Matka 32 (2023./2024.) br. 128

ŠESTORKA U KAZALIŠTU

Željko Brčić, Vinkovci

Na matematičkim natjecanjima svih razina vrlo se često pojavljuju logičko-kombinatorni zadatci, a u redovnoj nastavi matematike u osnovnoj školi kombinatorika se uopće ne spominje. Srednjoškolci takve zadatke rješavaju pomoću permutacija, kombinacija, varijacija i gotovih formula za izračunavanje njihova broja u kojima se pojavljuju faktorijeli, binomni koeficijenti i slične, osnovnoškolcima nepoznate stvari. Za rješavanje kombinatornih zadataka učenici osnovne škole imaju samo jedan, no sasvim dovoljan alat – poučak o uzastopnom prebrojavanju. U reduciranom obliku, prilagođenom razini osnovne škole, to pravilo glasi:

Ako se prva radnja može obaviti na n_1 način, druga na n_2 načina, i tako dalje, sve do posljednje k-te radnje koja se može obaviti na n_k načina, tada se sve radnje zajedno mogu obaviti na $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ načina.

U nastavku teksta bit će pokazano kako se kombinatorni zadatci rješavaju na osnovnoškolski način, bez gotovih formula, odnosno samo koristeći poučak o uzastopnom prebrojavanju.

Permutacije

O permutacijama govorimo ako promatramo n elementa nekog skupa i sve elemente raspoređujemo u niz. Svaki različit poredak svih elemenata skupa predstavlja jednu permutaciju.

Primjer 1. Neka je skup $A = \{a, b, c\}$. Elemente toga skupa možemo rasporediti na šest načina: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* i *cba*.

Do broja permutacija dolazimo ovako: Na prvome mjestu može biti bilo koji od tri elementa skupa (dakle može se izabrati na tri načina), na drugom jedan od preostala dva (biramo ga na dva načina), a na trećemu može biti samo jedan, posljednji element (njega možemo odabrati samo na jedan način). Prema poučku o uzastopnom prebrojavanju, tri elementa mogu se rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.

Zadatak 1. Šest prijatelja planira otići u kazalište i smjestiti se u jednome redu, primjerice na sjedalicama numeriranim brojevima od 1 do 6. Na koliko se načina mogu rasporediti na ta mjesta ako dvojica od njih, Dinko i Eugen, ne žele sjediti jedan do drugoga?

Rješenje: Kada ne bi bilo nikakvih ograničenja, šestero prijatelja moglo bi se rasporediti na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načina. Izračunat ćemo u koliko od tih rasporeda Dinko i Eugen sjede jedan do drugoga. Da bi sjedili jedan do drugoga, Dinko i Eugen mogu se smjestiti u sjedala broj 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4, 4 i 5 ili 5 i 6. U svim tim slučajevima jedan od njih može sjesti lijevo, a drugi desno ili pak obrnuto. Postoji dakle deset načina da se dvojica prijatelja smjeste jedan do drugoga. Prikažimo te rasporede:

D E – – – –	– D E – – –	– – D E – –	– – – D E –	– – – – D E
E D – – – –	– E D – – –	– – E D – –	– – – E D –	– – – – E D

Na slobodna mjesta u tim rasporedima (označena crticama) može se proizvoljno smjestiti bilo tko od preostalih četvero prijatelja. To mogu napraviti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

Ukupan broj razmještaja u kojima Dinko i Eugen sjede jedan do drugoga je $10 \cdot 24 = 240$. To znači da postoji $720 - 240 = 480$ rasporeda u kojima njih dvojica nisu jedan pored drugoga.

Varijacije

Kod permutacije smo promatrali sve elemente i bio je važan njihov raspored. Kod varijacija također vodimo računa o rasporedu, ali se više ne promatraju svi, nego samo neki elementi skupa. Svaki različiti poredak r elemenata (od ukupno n) predstavlja jednu varijaciju r-tog razreda od n elemenata.

Primjer 2. Neka je skup $B = \{a, b, c, d\}$. Elemente toga skupa možemo rasporediti u skupine od dva člana (uređene parove) na 12 načina: *ab*, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db* i *dc*.

Njihov broj računamo ovako: Na prvome mjestu može biti bilo koji od četiri elementa skupa, a na drugome jedan od preostala tri. Prema poučku o uzastopnom prebrojavanju, četiri elementa mogu se rasporediti na $4 \cdot 3 = 12$ načina.

Zadatak 2. Došavši na blagajnu kazališta, šestero prijatelja doznalo je da su za predstavu ostale još samo četiri ulaznice. Odlučili su da će njih četvero ipak pogledati predstavu, a ostalih dvoje pričekat će ih u obližnjem kafiću. Na koliko se načina oni mogu smjestiti na svoja mjesta ako među odabranima mora biti Ana kojoj je taj dan bio rođendan?

Rješenje: Budući da među gledateljima mora biti Ana, ona se može smjestiti na bilo koje od četiri dobivena mjesta. Prikažimo i to grafički:

A – – –   – A – – –   – – A –   – – – A

Na preostala tri mjesta (označena crticama) možemo izabrati troje od pet preostalih prijatelja, i to ovako: Prvi od njih može se izabrati na pet načina (bilo tko od njih), drugi na četiri (svi osim već izabranog) i treći na tri načina (netko od preostale trojice). Oni se mogu smjestiti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. Ukupan broj rasporeda je $4 \cdot 60 = 240$.

Kombinacije

Kod permutacija smo promatrali svih n elemenata nekog skupa, a kod varijacija samo njih k (naravno, podrazumijeva se da je $k < n$). Kod kombinacija od n elemenata opet biramo samo k elemenata, ali nam njihov poredak više nije bitan. Svaki podskup od r elemenata (napisanih u bilo kojem poretku) predstavlja jednu kombinaciju r-tog razreda od n elemenata.

Primjer 3. Neka je skup C = $\{a, b, c, d, e\}$. Elemente toga skupa možemo rasporediti u deset kombinacija od tri člana: *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde* i *cde*.

Kako izračunati da ih ima baš deset? Za početak, računamo broj varijacija: Na prvome mjestu može biti bilo koji od pet elemenata skupa, na drugome neki od četiri ostala, a na trećem jedan od preostala tri. Prema poučku o uzastopnom prebrojavanju, pet elemenata može se u uređene trojke rasporediti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina.

U tome broju nalaze se svi mogući rasporedi neka tri elementa. Primjerice, za a, b i c postoji šest načina kako se oni mogu zapisati u različitim poredcima: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* i *cba*. Svih tih šest poredaka uračunato je u broju 60, a radi se o samo jednoj kombinaciji jer redoslijed izabranih elemenata nije bitan. Naravno, isto vrijedi i za bilo koju drugu trojku jer se svaka tri elementa mogu se rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. Dakle, traženi broj kombinacija šest je puta manji od 60, odnosno iznosi $60 : 6 = 10$. Primijetimo: pri računanju broja varijacija dijelili smo brojem različitih poredaka triju elemenata jer se radi o kombinacijama trećeg razreda. Da smo birali četveročlane podskupove, dijelili bismo s $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ jer se četiri elementa mogu rasporediti na 24 načina.

U osnovnoškolskim zadatcima najčešće se radi o parovima, pa se broj kombinacija računa dijeljenjem s dva. Zaista, od dva elementa, primjerice a i b, moguće je dobiti dva uređena para (a, b) i (b, a), a to se smatra samo jednom kombinacijom.

Zadatak 4. Na kružnici je istaknuto šest točaka. Koliko dužina, trokuta i četverokuta određuje te točke?

Rješenje: Dužina je određena s dvije točke. Prvu točku možemo izabrati na 6 načina (bilo koja točka), a drugu na 5 (bilo koja osim već izabrane). Prema poučku o uzastopnom prebrojavanju, imamo $6 \cdot 5 = 30$ parova točaka. Budući da kod dužine ne razlikujemo početnu i krajnju točku, broj dužina iznosi $30 : 2 = 15$.

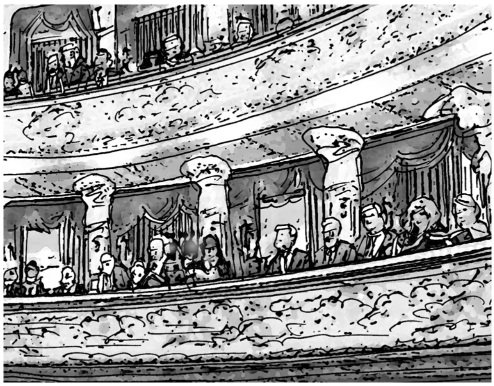
Trokut je određen s tri točke. Postoji $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ uređenih trojki, no njih $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ čine jedan trokut. Trokuta ima $120 : 6 = 20$.

Svake četiri točke, u bilo kojem poretku, određuju jedan četverokut. Postoji $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ različitih odabira tih točaka. Četiri izabrane točke mogu se rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Ukupan broj četverokuta je $360 : 24 = 15$.

Zadatak 5. Na kraju predstave dijeljene su besplatne ulaznice za sljedeću kazališnu predstavu. Naše društvo dobilo je dvije. Na koliko se načina mogu odabrati dva gledatelja te predstave ako to može biti bilo koji par među njima, ali i samo jedna osoba od njih šest (koja će onda sa sobom povesti nekoga izvan toga društva)?

Rješenje: Na početku izračunajmo na koliko se načina može od njih šest izabrati dvoje: Prvi se gledatelj može izabrati na 6, a drugi na 5 načina, što daje $6 \cdot 5 = 30$ uređenih parova. Budući da poredak nije bitan, dijelimo $30 : 2$, pa se dva gledatelja iz društva mogu izabrati na 15 načina. Tome još treba dodati šest mogućnosti u kojima će obje karte dobiti jedan od prijatelja. Ukupni broj raspodjela dviju besplatnih ulaznica je 21.

Zadatak 6. Predstavu je gledala i jedna skupina od šest učenika s kojima su bila i dva učitelja. Dobili su četiri grupne ulaznice za jednu ložu (bez oznake sjedala) i četiri ulaznice za numerirana mjesta u parteru. Na koliko se različitih načina mogu raspodijeliti dobivene ulaznice ako jedan učitelj mora biti u loži, a drugi u parteru?



Rješenje: Izračunajmo prvo na koliko se načina mogu odabrati gledatelji iz lože. Jedan od njih mora biti učitelj i njega možemo odabrati na dva načina. Za preostala tri mjesta kandidiraju se svi učenici, a ima ih šest. Među njima, jednu ulaznicu možemo podijeliti na 6 načina, drugu na 5 i treću na 4 načina. Ukupno je to $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ načina raspodjele, no budući da se ulaznice za ložu ne razlikuju, taj broj potrebno je podijeliti s $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Ulaznice za ložu učenicima se mogu podijeliti na $120 : 6 = 20$ načina, što zajedno s izborom jednog od dva učitelja daje 40 raspodjela.

Potrebno je još izračunati broj raspodjela četiri ulaznice za parter, pri čemu je važno uzeti u obzir i redoslijed sjedenja. Prvu ulaznicu možemo podijeliti na 4 načina, drugu na 3, treću na 2 i četvrtu na samo jedan način. Ukupno je to $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina raspodjele ulaznica u parteru.

Konačno, gledajući i ložu i parter, postoji $40 \cdot 24 = 960$ načina na koje se ulaznice mogu raspodijeliti.