

Translacijske plohe u graditeljstvu

MAURA JURIĆ¹ I LIDIJA PLETENAC²

Sažetak

Translacijske plohe euklidskog prostora E^3 , pogodne za primjenu u graditeljstvu, prikazane su i razvrstane prema svojstvima developabilnosti, prema Gaussovoj zakrivljenosti te prema generatornim krivuljama. Istaknute su plohe koje su ujedno translacijske i rotacijske. Za svaku skupinu ovih ploha modelirani su primjeri moguće primjene u graditeljstvu. Uz prikladne tehnike modeliranja (Rhinoceros) izrađeni su 3D modeli ovih ploha. Obrazovanje budućih inženjera treba nuditi šira geometrijska znanja i kompetencije za kreativnu primjenu ploha.

Ključne riječi: translacijske plohe, zakrivljenost, CAD modeliranje ploha, primjena ploha, svojstva ploha

1. Uvod

Geometrijske karakteristike objekta temelj su svakog projekta u graditeljstvu. Nazivaju se „geometrija konstrukcije”, a određuju oblike, dimenzije i položajne relacije objekata u prostoru. Postoji direktna veza između oblika konstrukcije i raspodjele sila i naprezanja, stoga su geometrijska svojstva plohe od fundamentalnog značaja za ponašanje konstrukcije pod opterećenjem. O njima ovisi odabir najprikladnije plohe u skladu sa zahtjevima projekta. Izbor geometrijskih oblika sve je širi jer su tehnološke barijere sve manje izražene.

Inženjer uz pomoć softvera lako može modelirati plohe i ispitivati njihova svojstva ako kreativno poveže znanja iz matematike i geometrije s odgovarajućim mogućnostima softvera. Razvoj tehnologije građenja pomiče granice izvedivog pa traži bolje kompetencije budućih inženjera. Međutim, smanjene satnice geometrije i matematike na studiju poslodavac osjeti kroz slabije snalaženje pripravnika na poslu.

U radu je prikazan pregled translacijskih (kliznih) ploha prema njihovim svojstvima i 3D-modeliranje tih ploha u Rhinocerosu, te mogućnosti njihove široke primjene u graditeljstvu. Posebno su pogodne za primjenu developabilne (razvojne) plohe tj. one koju je moguće razviti u ravninu. Pravčasta ploha je nedevelopabilna

¹Maura Jurić, Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci

²Lidija Pletenac, Rijeka

kad su joj izvodnice mimoilazne. Algebarske i transcendentne plohe mogu (osim jednadžbom) biti definirane specijalnim geometrijskim ili fizikalnim svojstvima, što ima niz prednosti: preglednije je, pogodno za CAD-modeliranje i svrsishodnije kod dizajniranja objekta.

2. Potrebe pri projektiranju i dizajniranju objekata

Kad su nosivi elementi u obliku dvaju skupova krivulja, ravnalica i izvodnica plohe, pogodan je geometrijski pristup modeliranju. Kod nekih objekata potrebno je da svi profili konstrukcije budu istog oblika i dimenzija. Nekad se traži bolja sklopivost montažnih konstrukcija, a nekad jednostavna izrada klizne oplata kod betonskih konstrukcija (cilindričnih ljuski), što smanjuje cijenu objekta. Zbog funkcionalnih i estetskih zahtjeva sve širu primjenu imaju plohe višeg reda.

Modeliranje u 3D doprinosi racionalizaciji pri projektiranju jer se na animiranom 3D modelu objekta lakše mogu uočiti potrebne izmjene i isprobati njihova funkciju.

3. Geometrija translacijske (klizne) plohe

3.1 Generiranje plohe

Translacijska ili klizna ploha geometrijsko je mjesto točaka euklidskog prostora E^3 koje nastaje translacijom (klizanjem) jedne krivulje (*generatrise*) po drugoj krivulji (*direktrisi*), tako da točka prve krivulje opisuje drugu. Te početne krivulje ne smiju ležati u istoj ravnini. Ista ploha nastaje i kad krivulje zamijene uloge, tj. klizanjem direktrise po generatrisi. Iz toga slijedi da na kliznim plohama postoje dva sustava generirajućih krivulja koje se mogu uzeti za parametarske krivulje. Kad su početne krivulje (generatrisa i direktrisa) algebarske krivulje, nastaje algebarska translacijska ploha. Trivijalni slučaj translacijske plohe je ravnina.

3.2 Zakrivljenost translacijske plohe

3.2.1. Glavne zakrivljenosti

Kako normalom plohe prolazi beskonačno mnogo ravnina, na plohi se dobiva isto toliko *normalnih presjeka* čija zakrivljenost³ u promatranoj točki T varira između dviju ekstremnih vrijednosti koje se uvijek pojavljuju u dvjema međusobno okomitim ravninama (1). Najveća i najmanja vrijednost tih normalnih zakrivljenosti su tzv. *glavne normalne zakrivljenosti* ili, kraće, glavne zakrivljenosti (*principal curvatures*) κ_1 i κ_2 plohe u točki T :

$$\kappa_1 = 1/R_1, \quad \kappa_2 = 1/R_2 \quad (1)$$

³Zakrivljenost κ ravninske krivulje c u nekoj točki definira se kao recipročna vrijednost radijusa R oskulacijske kružnice krivulje za tu točku ($\kappa = 1/R$).

pri čemu su R_1 i R_2 radijusi glavnih zakrivljenosti u promatranoj točki T . Smjerovi tangenti na plohu, u kojima se pojavljuju glavne zakrivljenosti κ_1 i κ_2 , zovu se *glavni smjerovi*.

Softver Rhinoceros nudi prikaz kružnica tih glavnih zakrivljenosti za svaku točku plohe, vrlo jednostavno naredbom: *Analyze, Curvature circle*.

Zakrivljenost duž cijele promatrane krivulje na plohi može se grafički prikazati kad se odabere naredba: *Analyze, Curve, Curvature Graph On* i podesi vrijednosti *Display scale*.

3.2.2 Gaussova zakrivljenost

Gaussova zakrivljenost plohe u nekoj točki definira se kao produkt glavnih zakrivljenosti:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 1/R_1 R_2 \quad (2)$$

Rhinoceros nudi grafički prikaz Gaussove zakrivljenost plohe u svakoj točki naredbom: *Analyze, Surface, Curvature Analyses, Gaussian*. S obzirom na Gaussovu zakrivljenost, translacijske plohe mogu imati tri vrste regularnih točaka:

1. Točke s pozitivnom zakrivljenošću $K > 0$ su **eliptične točke**. (Primjer: kugla, elipsoidi...). Sve normalne zakrivljenosti imaju isti predznak, a dirna ravnina plohu dotiče samo u promatranoj točki T i nigdje drugdje u okolini te točke. Ploha je „ovalna” (*synclastic surface*). Ove plohe nisu developabilne.
2. Točke s negativnom zakrivljenošću $K < 0$ su **hiperbolične točke** plohe. One tvore hiperbolične plohe koje su također nerazvojne (hipar). Normalna zakrivljenost u promatranoj točki T dvaput mijenja predznak, dok normalna ravnina rotira oko normale. Smjerovi u kojima poprima vrijednost 0 zovu se tangente infleksije plohe u točki T . Stoga dirna ravnina u T (Slika 1.) siječe plohu u paru krivulja koje prolaze točkom T i tangiraju ove tangente infleksije [1]. Ploha je „sedlasta” (*anticlastic surface*).
3. Točke s jednostrukom zakrivljenošću $K = 0$ su **parabolične točke** plohe (Primjer: konusi, cilindri i torze). Parabolične plohe su developabilne.

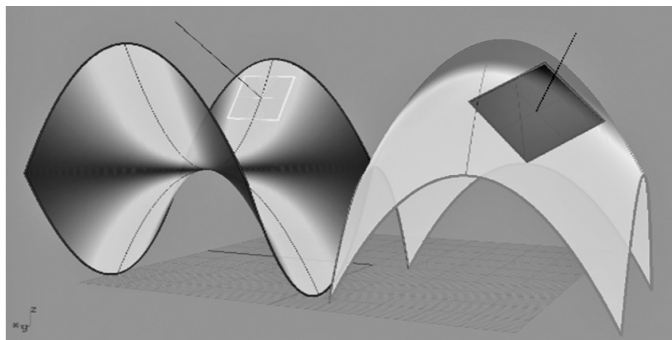
Svaka klizna ploha 2. stupnja (kvadrika) ima samo jednu od tih triju vrsta točaka. Plohe višeg stupnja mogu imati eliptična i hiperbolična područja, odijeljena krivuljama koje se sastoje od paraboličnih točaka. Plohe i dijelovi ploha s negativnom Gaussovom zakrivljenošću od posebnog su značaja u konstrukterstvu jer najbolje odolijevaju promjeni oblika pri opterećenjima te daju stabilnost vlačnih konstrukcija. Imaju tzv. geometrijsku krutost.

3.2.3 Srednja zakrivljenost

Srednja zakrivljenost (*mean curvature*) H neke plohe u točki T definira se kao prosjek glavnih normalnih zakrivljenosti:

$$H = \frac{1}{2} (1/R_1 + 1/R_2) \quad (3)$$

gdje R_1 i R_2 označavaju radijuse glavnih zakrivljenosti. Uz pomoć Rhinocerosa možemo brzo provjeravati glavne normalne zakrivljenosti plohe u svakoj točki, kao i srednju zakrivljenost. Na Slici 1. srednja zakrivljenost prikazana je postupkom: *Analyse, Surface, Curvature Analyses, Mean, Auto Range*. Rang je postavljen tako da tamna boja odgovara vrijednosti 0, što ukazuje da je hipar približno minimalna ploha.



Slika 1. Hiperbolični paraboloid eliptični paraboloid s dirnom ravninom i normalom u općoj točki

4. Klasifikacija translacijskih ploha

Translacijske plohe mogu se grupirati prema kriteriju oblika krivulja iz kojih se generiraju, prema zakrivljenosti ili po kriteriju developabilnosti. Postoji 6 tipova ovih ploha:

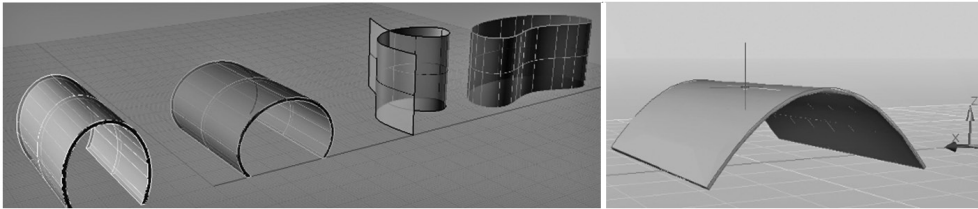
1. **Cilindrične** (valjkaste) **plohe** ili generalizirani cilindri su plohe jednostruke zakrivljenosti, koje se generiraju translacijom pravca kao generatriše. Imaju Gaussovu zakrivljenost $K = 0$.
2. **Eliptični i hiperbolični paraboloid** imaju parabolu za generatrisu (Slika 1). Obje su plohe dvostruko zakrivljene pa nisu developabilne. Eliptični paraboloid ima $K > 0$ a hiperbolični $K < 0$.
3. **Češka kupola** (*Bohemian dome*) ima za generatrisu elipsu ili kružnicu (primjeri na Slikama 12. i 13.). Ovo je dvostruko zakrivljena nedevelopabilna ploha 4. stupnja. Na njoj postoje područja s $K > 0$, s $K = 0$ i područja s $K < 0$.
4. **Helikoid** (uspravna zavojna ploha) pravčasta je ploha s beskonačno mnogo zavoja. Ona je transcendentna i ne može se razviti u ravninu.
5. **Valovite plohe** poput valovite ambalaže (egg-box surface) nastaju gibanjem sinusoide ili neke periodične krivulje po drugoj takvoj krivulji. Ove plohe nisu developabilne.
6. **Minimalne plohe** imaju minimalnu površinu za fiksne rubne uvjete. Nisu razvojne, a karakterizira ih srednja zakrivljenost jednaka nuli $H = 0$.

Translacijska ploha može ujedno biti i rotacijska ploha. Dva dobro poznata slučaja su: rotacijski paraboloid i rotacijski valjak. Dakle, ako translatornim gibanjem (klizanjem) želimo generirati rotacijsku kupolu (za neku pomičnu ili montažnu konstrukciju), ploha mora biti jedino rotacijski paraboloid. Kod svodova to je rotacijski valjak. Postoji još jedna manje poznata ploha nastala translacijom zavojnice po zavojnici [2].

5. Modeliranje i primjena translacijskih ploha

5.1 Cilindrične plohe

Cilindri su pravčaste plohe koje nastaju kad pravac (generatrisa) klizi po krivulji (direktrisi) i ostaje sam sebi paralelan (Slika 2.). Rhino-model lako se izvede naredbom: *Extrude Curve, Along Curve*. Naziv i stupanj plohe ovisi o tome kakva je krivulja direktrisa. Tako npr. eliptični, parabolični (Slika 2.) ili hiperbolični valjak nastaje klizanjem pravca po odgovarajućoj konici. Cilindri mogu biti plohe drugog i višeg stupnja, algebarske i transcendentne. Cilindri su jedina skupina kliznih ploha, konstantne Gaussove (nulte) zakrivljenosti: $K = 0$. Zbog jednostruke zakrivljenosti ove plohe mogu se dobiti savijanjem ravnih nerastezljivih materijala (poput limova). U CAD-u se mogu lako razviti jednom naredbom (Rhino: *Unroll Developable Srf*).



Slika 2. Cilindrične plohe

Kosi cilindri (valjci) nastaju ako ravnina krivulje nije okomita na pravac. Cilindrične plohe česte su u primjeni: od paraboličnih valjaka (Slika 2.) kod lučnih konstrukcija, hala ili prijelaza autoceste, preko eliptičnih valjaka raznih tunela, do zidova u obliku valjaka 3. i 4. stupnja, itd. Za razliku od površinskog CAD modela (*Extrude Curve, Along Curve*), za puni (solid) model treba modelirati plohu profila objekta te iz nje izvući puni model (*Extrude*) ili površinskom modelu dodati debljinu ljuske.

Lučni mostovi oblikovani su nad paraboličnim valjkom: poznato je da je krivulja lančanica najpovoljniji oblik osi luka kod velikih raspona. Idealni oblik određuje se iz statičkih uvjeta. Luk se može modelirati tako da lančanicu aproksimiramo parabolom ili njoj vrlo sličnom krivuljom koja ne odstupa bitno od područja kroz koje prolaze sve proračunate tlačne krivulje. Optimalan omjer strelice luka i raspona je oko 1 : 5 (proračun u radu [4]).

Zbog širine lučnog nosača podgled mosta dobiva oblik klizne plohe, odnosno paraboličnog cilindra. Oblik luka direktno utječe na reakcije u osloncima: one su

u smjeru tangenti parabole u tim točkama. Promjena nagiba te tangente uzrokuje znatne promjene vrijednosti reakcija. Zanimljivo je da kod optimalnog oblika luka, tangente u točkama oslonaca teže kutu od 45° prema vertikali, što znači da su točke parametra parabole blizu točaka oslonaca.

Preljevne plohe kanala, bazena ili vodotoka imaju oblike translacijskih ploha. Profil te plohe je krivulja, ravnalica, po kojoj klizi pravac.

Cilindri su prikladni za natkrivanje objekata (sportskih, turističkih, izložbenih, lječilišnih, itd) ili za pomične konstrukcije koje funkcioniraju na principu translacije. Primjer: (Slika 3.) pomična lučna konstrukcija za zaštitu kućnih bazena zimi.

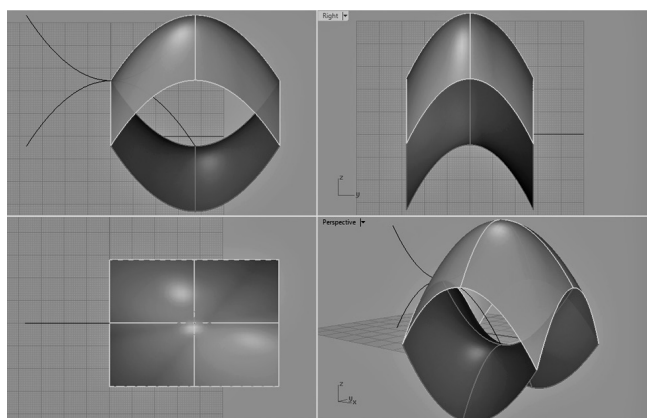


Slika 3. Teleskopska konstrukcija za bazen i cilindrični krov dvorane

Ove su plohe prikladne za natkrivanje i pokretne trake na skijalištu. Česta je primjena translacijskih ploha kod natkrivanja ulaza, stubišta, te za natkrivanje pasaza između dviju zgrada (npr. fakulteta i laboratorija itd.). Najšira primjena valovitih cilindara su valoviti krovni pokrovi.

5.2 Eliptični i hiperbolični paraboloid

Klizanjem jedne parabole (generatriše) po drugoj, fiksnoj paraboli (direktrisi), koje ne leže u istoj ravnini ali su im osi paralelne, nastaje paraboloid. Kakav, to zavisi od orijentacije parabola: ako su obje te krivulje konveksne (zakrivljene na istu stranu), nastaje eliptični, a ako nisu, nastaje hiperbolični paraboloid, tzv. hipar (Slika 4.).



Slika 4. Gornja ploha je eliptični, a donja hiperbolični paraboloid prikazan u tri projekcije i perspektivi

Za ishodište u tjemenu i os parabole na osi z analitički se paraboloid može opisati:

$$z = a x^2 + b y^2 \quad (4)$$

Predznaci koeficijenata a i b su različiti kod hiperboličnog paraboloida, a kod eliptičnog su jednaki. Iz jednadžbe je očito da su ovi paraboloidi plohe 2. stupnja, tj. *kvadrike*, pa nemaju singularnih točaka.

Imena su dobile po svojim ravninskim presjecima – horizontalnim i vertikalnim. Tako horizontalni presjeci po elipsama i vertikalni po parabolama karakteriziraju eliptički paraboloid. Horizontalne hiperbole i vertikalne parabole leže na hiperboličnom paraboloidu (hipar). Svaki presjek paralelan s osi bilo kojeg paraboloida je parabola. Tako na svakom paraboloidu postoji po jedan skup od beskonačno kongruentnih parabola u svakom skupu ravnina paralelnih s osi ove plohe! Upravo zato ploha se može generirati *translacijom*. Kod hipara se događa još nešto: te parabole degeneriraju u pravce samo u dva smjera ravnine kojom siječemo plohu. Dakle, na hiparu leže dva skupa pravaca – izvodnica, pa je on *pravčasta ploha*. Ovo svojstvo ima veliku primjenu kod objekata, posebno ljuski, u formi hipara (Slika 10.).

Premda se paraboloidi u prostoru protežu do beskonačno daleke ravnine, u primjeni nam je potreban samo dio plohe, ograničen ravninama ili drugim plohami.

5.2.1 Eliptični paraboloid

Eliptički paraboloid je nepravčasta kvadrika kojoj su sve točke eliptičke: $K > 0$. Kada su presjeci okomiti na os paraboloida kružnog oblika, paraboloid je rotacijski (Slika 5.), što znači da se može generirati rotacijom parabole oko njezine osi.

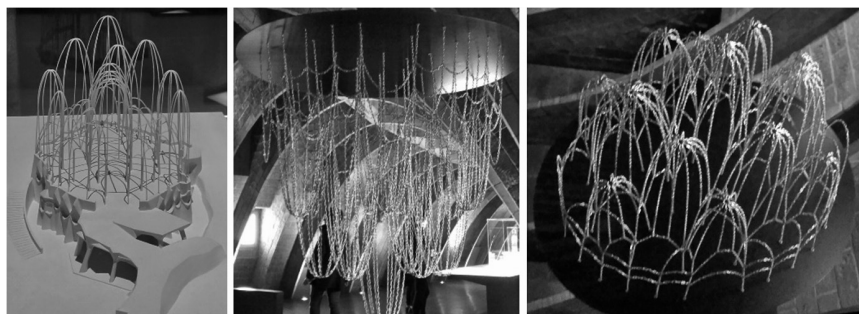


Slika 5. Rotacijski paraboloid natkriva sportsku dvoranu u Zadru

Eliptički paraboloid može se dobiti iz rotacijskog afinim transformacijama, npr. rastezanjem u željenom smjeru. Ovo se primjenjuje pri CAD-modeliranju plohe i konstruktivnoj obradi pomoću CAD-a.

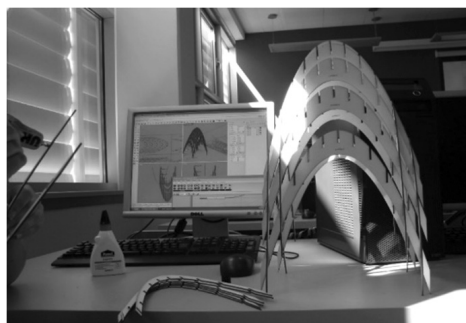
Zanimljiv primjer kupola u obliku paraboloida modeliran je na Slici 6.

Svojstvo da je paraboloid translacijska ploha (Slika 7.) koristi se pri CAD-modeliranju translacijom parabole po paraboli, naredbom (Rhino): *Surface, Extrude, Along Curve*. U sklopu ljetne škole GEFFA kroz projekt DAAD, na GF Rijeka održanoj 2012.



Slika 6. Maketa objekta, model od lanaca i njegov odraz u horizontalnom ogledalu, Barcelona, Casa Mila

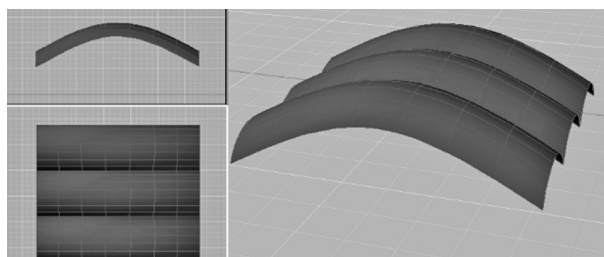
godine, modelirane su plohe u Rhinocerosu i konstruirani njihovi „krojevi” uz pomoć softvera Grasshopper. Pomoću laserskog rezača rezani su lukovi za direktrise i generatrikse koji su ručno montirani na mjesta i dobivene su makete ploha (Slika 7.).



Slika 7. Primjer računalne izrade modela u mjerilu na ljetnoj školi DAAD projekta u Rijeci, Građevinski fakultet

Zanimljiv primjer paraboloida je mreža s lampicama, zimi obješena nad klizalištem ili trgov u turističkom centru ili nad većim rasponom neke dvorane: dva sustava kabela (užadi) s međudjelovanjem nalaze se u dva međusobno okomita smjera. Točan oblik užeta je lančanica koja se (zbog male vlastite težine) približno može modelirati kao parabola.

Jedan poseban oblik lučne ljuske (Slika 8.) za natkrivanje pravokutnog tlocrta eliptičnim paraboloidima dobije se translacijom jedne parabole po većem luku druge parabole, koje leže u međusobno okomitim ravninama.



Slika 8. Primjena eliptičnog paraboloida kod ljuski

Primjer rotacijskog paraboloida je površina vode u posudi koja rotira oko svoje osi.

5.2.2 Hiperbolični paraboloid – hipar, kao translacijska ploha

Zbog svojih posebnosti ova ploha izgleda vrlo popularna kvadrika u graditeljstvu (kod ljuski, od polovine 20. stoljeća), a i studenti je najlakše upoznaju. On je vitopera kvadrika kojoj su sve točke hiperbolične: $K < 0$. Rhino-model hipara (Slika 9.) dobiva se klizanjem parabole po paraboli (*Surface, Ekstrude Curve, Along Curve*). Kod natkrivanja hale pravokutnog tlocrta, jedan od dva skupa parabola mogu biti nosivi elementi: lučni nosači svoda, oslonjeni na zidove, opterećeni su tlačno. Ako su nosači parabole otvorene prema gore oslonjeni na „zabatne” zidove, opterećeni su vlačno. Kod laganih konstrukcija za natkrivanje (Slika 9.) hipar se može primijeniti kao približno minimalna ploha.

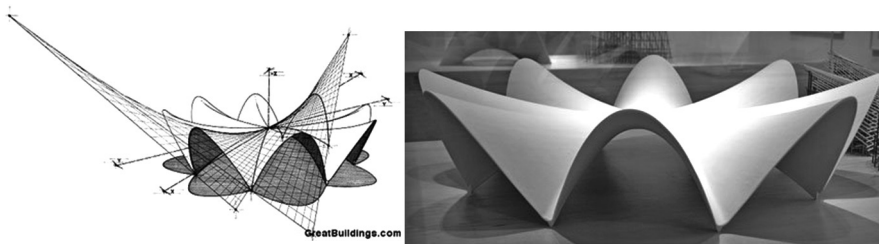


Slika 9. Hipar – klizna ploha i lagana konstrukcija u Piovene Rocchette

5.2.3. Hipar kao pravčasta ploha

Općenito, pravčasta ploha skup je pravaca neprekinuto povezanih u prostoru, koji sijeku tri krivulje – ravnalice. Svaka pravčasta ploha može se generirati gibanjem izvodnice (generatrise) koja je zajednička transverzala tih triju ravnalica (direktrisa) [8, str. 257]. Kod razvojnih ploha dvije susjedne izvodnice se sijeku, tj. leže u istoj ravnini, pa ove plohe možemo razviti. Vitopere plohe imaju mimoilazne izvodnice, a kako mimoilazni pravci nisu u istoj ravnini, ploha se ne može razviti u ravninu. Jedne i druge plohe imaju važnu ulogu u graditeljstvu: dok razvojne čine izvedbu lakšom i ekonomičnijom, vitopere daju dovoljnu geometrijsku krutost tankostijenoj konstrukciji.

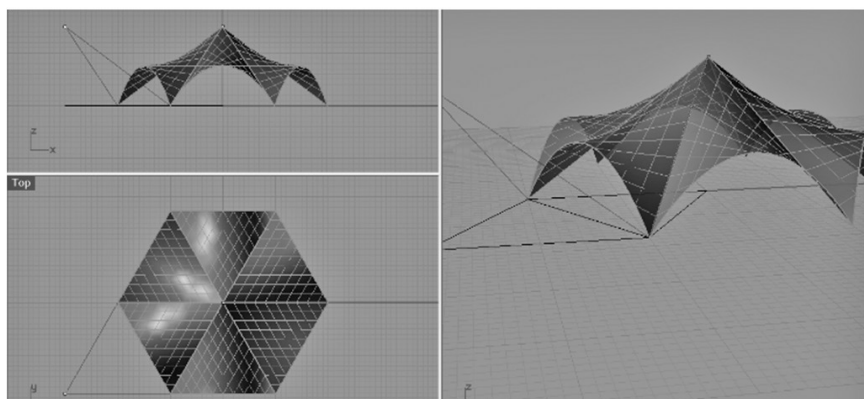
Kako hipar na sebi ima dva skupa pravaca (Slike 10. i 11.), može se modelirati i izvesti u skladu s tim svojstvom, tj. kao skup transverzala triju mimoilaznih pravaca, od kojih je jedna beskonačno daleki pravac (u direkcijskoj ravnini jednog skupa izvodnica).



Slika 10. Model za restoran Los Manantiales, Felix Candela

Međutim, dok se dvije ravnalice u konačnosti lako mogu modelirati CAD-om (naredba *Line*), treća se ne može prikazati, pa se ona mora uzeti u obzir pazeći na direkcijsku ravninu u kojoj se nalazi. Naime, problem beskonačno daleke ravnalice rješava se tako što se ravnalice u konačnosti zadaju dvjema dužinama čije početne točke leže u jednoj, a završne u drugoj ravnini, paralelnoj s direkcijskom ravninom. Kod modeliranja hipara kao pravčaste plohe model je manje precizan zbog toga što su izvodnice mimoilazne. Točniji je model hipara kao klizne plohe, izveden klizanjem parabole.

Primjena: poseban oblik lagane konstrukcije može se dobiti ponavljanjem jednog dijela hipara, kao na Slici 11.



Slika 11. Dio hipara ponavlja se 6 puta nad tlocrtom u obliku pravilnog šesterokuta. Spojevi su na pravcima.

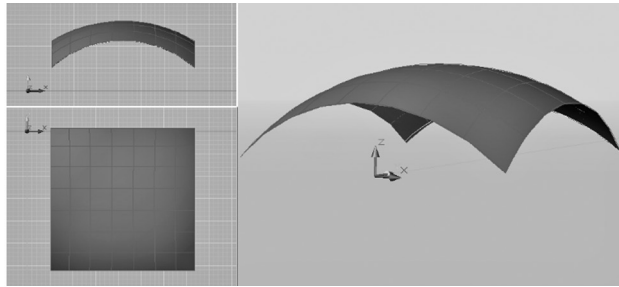
Pravčaste mreže mogu imati oblik hipara. Karakterizira ih konstantna sila duž svakog užeta. Kako je izvodnica hipara geodetska crta plohe, ovo su ujedno geodetske mreže. Zbog pravčastih izvodnica, hipar je pogodna forma za nadstrešnice pa i krovove (kad strešnice nisu paralelne, a sljeme mora biti horizontalno).

Ako biramo među ploham 2. stupnja, translacijske su plohe samo cilindri, paraboloidi i hipar. Posebno primjenljivu translacijsku plohu nalazimo među ploham 4. stupnja – kvartikama.

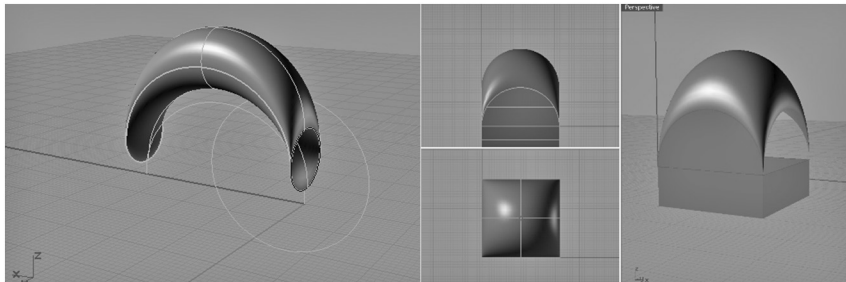
5.3 Češka kupola (Bohemian dome)

Za razliku od paraboloida, sve ostale plohe nastale translacijom konike po konici su 4. stupnja. Tako kružnica ili elipsa koja se translacijom giba po kružnici (elipsi) generira kvartiku (Slika 13.).

Kod natkrivanja kvadratnog tlocrta, dio takve plohe (Slika 12.), ograničen vertikalnim ravninama, vrlo je prikladan za oblikovanje češke kupole: jedan kružni luk klizi po drugom jednakog radijusa!



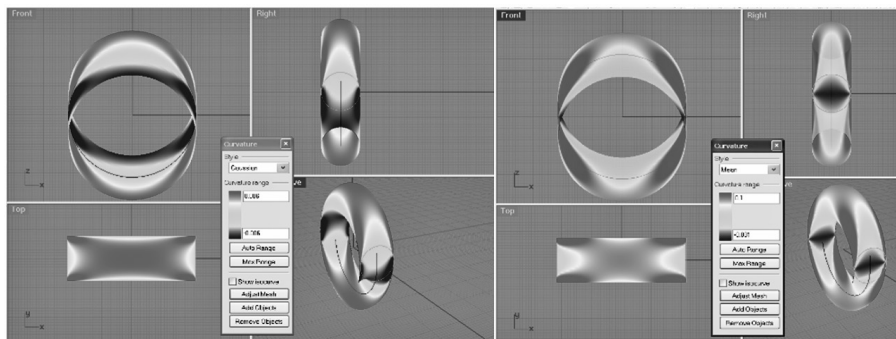
Slika 12. Model češke kupole u AutoCAD-u



Slika 13. Generiranje plohe Bohemian dome i primjena kod kupole

Modeliranje: Kad promatramo čitavu plohu, vidimo kako ova ploha siječe samu sebe u dvostrukoj krivulji. To predstavlja problem pri modeliranju cijele plohe pomoću *AutoCAD*-a i *Rhinoceros*a, dok u *Design CAD*-u to nije problem. Gornja polovina plohe na Slici 13. modelirana je translacijom manje kružnice duž veće polukružnice. Donja polovina simetrična je gornjoj, a dobije se naredbom *Mirror* (nije prikazana na slici). Ovo je dvostruko zakrivljena nedevolpabilna ploha. Na njoj postoje područja raznih vrijednosti Gaussove zakrivljenosti: područja s $K > 0$ (eliptični dio plohe), s $K = 0$ (parabolični dio) i područja s $K < 0$ (hiperbolični dio).

Pomoću *Rhinoceros*a može se prikazati Gaussova i srednja zakrivljenost plohe u svakoj točki i promatrati kako varira po dijelovima plohe (Slika 14.). Prvo treba izra-

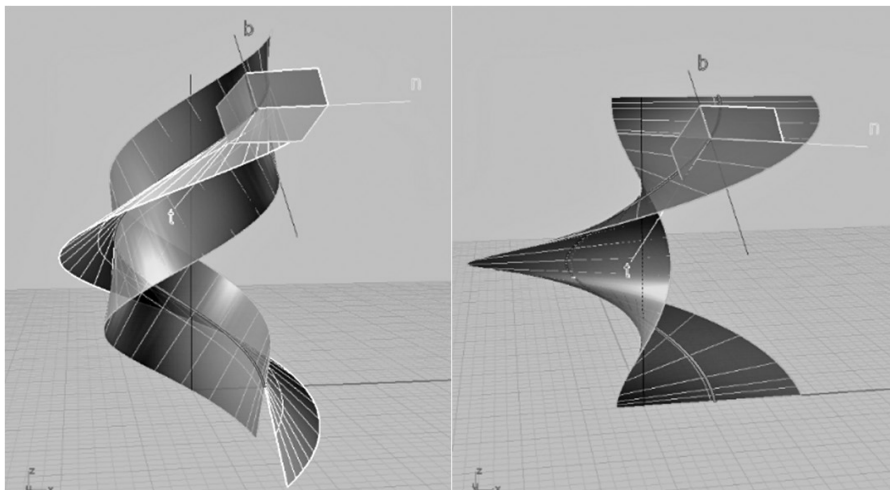


Slika 14. Rhino: Gaussova zakrivljenost plohe i srednja zakrivljenost

čunati glavne normalne zakrivljenosti κ_1 i κ_2 prema (1) prije upisivanja raspona tih vrijednosti u Rhino. Tako se dobije stvarni prilaz: eliptično područje i hiperbolično dijeli krivulja, tj. skup paraboličnih točaka plohe.

5.4 Zavojne pravčaste plohe

Zavojnice su poznate prostorne transcendentne krivulje koje mogu biti na valjku, stošcu ili kugli (loksodroma). Zavojne plohe nastaju zavojnim gibanjem neke krivulje ili pravca. Ako u svakoj točki prostorne krivulje promatramo *prateći trobrid* (tangenta t , normala n i binormala b) pa pustimo da ovaj trobrid klizi po krivulji, tada će svaki od tih pravaca, kao izvodnica, generirati jednu plohu. Tako sve *tangente* zavojnice valjka tvore developabilnu plohu: zavojnu torzu koja ima zavojnicu za grebensku krivulju (Slika 15.). Tangenta i normala krivulje određuju *oskulacijsku* ravninu. Normala i binormala određuju tzv. *normalnu* ravninu krivulje za tu točku, dok tangenta i binormala određuju *rektifikacijsku* ravninu. Binormala prostorne krivulje generira pravčastu plohu (Slika 15.) koja je anvelopa svih rektifikacijskih ravnina zavojnice i stoga uvijek okomita na oskulacijsku ravninu. To je rektifikacijska ploha krivulje koja bi se mogla zajedno s krivuljom razmotati u traku, tako da je razmotana krivulja „srednji” pravac trake. Ploha se zove *rektifikacijska torza* [3] ove zavojnice. Dakle, nastaje drugi tip torze koji se može promatrati kao anvelopna ploha dviju odabranih rubnih zavojnica ove trake.



Slika 15. Zavojna torza i rektifikacijska torza te helikoid (desno)

Analogno se može formirati rektifikacijska ploha neke druge prostorne krivulje. Takve plohe prikladne su za praktičnu primjenu jer su jednostruko zakrivljene (pravčaste) pa stoga jednostavnije za izvedbu.

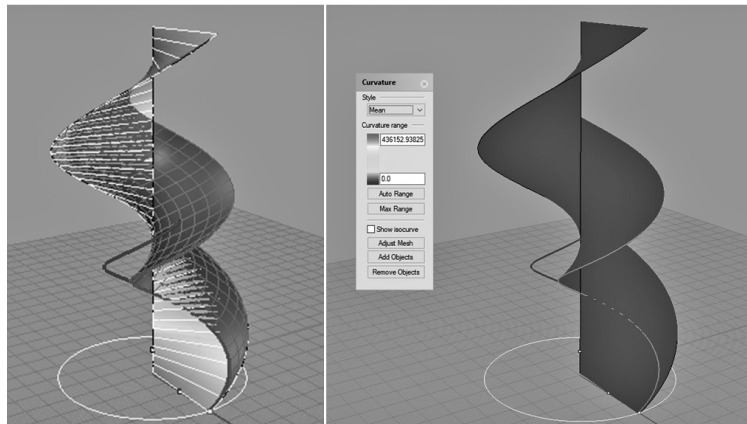
5.4.1. Helikoid

Helikoid je uspravna zavojna pravčasta zatvorena ploha (zeleni na Slici 15.) koju zavojnim gibanjem izvodi generatrisa: *normala* zavojnice (horizontalni pravac koji siječe os zavojnice). Kako helikoid nastaje klizanjem pravca po direktrisi, tako da točka prve krivulje opisuje drugu, to je očito pravčasta ploha Gaussove zakrivljenosti $K = 0$.



Slika 16. Muzej Louvre, stubište u staklenoj piramidi i dizalo u valjku

Helikoid se može izvesti translacijom zavojnice po drugoj, njoj kongruentnoj zavojnici (Slika 17.). U Rhinocerosu: *Surface, Extrude Curve, Along Curve*. On je minimalna translacijska ploha, ($H = 0$), što se može lako provjeriti naredbom: *Analyse, Surface, Curvature Analysis*.

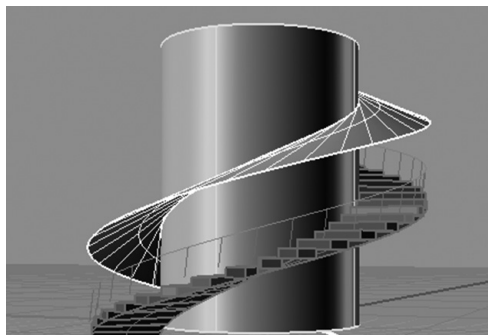


Slika 17. Dva načina izvođenja helikoida i provjera srednje zakrivljenosti u Rhinocerosu

Helikoid na Slici 17. nastaje translacijom jedne zavojnice po drugoj. Ista ploha generirana je u bijeloj boji između osi plohe i zavojnice dvostruko većeg radijusa od prethodnih. Srednja zakrivljenost jednaka je nuli u svakoj točki plohe (Slika 17.).

Primjena helikoida je mnogostruka. Najčešće je to strop kod zavojnog stubišta. Može se koristiti kao zavojna ploha spirale za dizanje vode ili pak spirale bušilice. Na Slici 16. bridovi stuba su izvodnice *helikoida*, ali podgled stubišta nije helikoid. Izveden je kao *kosa zavojna ploha* čija izvodnica nije okomita na os zavojnice.

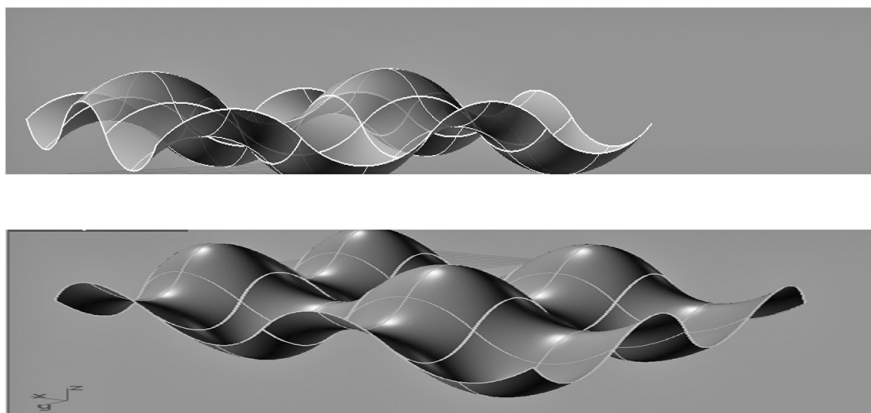
Na Slici 18. je model vanjskog zavojnog stubišta jedne stare kule (Austrija), koje ima drvenu nadstrešnicu (krov) u obliku zavojne torze.



Slika 18. Streha u obliku zavojne torze čije su izvodnice osi nosača pričvršćenih tangencijalno na zid objekta

5.5 Valovite plohe

Ponavljajući oblik vala mnogo puta, valovite plohe mogu natkriti velike površine. Na Slici 19. je model translacijske valovite plohe sastavljene od kvadrika.



Slika 19. Model valovite plohe (Rhinoceros)

Primjer vrlo originalne primjene valovite plohe u arhitekturi je pokrivanje zračne luke Barajas u Madridu (Slika 20.).



Slika 20. Zračna luka u Madridu (Wikimedia Commons)

5.6 Minimalne plohe

Minimalne plohe karakterizira minimalna površina za fiksne rubne uvjete. Stoga ih se lako može modelirati pomoću mjehurića sapunice, uz te rubne uvjete. Konstrukcije u obliku minimalnih ploha zovu se još i „prirodne konstrukcije”. Najjednostavnija minimalna ploha je ravnina, ali ona nema tzv. geometrijsku krutost potrebnu kod konstrukcija za natkrivanje velikih raspona. Minimalne plohe imaju srednju zakrivljenost $H = 0$ u svakoj točki.

Približno minimalna kvadrika je hipar, u onim svojim točkama gdje je $R_1 = -R_2$ ili približno jednak. Dakle, dio hipara u okolini tjemena parabole ponaša se kao približno minimalna ploha (Slika 1.). Ostale minimalne plohe su reda višeg od 2. Pomoću Rhinocerosa može se provjeriti u kojoj mjeri modelirana ploha ispunjava uvjet $H = 0$.

U konstrukterstvu je poznato da konstrukcija u obliku minimalne plohe u ravnotežnom stanju ima jednolika naprezanja, po mogućnosti u tangencijalnoj ravnini plohe.

6. Zaključak

Klizne plohe pružaju brojne mogućnosti primjene u graditeljstvu jer na plohi postoje dvije familije kongruentnih krivulja. Kako nastaju gibanjem krivulje po krivulji, spadaju i u tzv. kinematičke plohe.

Projektant ima velik izbor oblika pri oblikovanju složenih objekata i tankostijenih konstrukcija ako poznaje klasifikacije ploha i njihova svojstva. Treba znati kako izvesti točan, a kako približan 3D model plohe. Jednom naredbom možemo vizualizirati promjene glavnih ili srednje zakrivljenosti na 3D modelu plohe. BIM (building information modeling) koristi 3D modele u širem smislu, ne samo s geometrijskog aspekta.

7. Reference

1. Coxeter: Introduction to Geometry, John Wiley inc. New York, London, Sydney, Toronto, 1969.
2. G. Glaeser and P. Calvache, University of Applied Arts Vienna, Austria, ON TWO SPECIAL CLASSES OF SURFACES DEFINED BY ONE OR MORE PLANAR OR SPATIAL CURVES, 15th International conference on geometry and graphics, 1-5 august 2012. Montreal, Canada
3. G. Glaeser: Geometry and its Applications in Arts, Science and Nature, Springer – Edition Angewandte, 2013.
4. B. Grgić, M. Jeleč, I. Kraus & H. Draganić: Najpovoljniji oblik osi lučnog mosta, e-GFOS elektroničko časopis Građevinskog fakulteta Osijek <http://e-gfos.gfos.hr/>
5. B. Kučinić, O. Kristoforović, I. Saler: „Oble forme u graditeljstvu, Građevinar, Zagreb, 1992.
6. H. Liu, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensionl spaces, Journal of Geometry 64 (1999.) 141–149.
7. Ž. Milin-Šipuš, Translation surfaces in a simply isotropic space, Abstracts – 2nd Croatian Conference on Geometry and Graphics, Šibenik, 2010.
8. V. Niče: Deskriptivna geometrija II, Školska knjiga Zagreb 1980.
9. L. Pletenac: Surface modelling based on their properties, Projekt GEFFA, Ljetna škola Rijeka, 3. – 7. 9. 2012.
10. K. Strubecker: Nacrtna geometrija, Tehnička knjiga Zagreb 1969.