

Nikol Radović, Seget Donji/Sisak

KONSTRUKCIJE KVADRATA MM-KONSTRUKCIJE I SKETCHPAD

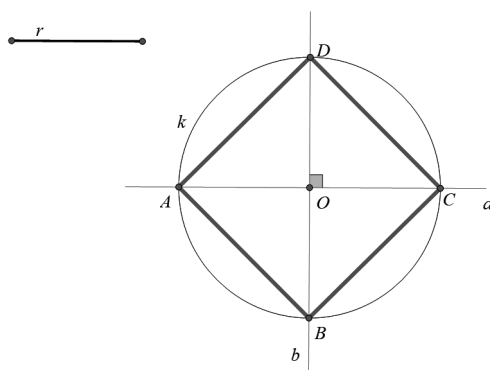
Zadatak 1. Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $ABCD$ tako da mu vrhovi budu na zadanoj kružnici $k(O, r)$.

Ovaj zadatak poznat je kao *Napoleonov problem*. Osim što je bio slavni vojskovođa, Napoleon je bio i ljubitelj matematike/geometrije. Prema zapisima iz toga doba, 1797. godine, za vrijeme druženja sa slavnim matematičarima J. L. Lagrangeom i P. S. de Laplaceom (koje je kasnije proglasio grofom, odnosno markizom), Napoleon je iznio neka rješenja MM-konstrukcija koja su ovoj dvojici matematičara bila nepoznata.

SLUČAJ 1. Riješimo prvo zadatak klasično, pomoću trokuta/ravnala i šestarila ili pomoću nekog programa dinamične geometrije, primjerice Sketchpada kao alata za crtanje.

- Na zadanoj kružnici $k(O, r)$ nacrtajmo bilo koju točku i označimo je s A . Označimo kružnicu k i u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Točka na kružnici*.
- Točkom A i središtem kružnice O nacrtajmo pravac a ; označimo točke A i O i u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Pravac*.
- Kružnica k i pravac a sijeku se u točkama A i C ; označimo kružnicu k i pravac a u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.
- Točkom O nacrtajmo/konstruirajmo okomicu b s obzirom na pravac a , označimo točku C i pravac b u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Okomica*.
- Pravac b siječe kružnicu $k(O, r)$ u točkama B i D , označimo kružnicu k i pravac b u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.
- Točke A, B, C i D vrhovi su traženog kvadrata $ABCD$ koji ima vrhove na kružnici $k(O, r)$.
- Označimo redom točke A, B, C i D te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Dužine*.
- Konstruirane/nacrtane su stranice kvadrata $ABCD$, Slika 1.
- Konstrukciju smo mogli provesti samo rotacijom oko središta kružnice za veličinu kuta od 90° . Postoji li još neka druga mogućnost?

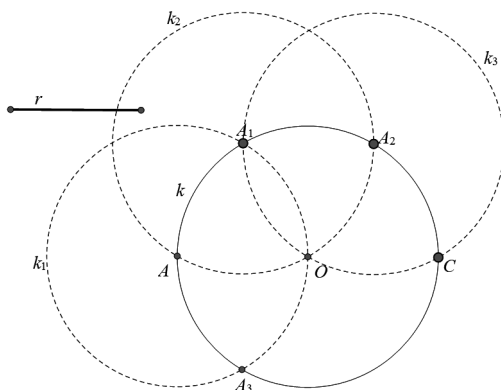




Slika 1.

SLUČAJ 2. Riješimo isti zadatak MM-konstrukcijama, tj. samo šestarom.

- Nacrtajmo zadanu kružnicu $k(O, r)$.
- Na kružnici $k(O, r)$ nacrtajmo bilo koju točku, primjerice točku A .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_1(A, r)$, označimo točku A i polumjer r te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + polumjer*.
- Kružnice $k_1(A, r)$ i $k(O, r)$ sijeku se u točkama A_1 i A_3 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_2(A_1, r)$, označimo točku A_1 i polumjer r te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + polumjer*.
- Kružnice $k_2(A_1, r)$ i $k(O, r)$ sijeku se u točkama A i A_2 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_3(A_2, r)$, označimo točku A_2 i polumjer r te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + polumjer*.
- Kružnice $k_3(A_2, r)$ i $k(O, r)$ sijeku se u točkama A_1 i C .

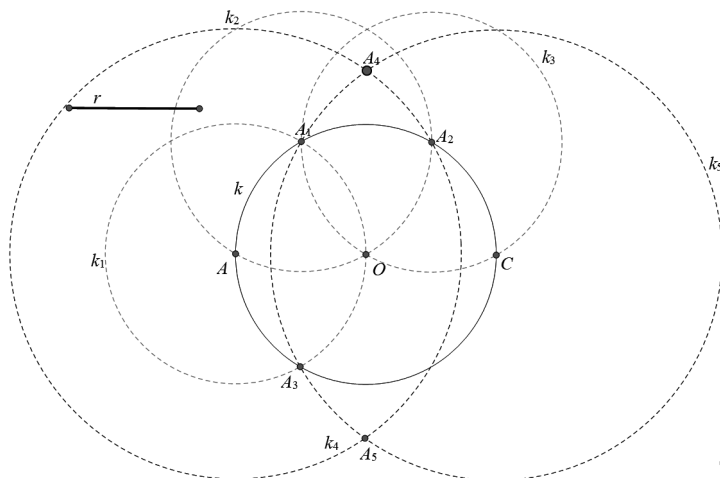


Slika 2.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_4(A, |AA_2|)$, označimo točke A i A_2 te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + točka*.
- Na isti način nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_5(C, |CA_1|)$.

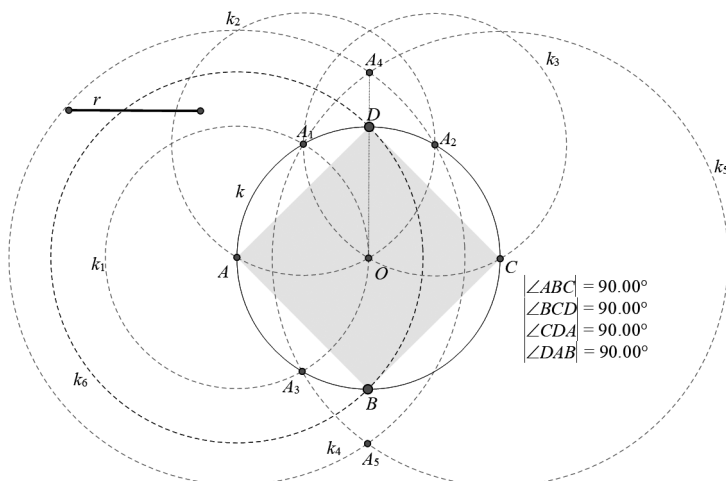


- Kružnice $k_4(A, |AA_2|)$ i $k_5(C, |CA_1|)$ sijeku se u točkama A_4 i A_5 , Slika 3.



Slika 3.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_6(A, |OA_4|)$, (u ovom slučaju prvo moramo konstruirati/nacrtati dužinu $\overline{OA_4}$ kako bismo mogli konstruirati/nacrtati kružnicu k_6 – za razliku od klasične konstrukcije kada je dovoljno u šestar uzeti udaljenost točka i crtati lukove kružnica), označimo točke A i dužinu $\overline{OA_4}$ te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + polumjer*.
- Kružnica $k_6(A, |OA_4|)$ i zadana kružnica $k(O, r)$ sijeku se u točkama B i D .
- Točke A, B, C i D vrhovi su kvadrata $ABCD$. Za provjeru možemo izmjeriti veličine kutova. Promjenom duljine zadanog polumjera r kvadrat se ne bi smio „raspasti”, kao ni veličine kutova.



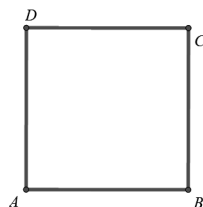
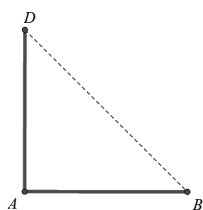
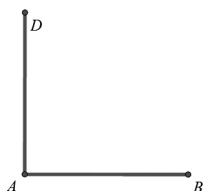
Slika 4.



Zadatak 2. Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $ABCD$ ako su zadana dva vrha kvadrata A i B .

SLUČAJ 1. Riješimo prvo zadatak klasično pomoću trokuta/ravnala i šestara ili pomoću nekog programa dinamične geometrije, primjerice Sketchpada kao alata za crtanje.

- Nacrtajmo zadane elemente, dvije točke A i B pomoću alata za crtanje točaka.
- Traženi kvadrat $ABCD$ možemo konstruirati klasično, konstrukcijom okomica ili iskoristimo prednosti *Sketchpada*. Označimo točke A i B te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Dužina*. Konstruirali smo stranicu \overline{AB} traženoga kvadrata.
- Označimo točku A i u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite središte* (ili dva puta kratko kursorom kliknemo na točku A).
- Označimo dužinu \overline{AB} i točku B te u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Rotirajte i dopišimo veličinu kuta 90°* (prije nego potvrdimo trebamo paziti na orijentaciju, odnosno možemo i upisati veličinu kuta -90°) i potvrdimo. Točki B'' promijenimo oznaku u D (dva puta kratko kliknemo na točku, te u dijalogu promijenimo B' u D i potvrdimo).
- Označimo dužinu \overline{DB} i u izborniku *Transformacije* odaberemo naredbu *Označite os simetrije* (ili dva puta kratko kliknemo na dužinu).
- Označimo redom dužine \overline{AB} , \overline{AD} i točku A te u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Zrcalite*.
- Točki A' promijenimo oznaku u C (dva puta kratko kliknemo na točku, te u dijalogu promijenimo A' u C i potvrdimo).
- Pomoćnu dijagonalu kvadrata možemo „izbrisati” (označimo dužinu \overline{DB} i u izborniku *Zaslon* odaberemo naredbu *Sakrijte dužinu*).
- Kvadrat $ABCD$, Slika 5., tako je konstruiran.



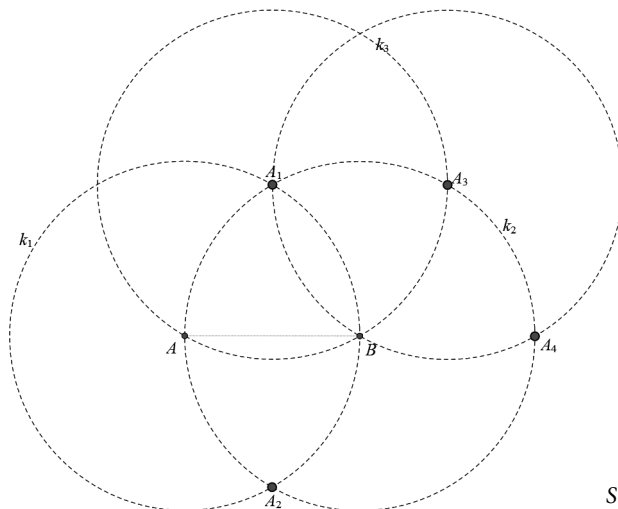
Slika 5.

SLUČAJ 2. Riješimo isti zadatak *MM*-konstrukcijama, tj. samo šestarom.

- Nacrtajmo zadane elemente, točke A i B .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(A, |AB|)$ tako da označimo točke A i B te u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Kružnica – središte + točka*. i $k_2(B, |AB|)$; ponavljamo prije opisan korak konstrukcije kružnice.
- Kružnice $k_1(A, |AB|)$ i $k_2(B, |AB|)$ sijeku se u točkama A_1 i A_2 – označimo kružnice, u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.
- Slično kao u Zadatku 1. nastavljamo konstrukciju; konstruirajmo/nacrtajmo kružnicu $k_3(A_1, |AA_1|)$. Konstrukciju provodimo na već opisan način.
- Kružnice $k_1(A, |AB|)$ i $k_3(A_1, |AA_1|)$ sijeku se u točkama A i A_3 – označimo kružnice, u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.

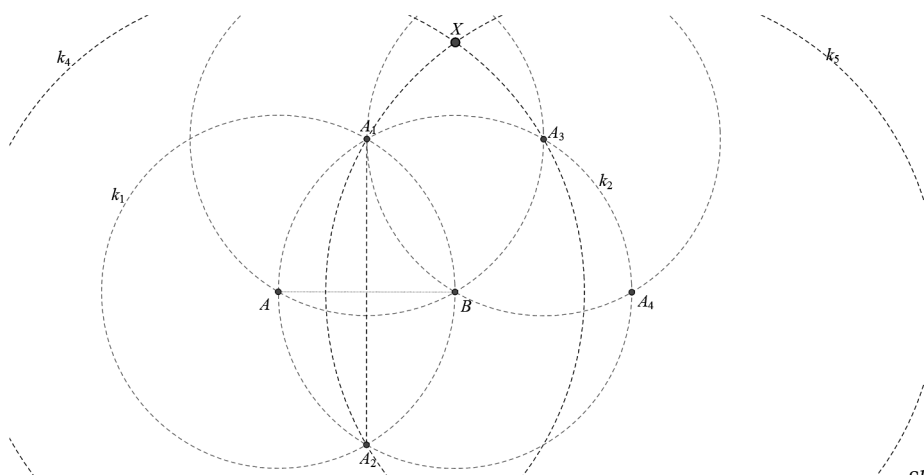


- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_4(A_3, |A_3A_1|)$.
- Kružnice $k_3(A_1, |AA_1|)$ i $k_4(A_3, |A_3A_1|)$ sijeku se u točkama A_1 i A_4 , Slika 6.



Slika 6.

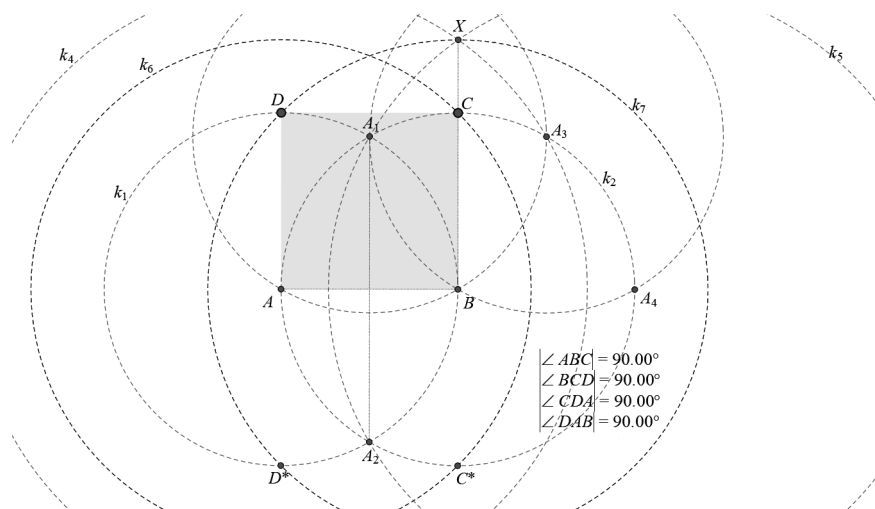
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_4(A, |A_1A_2|)$, (u ovom slučaju prvo moramo konstruirati/nacrtati dužinu $\overline{A_1A_2}$ kako bismo mogli konstruirati/nacrtati kružnicu k_4 – za razliku klasične konstrukcije kada je dovoljno u šestar uzeti udaljenost točka i crtati lukove kružnica), označimo točke A i dužinu $\overline{A_1A_2}$ te u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica:središte + polumjer*. Slično crtamo/konstruiramo i kružnicu $k_5(A_4, |A_1A_2|)$.
- Kružnice $k_4(A, |A_1A_2|)$ i $k_5(A_4, |A_1A_2|)$ sijeku se u točkama X i Y , Slika 7.



Slika 7.



- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_6(A, |BX|)$ i $k_7(B, |BX|)$ (i u ovom slučaju prvo moramo konstruirati/nacrtati dužinu BX kako bismo mogli konstruirati/nacrtati kružnice k_6 i k_7 – za razliku od konstrukcije klasično kada je dovoljno u šestar uzeti udaljenost točka i crtati lukove kružnica). Konstrukciju provodimo kao u prethodnim koracima.
- Kružnice $k_6(A, |BX|)$ i $k_2(B, |AB|)$ sijeku se u točkama C i C^* ; označimo kružnice i u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.
- Kružnice $k_7(B, |BX|)$ i $k_1(A, |AB|)$ sijeku se u točkama D i D^* ; označimo kružnice i u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.



Slika 8.

- Točke C i D preostala su dva vrha kvadrata $ABCD$.
- Postoji još jedan kvadrat, ABC^*D^* . Provjeri mjerenjem!

Literatura:

1. Cheney, F. (1953.): Can we Out Mascheroni?, *The Mathematics Teacher*, Vol- 47, No. 3, 152 – 156.
2. Garden, M. (1992.): *Mathematical Circus*, The Mathematical Association of America, Washington DC.
3. Hlavaty, J. H. (1957.): *Macheroni constructions*, *The Mathematic Teacher*, Vol. 50, No- 7., 482 – 487.
4. Palman, D. (1996.): *Geometrijske konstrukcija*, Element, Zagreb.
5. Palman, D. (1996.): *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005.): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.

