosa. Četvrti mornar također uzima pola onoga što ostane plus pola kokosa. Ostao je točno jedan kokos koji su dali majmunu. Koliko je kokosa na hrpi i koliko je kokosa dobio svaki mornar?



(Odgovor: 31 kokos; prvi je mornar uzeo 16, drugi 8, treći 4, četvrti 2 kokosa.)

Zadatak 2. Razmotrite zapise broja kokosa za mornare, kao i ukupan broj kokosa. Možete li naslutiti odgovor za slučaj pet mornara ako je isti način razdiobe kao u prethodnim primjerima? Svoje naslućivanje provjerite rješavanjem problema.

(Odgovor: 63 kokosa; prvi je mornar uzeo 32, drugi 13, treći 8, četvrti 4, a peti je uzeo 2 kokosa.)

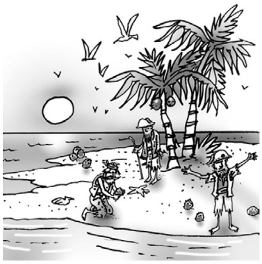
Možete li naslutiti te brojeve kokosa za sljedećih nekoliko slučajeva? Možete li zapisati naslućivanje za opći slučaj, tj. za m mornara?

Napomena. Dokazivanje tvrdnje vašeg naslućivanja/hipoteze općeg slučaja u matematici se provodi pomoću *matematičke indukcije*.

Rješavanje početnog problema

Prije samog rješavanja početnog problema koji je izazvao veliku medijsku pozornost razmotrimo primjer s manjim brojem sudionika, ali s istim uvjetima razdiobe, tj. induktivno kao u prethodnim primjerima. Dakle, riješimo sljedeći primjer.

Primjer 3. Dvije osobe i majmun doživjeli su brodolom i na pustom su otoku. Prvi su dan proveli skupljajući kokose za hranu. Sve skupljene kokose stavili su na jednu hrpu i otišli spavati. Kad su svi zaspali, jedna se osoba probudila i pomislila da bi se ujutro mogli posvađati oko podjele kokosa, pa je odlučila uzeti svoj dio. Tako je podijelila kokosove orahe na dvije hrpe i sakrila svoj dio. Jedan kokos dobio je i majmun. Nakon toga druga se osoba probudila i učinila istu stvar. Ujutro su trebali podijelili kokose koji su ostali podijeljeni na dva jednaka dijela. Naravno, svaka je osoba znala da nedostaju kokosi koje su po noći uzeli za sebe i dali majmunu. Nisu ništa rekli o tome. Koliko je kokosa bilo ujutro za podijeliti? Koliko je u početku bilo kokosa?



Rješenje. Neka je N broj kokosa na hrpi. Prva osoba uzima $\frac{N}{2}+1$ kokos, odnosno $1.\text{ osoba} = \frac{N+2}{2}$ kokos. Druga osoba uzima $\frac{N-1.\text{ osoba}}{2}+1$, odnosno $2.\text{ osoba} = \frac{N+2}{4}$ kokos. Prema uvjetima mozgalice vrijedi $N = 1.\text{osoba} + 2.\text{osoba}$, odnosno $N = \frac{N+2}{2} + \frac{N+2}{4}$. Odavde dobivamo $N = 6$, pa je prva osoba uzela iz hrpe za sebe 3 kokosa i 1 je dala majmunu, odnosno uzela je 4 kokosa. Druga je osoba uzela iz hrpe 2 kokosa (za sebe 1 kokos i za majmuna 1 kokos), odnosno podijelila je preostale kokose te za jutarnju razdiobu nije bilo kokosa.

Pokušajte za vježbu na ovaj način istražiti rješavanje početnog problema povećanjem broja osoba i procijenite dobre i loše strane takvog rješavanja problema.

Sada ćemo prezentirati rješenje početnog problema o 5 muškaraca i 1 majmunu na pustom otoku kako ga je dao Martin Gardner u spomenutoj knjizi.

Rješenje Martina Gardnera. Gardner je problem opisao pomoću sljedećih Diofanstkih jednadžbi koje predstavljaju šest uzastopnih podjela kokosovih oraha na petine. N je ukupan broj kokosa, a F broj kokosa koji je svaki brodolomac dobio na posljednjem (konačnom) dijeljenju. Brojevi 1 s desne strane jednadžbi su kokosovi orasi dani majmunu. Svako slovo označava nepoznat pozitivni cijeli broj. Jednadžbe su:

$$N = 5A + 1,\ 4A = 5B + 1,\ 4B = 5C + 1,\ 4C = 5D + 1,\ 4D = 5E + 1 \text{ i } 4E = 5F.$$

Gardner je iz prve jednadžbe odredio A i uvrstio je u drugu. Zatim je iz druge odredio B itd. Na kraju je dobio jednu nehomogenu linearnu Diofantsku jednadžbu s dvije nepoznanice N i F:

$$1024\, N = 15\,625F + 8404$$

Rješenje te jednadžbe je $N = 3121$ i $F = 204$.

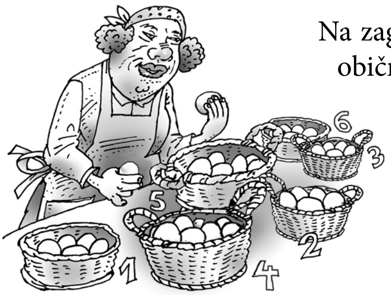
Gardner je napisao i opće formule za ukupan broj kokosa:

- za neparan broj osoba n i cijeli broj k formula je $N = (1 + nk)n^n - (n-1)$,
- za paran broj osoba n i cijeli broj k formula je $N = (n - 1 + nk)n^n - (n-1)$.

Zadatak 3. Razmotrite ove formule za nekoliko slučajeva te usporedite rezultate s rezultatima koje ste dobili u tim slučajevima na drugi način.

Na kraju ovog teksta riješimo i strip-zadatak.

Koliko je jaja u košari?



Na zagrebačkoj tržnici Dolac Danica, Ante, Jurica, Luka i Ivan subotom obično obilaze klupe i razgledaju ponuđeno. Došli su do prodavačice Barice. Ona ima na klupi jaja upakirana u šest lijepih košara.

Jurica: *Zašto prodajete iz šest košara?*

Barica: *Tako provjeravam jesu li mi u svaku košaru stavili jednaki broj jaja.*

Danica: *Ne razumijem! Kako to činite?*

Ante: *Zar ne vidiš da iz prve košare uzima uvijek po dva jaja, iz druge po tri, iz treće po četiri, itd.?*

Luka: *Lakše je izbrojiti jaja nego pamtiti koliko se puta uzmu jaja iz pojedine košare.*

Ivan: *Ne vjerujem da kumica Barica pamti.*

Barica: *Nakon što tako ispraznim košaru, mogu doznati je li u košari bio točan broj jaja ili ne!*

Danica: *Kako?*

Barica: *U prvih pet košara mora mi ostati po jedno jaje, a u zadnjoj nijedno.*

Ante: *Mislim da znam koliko jaja mora biti u svakoj košari.*

Koliko jaja mora biti u svakoj košari? Što koristi Barica za provjeru točnosti? Zašto mora biti šest košara? Može li se Baričina provjera broja jaja napraviti na drugi način?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti *Eulerovom metodom slijepca* za linearne Diofantske jednadžbe.

Jurica: *Znači da se ovdje radi o višekratnicima broja 2, 3, 4, 5, 6 i 7.*

Ante: *Da, baš tako! U svakoj bi košari trebao biti jednak broj jaja. Neka je to broj x.*

Dakle, u prvoj košari broj jaja umanjen za jedan (jer u košari ostane jedno jaje) višekratnik je broja 2, tj. $x-1=2\cdot k, k\in N$.

Ivan: *Za sljedeće je četiri košare:*

$$x-1=3\cdot l, x-1=4m, x-1=5n, x-1=6t, l,m,n,t\in N.$$

Luka: *Evo i moje pomoći! U zadnjoj košari ne ostaje nijedno jaje. Dakle,* $x=7u, u\in N$.

Danica: *Iz prvih 5 košara slijedi da je* $x-1$ *višekratnik broja 60, tj. da je* $x-1=60v, v\in N$ *, odnosno* $x=60v+1$.

Ivan: *Izjednačimo li ovu jednadžbu s jednadžbom šeste košare, dobit ćemo linearnu Diofantsku jednadžbu* $7u-60v=1$*,* $u, v\in N$*.*

Danica: *Razjasnili smo matematičku pozadinu Baričine neobične prodaje jaja.*

Ante: *Ovu jednadžbu ili treba riješiti nekom metodom ili jednostavno naslutiti da je* $u=43$ *i* $v=5$*, tj.* $x=301$.

Mate Magičar: *Algebarska jednadžba s dvjema ili više nepoznanica s cijelim koeficijentima zove se Diofantska jednadžba. To je u našem zadatku jednadžba* $7u-60v=1$*, gdje su u i v prirodni brojevi. Riješimo je Eulerovom metodom ili metodom slijepca (kako ju je nazvao sâm Euler). Iz ove jednadžbe slijedi:*

$$u=\frac{60v+1}{7}=8v+\frac{4v+1}{7}.$$

Odavde zaključujemo (jer je *u* prirodan broj) da je $4v+1$ djeljivo brojem 7, tj. da je $4v+1=7z, z\in N$.

To je nova Diofantska jednadžba. Za nju vrijedi da je $v=\frac{7z-1}{4}=z \quad \frac{3z-1}{4}$. Na isti način (kao i u prijašnjoj jednadžbi) zaključujemo da je $3z-1$ djeljivo brojem 4, tj. da je $3z-1=4w, w\in N$.

Dalje je $z=\frac{4w+1}{3}=w+\frac{w+1}{3}$. Zaključujemo da je $w+1$ djeljivo brojem 3, tj. $w+1=3a, a\in N$, odnosno $w=3a-1$.

Za $a=1$ uvrštavanjem dobivamo $w=2$, $z=3$, $v=5$, $u=43$, $x=301$.

Da smo za *a* uzeli 2, dobili bismo $w=5$, $z=7$, $v=12$, $u=103$, $x=721$. Uzimajući veću vrijednost za broj *a*, dobili smo i veći *x*. Procijenite sami koliko će biti jaja u svakoj od 6 Baričinih košara.

Prijedlog za nagradu i objavljivanje

Pozivamo mlade Matkače i ostale čitatelje da nam pošalju neki svoj problem koji ćemo objaviti.

Napomena. Tko nam pošalje jedan svoj zadatak i rješenje, nagradit ćemo ga jednom knjigom iz *Matematičke biblioteke*.