

Dinamična geometrija: vizualizirati, konstruirati, dokazati

NIKOLINA KOVAČEVIĆ¹

Sažetak: Jedan od važnih zadataka nastave geometrije je pomagati u uređenju i tumačenju svijeta oko sebe pomoću matematičkih pojmova. Svjesnim opažanjem okoline i tumačenjem pojava saznajemo nešto (više) o svijetu oko sebe, učimo svoju okolinu vidjeti drugim očima. U radu će se riješiti dva zadatka modeliranja, s posebnim naglaskom na integriranje različitih geometrijskih aktivnosti poput vizualiziranja, analiziranja, konstruiranja i dokazivanja. Rad je motiviran drugim zadatkom čija se modifikacija može naći na poveznici (JMC, 2001.), a njegovo rješavanje u ovom je radu nadopunjeno konstrukcijskom i analitičkom obradom kroz prepoznavanje nepoznatih elemenata krivulja 2. stupnja (kružnice i elipse) iz grafičkog prikaza, te određivanja njihovih pripadnih jednadžbi. Budući da učenici često doživljavaju matematiku kroz razvoj izoliranih koncepata i vještina nužnih za rad u različitim matematičkim područjima (algebra, analiza, statistika, geometrija...), cilj je integracijom različitih aktivnosti pri rješavanju problema istaknuti temeljne značajke matematičke znanosti u različitim matematičkim domenama.

Primjena konstrukcijske metode podržana je upotrebom programa dinamične geometrije i povezuje se s geometrijskim razumijevanjem jednostavnih gibanja (pravocrtnih i kružnih). Osim toga, odabrani problemi naglašavaju međusobnu povezanost prostora i ravnine koja uključuje aktivno i mentalno djelovanje učenika, s ciljem rješavanja problema iz svakodnevnog života. Iako se oba zadatka oslanjaju se na praktičnu primjenu jedne od niza konstrukcija elipse poznate i pod nazivom *mehanička konstrukcija elipse*, koja će biti opisana kasnije u radu, jednostavnija varijanta prvog zadatka iz ovog rada može se implementirati već u osnovnoškolsku matematiku jer zahtijeva primjenu Talesova poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Matematičko modeliranje kroz geometrijske konstrukcije

Opći ciljevi geometrije odnose se na različite vještine (vještina crtanja, vizualno-prostorna vještina, verbalna vještina, logička vještina, vještina primjene) i sposobnosti koje učenici trebaju razvijati, kao i znanja kojima trebaju težiti (Weigand et al, 2018.; Baranović, Baras, Kožul Blaževski, 2020.). Ove vještine važne su za kasnije

¹Nikolina Kovačević, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu

osposobljavanje i zapošljavanje učenika, a kako one u velikoj mjeri nadilaze nastavne lekcije, sve se češće razvijaju kroz vještinu rješavanja problema primjenom modeliranja. U našoj nastavnoj praksi matematičko modeliranje u geometriji uglavnom je usmjereno na rad u osnovnoj školi, dok se modeliranje u srednjoj školi češće veže uz primjenu različitih elementarnih funkcija (Apatić, 2016.). Na ovaj način tipični zadatci modeliranja u geometriji prostora na višim obrazovnim razinama obično više pogoduju razvoju vještine računanja kroz uvježbavanje algebarskih (i povremenih trigonometrijskih) izračuna za određivanje različitih metričkih komponenti (npr. duljina, površina, volumena), dok se konstrukcijski zadatci, pogodni za jačanje prostorne intuicije i razvoj geometrijskog rasuđivanja, rijetko prakticiraju u nastavi, iako su izrazito pogodni za istraživačku i projektnu nastavu (Bahun, 2014.; Laštro, 2014.), a mogu se jednostavno povezati i s aktivnosti dokazivanja koja se također sve rijeđe prakticira u nastavi.

Osnovna karakteristika zadataka modeliranja je da se temelje na autentičnim kontekstima koji se mogu susresti u stvarnom životu. U matematičkim udžbenicima najčešće se javljaju standardni tipovi zadataka modeliranja, iako se mogu pronaći i tipovi direktnog, pa čak i otvorenog modeliranja (Gusić, 2011.). Unatoč tome što postoje različiti pristupi rješavanju problema kroz matematičko modeliranje, svi koraci koji se pritom javljaju prirodno se mogu povezati s tri standardne faze koje se javljanju u primjeni geometrijske metode konstruiranja (Palman, 1996.; Weigand et al., 2018.):

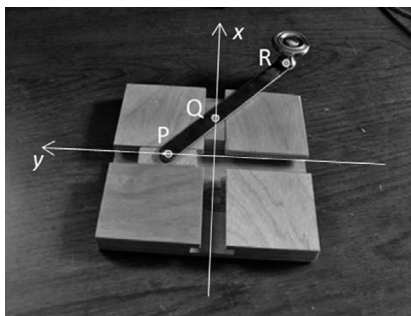
- I. *heuristička faza* – analiziranje problema i pronalaženje koraka konstrukcije,
- II. *algoritamska faza* – izvođenje i prikazivanje konstrukcije,
- III. *analitička faza* – dokaz i rasprava, refleksija na problem.

Modeliranje problema iz svakodnevnog života često uključuje razumijevanje objekata u prostoru i matematički rad s njima koji se temelji na obradi kroz odgovarajuće prikaze. Stoga je u učenju i poučavanju prostorne geometrije važno isticati uzajamni odnos između trodimenzijskog i dvodimenzijskog ($3D \leftrightarrow 2D$) kroz uključene objekte i njihove međusobne položajno-metričke veze. Primjena metode konstrukcije na prostorne probleme pogodna je za usvajanje i produbljivanje znanja o različitim geometrijskim konceptima: figurama (npr. krivuljama: ravnim/zakrivljenim, ravninskim/prostornim, likovima/tijelima), relacijama (npr. okomitost/paralelnost: dva pravca – dvije ravnine – pravac i ravnina; incidencija: točka – pravac – ravnina)...

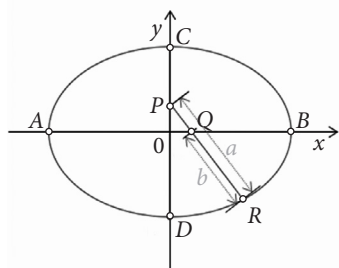
Dva primjera modeliranja elipse

Jedan od niza odgojno-obrazovnih ishoda istaknutih u srednjoškolskom matematičkom kurikulumu vezan je uz prepoznavanje osnovnih elemenata elipse iz grafičkog prikaza ili zadanih uvjeta, te pronalaženje njene jednadžbe. Uz kružnicu, specijalnu elipsu kojoj se podudaraju duljine velike i male osi, kružna i eliptična gibanja često se javljaju u svakodnevnim situacijama.

Svima je poznata konstrukcija elipse temeljena na njejoj metričkoj definiciji: *Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$ od dviju čvrstih točaka F_1 i F_2 konstantan, što skraćeno zapisujemo $E = \{T : r_1 + r_2 = 2a\}$.* Pritom čvrste točke elipse nazivamo fokusima, a spomenuta konstanta $2a$ jednaka je duljini velike osi elipse. No, u praktičnoj primjeni češće se uočava primjena učenicima manje poznate konstrukcije poznate pod nazivom „mehanička konstrukcija elipse” (ponekad se naziva i konstrukcija elipse pomoću trake papira). Prikaz jedne od sprava za crtanje elipsi, elipsografa, koja je koristila ovu mehaničku konstrukciju istaknut je na Slici 1. (preuzet s <https://www.si.edu/spotlight/ellipsographs>), a za ovaj rad nadopunjen je pomoćnim matematičkim objektima: kolinearnim točkama P , Q , R te istaknutim pravokutnim Kartezijevim koordinatnim sustavom u ravni ni položenim tako da velika os elipse leži na x -osi.



Slika 1. Elipsograf



Slika 2. Konstrukcija elipse pomoću trake

Sama konstrukcija elipse je sljedeća (Slika 2.): Ako na jednoj čvrstoj ravnoj spojnici (poluzi, papiru, traci, spojnici...) duljine $a = |PR|$ odaberemo čvrstu točku Q tako da vrijedi $b = |QR|$, pa tu spojnicu pomičemo u ravnini tako da točka Q putuje duž jednog pravca (velika ili glavna os), a točka P duž njemu okomitog pravca (mala ili sporedna os), krajnja točka R spojnice gibat će se po elipsi. Mjere a , b određivat će redom duljine velike, odnosno male poluosi elipse.

Slijede dva primjera matematičkog modeliranja koja uključuju problem „dina-mične geometrije”, a temelje se na istaknutoj mehaničkoj konstrukciji elipse. Problemi ovakvog tipa ubrajaju se u probleme dinamične geometrije, geometrije gibanja, neovisno o korištenom pomoćnom alatu (geometrijski pribor ili računalni program) i pogodni su za rad u grupi. U zadacima koji slijede cilj je pronaći krivulju određenu putanjom točke prema nekom određenom geometrijskom zakonu. S geometrijskog stajališta, ovakvi zadatci pogodni su za primjenu konstrukcijske geometrijske metode mjesta koja je u dinamičnim računalnim programom podržana kroz jednostavne alate (npr. u *GeoGebri* „Locus” ili „Uključi trag”). Važno je istaknuti da se u zadacima geometrije gibanja fizikalni koncepti poput brzine, ubrzanja, sile... ne uzimaju u obzir.

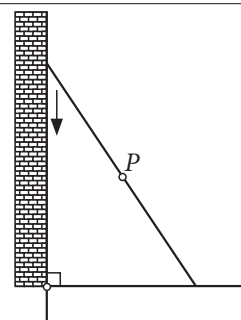


Slika 3. Realni prikaz problema

Zadatak 1. Padajuće ljestve

Ljestve stoje na ravnom tlu naslonjene uz vertikalni zid kuće pod nekim kutom. Ako ljestve počnu polako kliziti niz zid, koju putanju pritom opisuje točka polovišta ljestvi?

Obrazložite svoj odgovor.



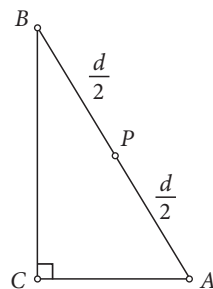
Slika 4. Situacijski prikaz problema ljestvi

Rješenje ovog klasičnog konstrukcijskog 2D problema (u općenitijoj formi, vidi Dodatak zadatku) dostupno je u svim udžbenicima nacrtne geometrije, a za potrebe ovog rada dodatno je prilagođeno realnoj problemskoj 3D situaciji koja uključuje gibanje ljestvi. Kako razumijevanje objekata u prostoru i matematički rad s njima zahtijeva rad s odgovarajućim projekcijama, u zadavanje 3D problema uključena su dva 2D prikaza koji, osim različitih razina apstrakcije, nude dvije temeljno različite vrste matematičkih projekcija: perspektivu na Slici 3., te ortogonalnu projekciju na Slici 4. Matematička metoda perspektive bliža je realističnom prikazu, ali zahtijeva više iskustva u matematičkom prepoznavanju relevantnih odnosa. Može se pretpostaviti da pojedini učenici nisu dovoljno razvili iskustva potrebna za rad s objektima u prostoru kroz njihove projekcije (početni rad s 3D konkretima uključuje gledanje i istraživanje fizikalnog modela potkrijepljeno okretanjem i promatranjem specifičnog modela iz različitih kutova) pa teško matematički čitaju crteže u perspektivi te im se mogu ponuditi prikazi problema temeljeni na pojednostavljenoj matematičkoj obradi realističnog problema (Slika 4.). Na Slici 4. istaknut je takozvani *situacijski crtež* kroz primjenu jedne ortogonalne (pravokutne) projekcije (Rellensmann, Schukajlow, Leopold, 2017.). Situacijski tip crteža uz pojednostavljeni prikaz realnog problema uključuje prepoznavanje i isticanje nekih matematički važnih struktura samog problema. Naime, jedan od važnih koraka rješavanja problema primjenom grafičke obrade uključuje izradu apstraktnog *matematičkog crteža* (Slika 5.) koji sadrži prikazivanje isključivo relevantnih pojednostavljenih značajki problema kroz njihovu apstraktnu reprezentaciju, grafičku i simboličku. Budući da pojedini učenici imaju problema pri stvaranju apstraktnih matematičkih crteža, korištenje situacijskih crteža kojima se pojednostavljeno ističe autentičnost problema, npr. ljestvi kao hipotenuze pravokutnog trokuta s istaknutom točkom polovišta P , može pomoći učenicima da prepoznaju matematičku strukturu unutar dane problemske situacije. Složenije varijante istog problema modeliranja mogle bi uključivati samo jedan, apstraktniji prikaz, ili čak samo tekstualno zadavanje zadatka, ali to je moguće ako su učenici navikli na konstrukcijsku metodu rješavanja 3D problema.

Dani problem može se rješavati korištenjem različitih pomoćnih alata (geometrijskog pribora i/ili računalnog programa). Važno je pritom istaknuti da konstrukcijsko rješavanje zadatka predstavlja, uz grafičko prikazivanje rješenja, ujedno i opisivanje i argumentiranje ispravnosti pojedinih koraka konstrukcije (što je u ovom slučaju dodatno istaknuto u samom zadavanju problema). Na taj način, konačni grafički prikaz (reprezentativna forma) sastavni je dio procesa rješavanja kroz prikazivanje. Osim toga, primijetimo da sam zadatak uključuje realni 3D problem. Prostorno razmišljanje u velikoj mjeri temelji se na mogućnosti zamišljanja i gibanja. Poznavanje svojstava i odnosa figura u prostoru nužno je da bi se riješio problem kroz provođenje odgovarajuće konstrukcije koje su vrlo često, pa tako i u ovom slučaju, ravninske (npr. crtanje ravninskog lika u prostoru zahtijeva definiranje ravnine u kojoj se lik nalazi). Primjenom jednostavnijeg situacijskog crteža početni 3D problem prelazi u jednostavniji 2D problem u odabranoj ravnini konstrukcije.

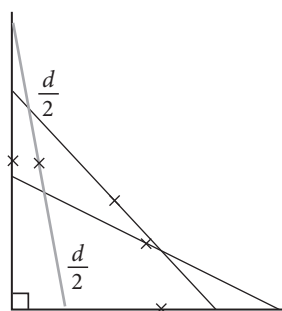
Kako se konstrukcijski zadatci u novije vrijeme rijetko prakticiraju u nastavi matematike na višim obrazovnim razinama, a dani problem dodatno u sebi ne sadrži nikakvu numeričku vrijednost, za očekivati je da dio učenika nema iskustva s ovakvim tipom problema i ne prepoznaje matematički problem u početnoj heurističkoj fazi. Sam ravninski problem sastoji se od dva dijela: i) prepoznati i opisati gibanje jedne točke dužine fiksne duljine kroz prepoznavanje uzročno-posljedičnih odnosa u danom gibanju, klizanju krajnjih točaka dužine duž para okomitih pravaca, ii) dokazati svoju pretpostavku. Početno matematiziranje nastavnika može potaknuti tipičnim pitanjima poput: Što je zadano?, Što se traži?, Što nedostaje?...

Prvi korak je kvantificiranje duljine ljestvi, npr. označimo $d = |AB|$. Slijedi prepoznavanje matematički važnih objekata i odnosa kroz stvaranje pripadnog matematičkog crteža na Slici 5. koji uključuje prikaz matematički relevantnih objekata, pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ s kvantificiranom duljinom hipotenuze i njenim istaknutim polovištem P . Nakon analiziranja jedne konfiguracije određene čvrstim položajem ljestvi, daljnji problem uključuje problem gibanja ljestvi i obrađuje se mentalno. Učenicima se prema potrebi pojam gibanja može približiti kroz formulacije pitanja poput: Kako se giba vrh A (B , C) danog trokuta pri klizanju ljestvi? Postavi vrh B tako da je točka P (na danim ljestvama) najviše/najniže pozicionirana? Što uočavaš?...



Slika 5. Matematički crtež (skica) - padajuće ljestve

Nakon što su učenici razumjeli početni problem, skiciranjem (ili konstruiranjem korištenjem pomoćnih alata kao što je istaknuto na Slici 6.) lako mogu doći do spoznaje da se polovište P dužine giba po četvrtini kružnice. Daljnji razvoj matematičke pismenosti može se poticati kroz učeničko pismeno formiranje pretpostavki koje može uključivati konkretnu problemsku situaciju (npr. P_1) ili apstraktniji matematički zapis (npr. P_2), primjerice:



Slika 6. Padajuće ljestve - niz konstrukcijskih točaka

P1. Točka polovišta P kreće se po kružnoj putanji kada ljestve „klize” niz zid.

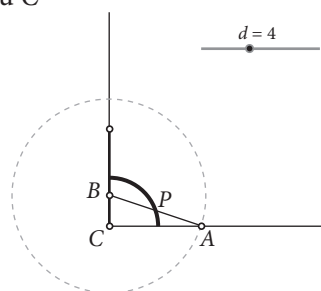
P2. Ako krajevi dužine $\overline{AB}$ klize po paru međusobno okomitih polupravaca, točka polovišta P giba se po kružnom luku sa središtem u točki sjecišta polupravaca.

Pronalaženje rješenja ovisi o korištenim pomoćnim alatima (geometrijski pribor: trokuti i šestar, ili računalni program). Suvremena pomagala učenicima olakšavaju formiranje pretpostavki, ali ponekad ne potiču na matematičko razmišljanje o karakterizaciji rješenja (uvjeti rješivosti, broj rješenja...). Primjerice, dok niz konstrukcijskih točaka na Slici 6. određen kroz skicu ili klasičan geometrijski pribor

može kod učenika pobuditi sumnju u pretpostavku, grafičko rješenje danog problema određeno korištenjem računalnog programa dinamične geometrije na Slici 7. ne samo da idealno prikazuje rješenje, već se može pogrešno smatrati i rješenjem zadatka bez ikakve daljnje argumentacije. Zanimljivo je da je u ovom zadatku nakon analiziranja problema samo rješenje primjenom dinamičnog softvera određeno primjenom samo jednog alata (npr. tipka: Lokus). Poželjno je stoga uz svaku konstrukciju prakticirati i kratko isticanje njezina opisa. Uz opis konstrukcije dinamičnim softverom na Slici 7. dodatno je istaknuta mogućnost mijenjanja početnog fiksnog parametra d kroz primjenu pomoćnog alata klizača u dinamičnom računalnom programu.

Opis konstrukcije – GeoGebra:

1. alat: klizač d (npr. tip: broj, interval: $[0,10]$ korak povećanja: 1)
2. par okomitih pravaca/polupravaca sa sjecištem u C
3. točka B na vertikalnoj dužini duljine d
4. A je sjecište:
 - a. horizontalne dužine
 - b. kružnice $k(B, d)$
5. točka P je polovište $\overline{AB}$
6. rješenje – alati:
 - „Uključi trag.” (polovište P) ili
 - „Lokus” (generator: točka B , generirani objekt P)

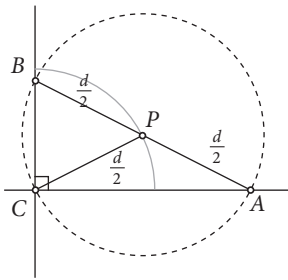


Slika 7. Trag polovišta P padajućih ljestvi u GeoGebri

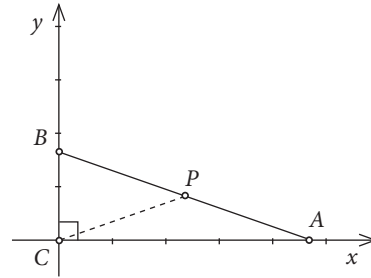
I dok se heuristička i algoritamska faza konstrukcijske obrade problema vrlo često nadopunjuju, posljednja analitička faza uključuje provjeru pretpostavke i može se zasebno promatrati nakon isticanja pretpostavki. Slijede dva tipa dokaza koja se

najčešće koriste u geometriji, a razlikuju se u metodama koje se pritom koriste. Sintetička (čista) geometrija, koja se ponekad naziva i aksiomska geometrija, temelji se na proučavanju geometrijskih problema bez upotrebe koordinata i uvelike se oslanja na mentalno baratanje objektima i geometrijski zor. S druge strane, analitička (koordinatna) geometrija proučava geometrijske objekte i njihove odnose kroz uvođenje koordinatnog sustava te njihovo povezivanje s odgovarajućim algebarskim simbolima i jednažbama.

Sintetički dokaz: Neka je $d = |AB|$. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$, tj. $|BP| = |AP| = \frac{d}{2}$. Označimo s C vrh pravog kuta trokuta. Za svaki položaj dužine $\overline{AB}$, trokut $\triangle ABC$ je pravokutan s hipotenuzom duljine d . Kako je $|\angle ACB| = 90^\circ$, primjenom Talesova poučka o obodnom kutu zaključujemo da postoji kružnica k nad promjerom AB koja sadrži točku C , tj. vrijedi $|CP| = \frac{d}{2}$ za svaki položaj dužine $\overline{AB}$. To znači da točka P uvijek leži na kružnici $k\left(C, \frac{d}{2}\right)$ za danu duljinu d .



Slika 8. Sintetički pristup rješenju



Slika 9. Analitički pristup rješenju

Analitički dokaz: Neka je $d = |AB|$. Postavimo koordinatni sustav tako da točke A i B klize po koordinatnim osima, dok čvrsti vrh C smjestimo u ishodište, tj. neka vrijedi

$$A(a, 0), B(0, b), C(0, 0), \quad a, b \in [0, d].$$

uvažavajući ograničenja položaja ljestvi iz autentičnog problema kroz ograničenja koordinata a, b . Primjenom formule za polovište dužine i Pitagorina poučka odredimo koordinate točke $P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, odnosno za $a = \sqrt{d^2 - b^2}$, $b \in [0, d]$. Kako je kanonska jednažba kružnice $k\left(C, \frac{d}{2}\right)$ sa središtem u ishodištu i polumjerom $\frac{d}{2}$

$$K: x^2 + y^2 = \frac{d^2}{4},$$

jednostavnim računom pokaže se da koordinate ovako zadane točke P zadovoljavaju ovu jednažbu kružnice, čime se pokazuje istinitost početne pretpostavke.

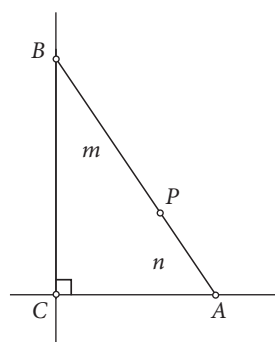
Daljnji razvoj matematičkog mišljenja može se jednostavno postići u konstrukcijskim zadacima primjenom generalizacije koja se prirodno nameće u ovom problemu, primjerice: *Što ako točka čije gibanje promatramo nije na polovištu ljestva? Koju putanju ona opisuje?*

Dodatak: Padajuće ljestve

Ljestve stoje na ravnom tlu naslonjene uz vertikalni zid kuće pod nekim kutom. Označimo na njima čvrsti položaj jedne točke P . Ako ljestve počnu polako kliziti niz zid, koju putanju pri tom gibanju opisuje odabrana točka P na ljestvama?

Obrazložite svoj odgovor.

Novi problem zahtijeva matematičku interpretaciju uključenih objekata kroz odgovarajuću kvantifikaciju udaljenosti među točkama. Uz prethodno zadanu duljinu ljestvi $d = |AB|$, neka je odabrana točka P na dužini $\overline{AB}$ tako da vrijedi $|AP| = n$, $|BP| = m$, te $m + n = d$ (Slika 10).

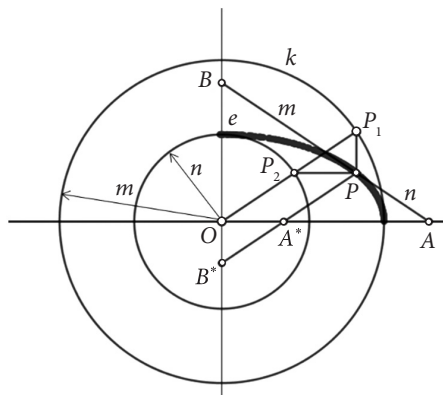


Slika 10. Skica općenitog problema ljestava

Ova složenija konstrukcija pogodnija je za obradu primjenom računalnog programa. Kao što je istaknuto, opis konstrukcije kroz primjenu dinamičkog softvera sastavni je dio grafičkog prikaza, ali ovdje se neće isticati jer njegov opis uglavnom prati korake uz Sliku 7. Nakon zadanja konstrukcije i aktiviranja tipke „Locus” ili opcije „Uključi trag”, pretpostavka problema lako se formira, npr.

P3. Po volji odabrana točka T kreće se po eliptičnoj putanji kada ljestve „klize” niz zid.

Ovisno o položaju točke P , vrijedi li $m > n$ ili obratno, elipsa će biti izdužena u smjeru horizontalnog, odnosno vertikalnog pravca. Istaknimo i u ovom slučaju dva različita načina dokazivanja pretpostavke.



Slika 11. Mehanička konstrukcija elipse

Sintetički pristup u ovom složenijem razmatranju problema padajućih ljestvi temelji se na primjeni afinog preslikavanja koje ističe važnu vezu između elipse i kružnice, i dostupan je u različitoj literaturi (npr. Palman, 1996.). Konstrukcijski (uz pomoć geometrijskog pribora) se točke elipse određuju kroz crtanje dviju koncentričnih kružnica polumjera određenih duljinama velike i male poluosi elipse (na Slici 11. istaknuta je konstrukcija uz uvjet $m > n$). Danim mjerama m, n , pri čemu je $m + n = d$, određene su dvije koncentrične kružnice $k(0, m)$ i $k_1(0, n)$. Gibanja točaka P_1, P_2 po ovim kružnicama jednoznačno određuju gibanje položaja točke P po elipsi. Sama konstrukcija temelji se na ortogonalnoj afinosti zadanoj svojom osi, pravcem OA i parom pridruženih točaka P_1, P kojim se kružnica $k(0, m)$ (polumjera velike poluosi elipse) preslikava u elipsu E duljina poluosi m , odnosno n . U ovom ćemo radu samo pojasniti poveznicu ove konstrukcije s ranije spomenutom mehaničkom konstrukcijom elipse. Naime, zrcaljenjem točke A oko pravca PP_1 određen je položaj točke A^* pa vrijedi $|PA^*| = n$. Slično, zrcaljenjem točke B oko pravca PP_2 određen je položaj točke B^* i vrijedi $|PB^*| = m$, odakle slijedi poznata mehanička konstrukcija na fiksnu dužinu $|PB^*| = m$ duljine velike osi elipse uz gibanje točaka A^* i B^* po paru okomitih pravaca.

Analitički dokaz: Koordinatni sustav neka je položen tako da točke A, B leže na koordinatnim osima, tj. vrhovi pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ su redom

$$A(a, 0), B(0, b), C(0, 0),$$

uz uvjete $a, b \in [0, d]$ i $d = |AB|$. Neka je točka P na dužini $\overline{AB}$ tako da vrijedi $|AP| = n$ i $|BP| = m$, uz $m + n = d$. Koordinate točke $P(P_x, P_y)$, određuju se iz uvjeta

$$|CP_x| : |CA| = m : d, \quad |CP_y| : |CB| = n : d,$$

odakle slijedi $P\left(a \cdot \frac{m}{d}, b \cdot \frac{n}{d}\right)$. Kanonska jednadžba elipse E s poluosima m , odnosno n (Slika 12.) sa središtem u ishodištu je

$$E: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

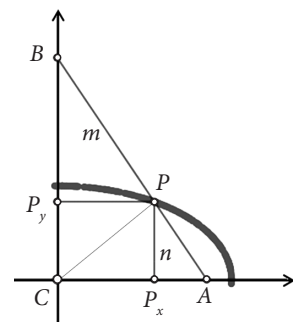
pa je dovoljno pokazati da koordinate točke P zadovoljavaju relaciju

$$n^2 x^2 + m^2 y^2 = m^2 n^2.$$

Uvrštavanjem koordinata, te uvažavajući činjenicu da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan, tj. $a^2 + b^2 = d^2$, za svaki $a, b \in [0, d]$ slijedi

$$n^2 \left(a \cdot \frac{m}{d}\right)^2 + m^2 \left(b \cdot \frac{n}{d}\right)^2 = \frac{m^2 n^2}{d^2} (a^2 + b^2) = m^2 n^2,$$

odnosno pokazali smo da točka P leži na elipsi E .



Slika 12. Analitički pristup rješenju

Uočimo da se u analitičkom dokazu ne razlikuje položaj točke P kroz uvjet $m > n$. Nadalje, ovako uveden koordinatni sustav olakšava i analitičku obradu danog ortogonalnog afinog preslikavanja na Slici 11. kroz pripadnu jednadžbu

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = \frac{m}{n} y$$

kojom se kružnica K nad velikom poluosi elipse sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava

$$K: x^2 + y^2 = m^2$$

preslikava u elipsu E danu jednadžbom

$$\hat{x}^2 + \left(\frac{m}{n} \hat{y}\right)^2 = m^2, \text{ odnosno } \frac{\hat{x}^2}{m^2} + \frac{\hat{y}^2}{n^2} = 1.$$

Zadatak 2. Garažna vrata

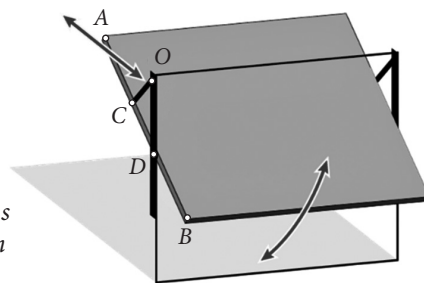


Pažljivo promotri dani mehanizam i odredi koju putanju pri danom rotacijskom gibanju poluge OC opisuju krajnje točke garažnih vrata, točke A , B ?

Obrazloži svoj odgovor.

Jedan od jednostavnijih i češćih tipova pomičnih garažnih vrata dan je na Slici 13. Ovaj tip vrata poznat je pod nazivom garažna vrata s nadstrešnicom, <https://www.accessgaragedoors.com/mechanism/> budući da u potpuno otvorenom položaju dio vrata čini nadstrešnicu na vanjskom dijelu.

Slika 13.
Garažna vrata s nadstrešnicom



Problem ovakvog tipa je složeniji budući da uključuje vezu između nekoliko geometrijskih gibanja koja su u ovom slučaju zadana grafički. Proučavanje geometrijskih svojstava gibanja sastavni je dio kinematičke geometrije koja je posebno važna za razumijevanje principa rada različitih mehanizama. Radi olakšavanja razumijevanja problema, crtež preuzet s web stranice oglašivača garažnih vrata dodatno je nadopunjen isključivo elementima važnim za matematičko razumijevanje rada mehanizma: točkama A , B , C , D i O istaknutim na Slici 13. Istaknuti situacijski crtež zahtijeva daljnju ravninsku obradu u ravnini određenoj istaknutim točkama.

Iako se dani problem sastoji u prepoznavanju mehanizma kroz opisivanje gibanja krajnjih točaka A i B garažnih vrata na temelju danog grafičkog prikaza, moguće je kroz učeničku raspravu potaknuti i „čitanje” i „interpretiranje” gibanja svih 5 točaka uključenih u rad mehanizma. Sa slike učenici trebaju prepoznati kružno gibanje

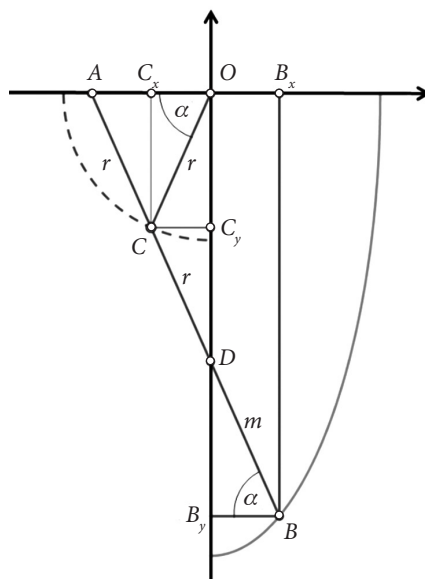
poluge čvrste duljine $|OC|$ oko fiksne točke O na čiji su krak C položena vrata AB . Osim toga, uočavamo istaknuta linearna gibanja točaka A i D . Gibanje točke B ne može se očitati direktno sa slike, već zahtijeva daljnju analizu problema kroz izradu pripadnog matematičkog crteža (Slika 14.). Na crtežu je dodatno istaknuta krivulja gibanja točke B kroz primjenu alata „Locus”.

I u ovom zadatku nisu zadane numeričke vrijednosti. Dani problem matematizirat ćemo kroz ubacivanje ravninskog koordinatnog sustava duž čijih se osi pravocrtno gibaju točke A odnosno D . Nadalje, poluga CO određuje gibanje točke C duž četvrtine kružnog luka. Neka je $r = |CO|$. Kako je trokut $\triangle AOD$ pravokutni, za svaki položaj točaka A i D mora vrijediti $|CD| = |CO| = |AC|$ (vidi Zadatak 1). Nadalje, neka je $d = |AB|$. Očito za svaki položaj točke D na vertikalnom pravcu vrijedi $m = |BD|$ uz $m + 2r = d$.

Nakon analize slijedi konstrukcija primjenom računalnog programa čiji mogući opis (uz npr. zadavanje numeričkih mjera $r = 4$, $d = 10$, ili određivanja klizača za varijable r , d kao u Zadatku 1) može biti:

Opis konstrukcije (garažna vrata) – GeoGebra:

1. par okomitih pravaca/polupravaca sa sjecištem u O
2. kružnica $k(O, r)$, $\frac{1}{4}$ kružnog luka u III. kvadrantu
3. točka C na kružnom luku
4. A je sjecište:
 - a. horizontalne dužine
 - b. kružnice $k(C, r)$
5. D je sjecište:
 - a. vertikalne dužine
 - b. kružnice $k(C, r)$
6. pravac AD
7. B je sjecište:
 - c. pravca AD
 - d. kružnice $k(A, d)$
8. rješenje: „Lokus” (generator: točka C , generirani objekt B)



Slika 14. Matematički prikaz rada garažnih vrata

Slijedi formiranje pretpostavke na temelju rješenja računalnog programa, npr.

P4. Krajnja točka garažnih vrata B kreće se po eliptičnoj putanji otvaranjem garažnih vrata.

U formiranje pretpostavki mogu se uključiti i osnovni elementi elipse (položaji i mjere u odnosu na danu konfiguraciju: središte elipse, velika os, mala os).

Dokaz pretpostavke slijedi iz matematičkog opisa gibanja mehanizma. Potrebno je uključiti uzročno-posljedične veze (pravocrtno i kružno gibanje) pa je najbolje rad mehanizma vezati uz promjenu kuta kružne poluge OC, tj. $\alpha = |\angle AOC|$ za $\alpha \in [0, 90^\circ]$. Primjenom trigonometrijskih funkcija određuju se varijabilne koordinate točaka A, B, C, D uključene kroz geometrijsku konfiguraciju u rad mehanizma. Kako je $|\angle AOC| = |\angle OCC_y| = |\angle DBB_y|$, lako se pokaže da vrijedi

$$A(-2r \cos \alpha, 0), C(-r \cos \alpha, -r \sin \alpha), D(0, -2r \sin \alpha),$$

odnosno $B(B_x, B_y) = (m \cos \beta, -m \sin \alpha - 2r \sin \alpha)$.

Kako bismo dokazali da se točka B giba po eliptičnoj putanji, dovoljno je pokazati da njene koordinate zadovoljavaju kanonsku jednadžbu elipse sa središtem u O duljine velike poluosi d (položene u smjeru y -osi) i male poluosi m (položene u smjeru x -osi),

$$E: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

odnosno $d^2 x^2 + m^2 y^2 = d^2 m^2$ uz $d = 2r + m$. Jednostavan račun primjenom trigonometrijskih identiteta pokazuje istinitost pretpostavke.

Mali komentar za kraj: dokazivanje i konstruiranje tradicionalno su predstavljale jedne od temeljnih aktivnosti u nastavi geometrije, ali se danas sve rjeđe prakticiraju unutar nastavnog procesa. Aktivnost dokazivanja u nastavi matematike predstavlja sve veći izazov, ne samo u svom provođenju, već poglavito u motivaciji učenika koji često ne nalaze praktičan smisao u ovom važnom matematičkom procesu. S druge strane, pojavom suvremenih digitalnih pomagala i aktivnost konstruiranja rijetko se prakticira u redovnoj nastavi – dijelom zbog manjka vremena, a dijelom zbog manjka razvijenosti niza praktičnih vještina učenika (korištenje geometrijskog pribora/poznavanje rada s računalnim programima). Pritom se zaboravlja važna metodička uloga koju aktivnost konstruiranja ima u nastavi geometrije kroz implementiranje određenih vještina; od uvođenja geometrijskih koncepata i njihovog međusobno umrežavanja do rješavanja i analiziranja problemskih zadataka. Jedan od načina jačanja učeničke motivacije za dokazivanjem leži u povezivanju aktivnosti dokazivanja i konstruiranja, te poticanju učenika na formiranje i dokazivanje (ili opovrgavanje) vlastitih pretpostavki. Brojni zadatci pogodni za primjenu konstrukcijske metode mogu se pronaći u različitoj literaturi (Palman, 1996.; Laštro, 2014.; Mladinić i Rado-

vić, 2021.), a dodatni izazov u razvoju matematičkog rasuđivanja je, uz konstrukcijsku obradu, i njihova daljnja analitička obrada.

Literatura:

1. Apatić, D. (2016.) Modeliranje, diplomski rad, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek
2. Bahun, M. (2014.) Napredne teme iz geometrije prostora u nastavi matematike, diplomski rad, PMF – Matematički odsjek, Zagreb
3. Baranović, N., Baras, I, Kožul Blaževski, R. (2020.) Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati, Poučak 81, str. 13 – 33
4. Gusić, J. (2011.) Matematičko modeliranje u srednjoj školi, Poučak 45, str. 48 – 61
5. JMC - Teaching and learning geometry 11 – 19 (Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group, (2001.)
<https://royalsociety.org/-/media/policy/publications/2001/9992.pdf>
6. Laštro, I. (2014.) Geometrijska mjesta točaka, diplomski rad, PMF – Matematički odsjek, Zagreb
7. Mladinić, P., Radović, N. (2021.) Teleskop i drugi uređaji – primjeri i primjene krivulja drugog reda, Poučak 88, str. 27 - 38
8. Palman, D. (1996.) Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb
9. Rellensmann, J., Schukajlow, S., Leopold, C. (2017.) Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance, Educ. Stud. Math. 95, str. 53 - 78
10. Weigand et al. (2018.) Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, 3. erweiterte und überarbeitete Auflage, Springer